

短圈覆盖与处处无零 4-流*

路娜, 张军阳

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】针对一些特殊的图类验证 Tutte 的 4-流猜想。【方法】用子图的处处无零 4-流构造原图的处处无零 4-流。

【结果】1) 若图 $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$, 其中 G_i 存在处处无零 4-流, $1 \leq i \leq n$, 且 $\bigcup_{i=1}^{l-1} G_i$ 与 G_l 最多有两条公共边, $2 \leq l \leq n$, 则 G 存在处处无零 4-流; 2) 若图 $G = H \cup F$, 其中 H 是 G 的一个存在处处无零 4-流的子图, F 是 G 的一个阶数不超过 4 的无桥连通子图, 则 G 存在处处无零 4-流; 3) 若图 G 的每条边都包含在一个长度不超过 4 的圈中, 则 G 存在处处无零 4-流。**【结论】**上述的第 2 个结果是 Catlin 的一个引理的推广; Imrich 和 Škrekovski 关于笛卡尔积图的处处无零 4-流的结果是上述第 3 个结果的一个直接推论。

关键词: 整数流; 处处无零 4-流; 笛卡尔积图

中图分类号: O186.1

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2022)01-0137-04

本文所涉及到的图是可能有重边但没有自环的有限无向图, 所用的记号和术语都是标准的, 与很多通用的教材^[1]一致。

整数流的概念是 Tutte 在研究四色问题时提出的。在对这一概念进行初步研究之后, Tutte 提出了 3 个著名猜想^[2]: 任何 4-边连通图存在无零 3-流(3-流猜想); 任何不能收缩成 Peterson 图的 2-边连通图存在无零 4-流(4-流猜想); 任何 2-边连通图存在无零 5-流(5-流猜想)。近些年来, 众多学者对整数流问题进行了深入研究, 并且取得了一些重要进展^[3-7]。Jaeger^[5]证明了任意一个 4-边连通图存在处处无零 4-流, 并提出如下猜想: 存在一个正整数 k , 使得任意一个 k -边连通图存在处处无零 3-流。这一猜想被 Thomassen 解决, 他证明了任意一个 8-边连通图存在处处无零 3-流^[6]。随后 Lovász 等人^[7]把 Thomassen 的结果改进到了 6-边连通的情形。

本文针对一些特殊的图类验证处处无零 4-流的存在性, 主要得到 3 个结果。第 1 个结果给出了当一个图可以写成多个图的并时, 存在处处无零 4-流的一个充分条件。这个结果的一个特殊情形是当一个图可以写成它的两个至多两条公共边的子图的并时, 它存在处处无零 4-流。第 2 个结果是 Catlin^[2]的一个引理的推广, 证明了当一个图可写成一个存在处处无零 4-流的子图和一个阶至多为 4 的无桥连通子图的并时, 它存在处处无零 4-流。第 3 个结果是每条边都包含在一个长度不超过 4 的圈中的图存在处处无零 4-流。需要指出的是, 用第 3 个结果可以很容易证明 Imrich 等人^[3]提出的关于笛卡尔积图的处处无零 4-流存在性的定理。

1 预备知识

首先介绍一下整数流的概念。设 G 是一个图, 若 D 是赋予 G 的每条边的两个可能方向中的一个后得到的有向图, 则称 D 为 G 的一个定向。用 $D^+(v)$ 表示 G 的以点 $v \in V$ 为起点的边的集合, 用 $D^-(v)$ 表示 G 中以点 $v \in V$ 为终点的边的集合。设 $G = (V, E)$ 是一个以 V 为顶点集, E 为边集的图, A 是一个阿贝尔(加法)群, D 是 G 的一个定向, φ 是 E 到 A 的映射。记 $\varphi^+(v) := \sum_{e \in D^+(v)} \varphi(e)$, $\varphi^-(v) := \sum_{e \in D^-(v)} \varphi(e)$ 。

若对任意的 $v \in V$ 都有 $\varphi^+(v) = \varphi^-(v)$ 成立, 则称 (D, φ) 是 G 的一个 A -流。称集合 $\text{supp}(\varphi) = \{e \mid \varphi(e) \neq 0\}$ 为 φ 的支撑。若 $\text{supp}(\varphi) = E$, 则称 (D, φ) 是 G 的一个处处无零 A -流。特别地, 称图 G 的一个 Z 流为一个整数

* 收稿日期: 2021-06-11 修回日期: 2021-12-20 网络出版时间: 2022-02-09 15:42

资助项目: 重庆市基础研究与前沿探索项目(No. cstc2018jcyjAX0010); 重庆师范大学人才引进/博士启动项目(No. 21XLB006)

第一作者简介: 路娜, 女, 研究方向为代数组合, E-mail: 528714499@qq.com; 通信作者: 张军阳, 男, 副教授, 博士, E-mail: jyzhang@cqnu.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220209.1132.006.html>

流,其中 Z 为所有整数组成的加法群。设 k 是一个正整数,若图 G 的一个整数流 (D, φ) 满足 $|\varphi(e)| < k, \forall e \in E$, 则称 (D, φ) 是 G 的一个 k -流。Tutte^[2]证明了一个图有处处无零 k -流当且仅当它有处处无零 Z_k -流,其中 Z_k 为所有模 k 的剩余类组成的加法群。为了方便,本文称 Z_k -流为 k -流。根据文献[2],若 G 对的某个定向存在处处无零 k -流,则 G 对任意定向都存在处处无零 k -流,因此讨论 k -流的存在性时可以选择任意方向。

其次,给出图的笛卡尔积的概念。设 G 和 H 是两个图, G 和 H 的笛卡尔积 $G \square H$ 的定义如下:它的顶点集为 $V(G) \times V(H)$;它的边集为 $V(G) \times E(H) \cup E(G) \times V(H)$;对任意边 $(u, e') \in V(G) \times E(H), (u, u')$ 和 (u, v') 是 (u, e') 的两个端点,其中 u', v' 是 e' 的两个端点;对任意边 $(e, u') \in E(G) \times V(H), (u, u')$ 和 (v, u') 是 (e, u') 的两个端点,其中 u, v 是 e 的两个端点。注意到这里给出的笛卡尔积的定义无论对简单图还是对有重边的图都是适合的。

最后,给出一些引理,这些引理将在证明主要定理时用到。其中前 3 个引理的证明可在文献[2]中找到。

引理 1^[2] 设 G 是一个图, C_0 是 G 中长小于等于 4 的圈,若 G 存在整数 4-流 (D, φ) ,使得 $E(G) - E(C_0) \subseteq \text{supp}(\varphi)$,则 G 存在处处无零 4-流。

引理 2^[2] 设 G 是一个图, A 是阶为 k 的阿贝尔群, φ 是 A 的一个自同构, D 是 G 的一个定向。若 (D, φ) 是 G 的处处无零 k -流,则 $(D, \sigma\varphi)$ 是 G 的处处无零 k -流。

引理 3^[2] 设 G 是一个图,若 A 和 B 是两个阶相等的阿贝尔群,则 G 存在处处无零 A -流当且仅当 G 存在处处无零 B -流。

引理 3 表明一个图是否存在处处无零 A -流和阿贝尔群 A 的结构没有关系,只与 A 的阶有关。

称边数为 n 的 2 度连通正则图为 n -圈。特别地,2-圈指的是由两个顶点和两条平行边构成的图。有如下引理。

引理 4 任何一个无桥连通图都可分解成一些无桥简单图或 2-圈的并。

证明 对图 G 的边数进行数学归纳。设图 G 是无桥连通图。若 G 为一个简单图或 2-圈,则命题显然成立。特别地,命题对 $|E(G)| = 2$ 成立。下设 G 有重边且 $|E(G)| > 2$ 。假设命题对边数小于 $|E(G)|$ 的图成立。

若图 G 中存在割点,那么图 G 可分解成以割点为唯一公共顶点的两个无桥图 G_1 和 G_2 的并,且 $|E(G_i)| < |E(G)|, i=1,2$ 。由归纳假设知,子图 G_1 和 G_2 都可分解成一些无桥简单图或 2-圈的并。因为 $G = G_1 \cup G_2$,所以 G 可解分成一些无桥简单图或为 2-圈的并。

下面讨论 G 不存在割点的情形。

因为 G 有重边,所以图 G 中存在一个 2-圈 C_2 。设 C_2 的两条边为 e_1 和 e_2 ,两个顶点为 u 和 v 。令 $G' = G - e_1$,则 $G = G' \cup C_2$ 。易证 G' 不存在割点。事实上,若 G' 存在割点 w ,则在 G' 中删除 w 后得到的图不连通。若 $w \in \{u, v\}$,则 G 删除 w 后和 G' 删除 w 后得到的图是一样的。若 $w \notin \{u, v\}$,则 G 删除 w 后得到的图恰好比 G' 删除 w 后的得到的图多一条平行边。因此 w 也是 G 的割点,这与讨论的前提矛盾。矛盾说明 G' 不存在割点,所以 G' 是无桥连通图。

由于 $|E(G')| < |E(G)|$,根据归纳假设知,图 G' 可分成一些无桥简单图或 2-圈的并。因为 $G = G' \cup C_2$,所以 G 可分成一些无桥简单图或 2-圈的并。证毕

2 主要结果

本节着重给出本文主要结果的详细证明。

定理 1 设图 G 是 n 个子图 $G_1, G_2, \dots, G_n$ 的并,且对于任意 $i \in \{1, 2, \dots, n\}, G_i$ 存在处处无零 4-流。若对于任意 $l \in \{2, 3, \dots, n\}, \bigcup_{i=1}^{l-1} G_i$ 与 G_l 最多有两条公共边,则 G 存在处处无零 4-流。

证明 根据引理 3,只需证明 G 存在处处无零 A -流,其中 $A := Z_2 \times Z_2$ 是 4 阶初等阿贝尔群。

对 n 进行数学归纳。当 $n=1$ 时,命题显然成立。

下面设 $n>1$,并假设命题对 $n-1$ 成立。令 $H_1 = \bigcup_{i=1}^{n-1} G_i, H_2 = G_n$,则 $G = H_1 \cup H_2$ 。

由归纳假设知, H_1 存在处处无零 4-流, H_2 存在处处无零 4-流,且 $|E(H_1) \cap E(H_2)| \leq 2$ 。设 D 是 G 的一个定向, D_i 是 D 限制在 H_i 上所得到的 H_i 的定向,其中 $i=1, 2$ 。设 (D_i, φ_i) 是 H_i 的一个处处无零 4-流, $i=1, 2$ 。定义 $E(G)$ 到 A 的映射 φ'_i 如下:

$$\varphi'_i(e) = \begin{cases} \varphi_i(e), & e \in E(H_i) \\ 0, & e \notin E(H_i) \end{cases},$$

则 (D, φ'_i) 是 G 的一个 4-流。

由于 $A = Z_2 \times Z_2$, 则可直接验证 $\sigma: (0,0) \mapsto (0,0) \mapsto (1,0) \mapsto (0,1) \mapsto (1,1) \mapsto (1,0)$ 是 A 的一个 3 阶自同构。设 $\varphi'_1(e_i) = \sigma^{n_i} \varphi'_2(e_i)$, $i \in \{0,1,2\}$ 。当 $E(H_1) \cap E(H_2) = \{e_0\}$ 时, 取 $j \in \{1,2,3\} \setminus \{n_0\}$, 则 $\varphi'_1(e_0) - \sigma^j \varphi'_2(e_0) \neq 0$ 。当 $E(H_1) \cap E(H_2) = \{e_1, e_2\}$ 时, 取 $j \in \{0,1,2\} \setminus \{n_1, n_2\}$, 则 $\varphi'_1(e_i) - \sigma^j \varphi'_2(e_i) \neq 0$, 其中 $i=1,2$ 。令 $\varphi = \varphi'_1 - \sigma^j \varphi'_2$, 由引理 2 知, (D, φ) 是 G 的一个 4-流。对任意 $e \in E(G)$, 若 $e \in E(H_1) - E(H_2)$, 则 $\varphi(e) = \varphi_1(e) \neq 0$; 若 $e \in E(H_2) - E(H_1)$, 则 $\varphi(e) = \varphi_2(e) \neq 0$; 若 $e \in E(H_1) \cap E(H_2)$, 则 $\varphi(e) = \varphi_1(e) - \sigma^j \varphi_2(e) \neq 0$ 。因此 (D, φ) 是 G 的一个处处无零 4-流。证毕

定理 2 设 H, F 是图 G 的两个子图且满足 $G = H \cup F$ 。若 H 存在处处无零 4-流, F 是阶至多为 4 的无桥连通图, 则 G 也存在处处无零 4-流。

证明 分 3 种情形分别进行证明。

情形 1, F 是一个圈。

因为 F 的阶数至多为 4, 所以 F 为长度不超过 4 的圈。取 G 的一个定向 D , 并设 D' 是将 D 限制在 H 上所得到的 H 定向。因为 H 存在处处无零 4-流, 所以存在定义在 $E(H)$ 上的一个整数值函数 φ' , 使得 (D', φ') 为 H 的一个处处无零 4-流。在 $E(G)$ 上定义整数值函数 φ 如下:

$$\varphi(e) = \begin{cases} \varphi'(e), & e \in E(H) \\ 0, & e \in E(G) - E(H) \end{cases}.$$

则 (D, φ) 是 G 的一个 4-流, 并且 $E(H) \subseteq \text{supp}(\varphi)$ 。因 $G = H \cup F$, 所以 $E(G) - E(F) \subseteq \text{supp}(\varphi)$ 。根据引理 1, G 存在处处无零 4-流。

情形 2, F 是简单图且 F 不是圈。

因为 F 的阶数至多为 4, 所以 F 必为图 1 的两个图之一。所以 F 可以分解成两个长度不超过 4 的圈 F_1 和 F_2 的并(对于第一个图, F_1 和 F_2 都为 3-圈; 对于第二个图, F_1 和 F_2 都为 4-圈)。根据情形 1, $H \cup F_1$ 存在处处无零 4-流。再对 $H \cup F_1$ 和 F_2 运用情形 1, 可得 $(H \cup F_1) \cup F_2$ 存在处处无零 4-流。因为

$$G = H \cup F = (H \cup F_1) \cup F_2,$$

所以 G 存在处处无零 4-流。

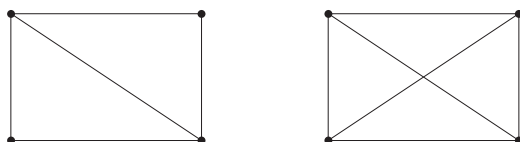


图 1 F 图的可能性

Fig. 1 Possibility of graph F

情形 3, F 是有重边的图。

根据引理 4, 可分解成一些无桥简单图或 2-圈的并。因此可设 $F = \bigcup_{i=1}^s F_i$, 其中每个 F_i 都是一个简单图或 2-圈。根据情形 1 和情形 2 知 $H \cup F_1$ 存在处处无零 4-流。对 $H \cup F_1$ 和 F_2 运用情形 1 和情形 2 的结果可知 $H \cup F_1 \cup F_2$ 存在处处无零 4-流。一直作下去可得 $H \cup F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_s$ 存在处处无零 4-流。因为

$$G = H \cup F = H \cup F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_s,$$

所以 G 存在处处无零 4-流。证毕

定理 3 设 G 是一个图, 若 G 的每条边都包含在一个长度不超过 4 的圈里, 则 G 存在处处无零 4-流。

证明 设 $F = \{\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n\}$ 是由 G 中所有长度不超过 4 的圈组成的极小集, 其中 Δ_i 是长度不超过 4 的圈, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则 $G = \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ 。对 n 进行数学归纳。

当 $n=1$ 时, 命题显然成立。

下面设 $n>1$, 并假设命题对 $n-1$ 成立。

根据归纳假设知, $\bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_i$ 存在处处无零 4-流。由命题知, Δ_n 是阶至多为 4 的无桥连通图。根据定理 2 得, $G = \bigcup_{i=1}^{n-1} \Delta_i \cup \Delta_n$ 存在无零 4-流。证毕

在文献[2]中, Imrich 等人证明了两个非平凡连通图的笛卡尔积存在处处无零 4-流。这个结果也是定理 3 的一个直接推论, 下面用定理 3 对这一结果进行证明。

推论 1 两个非平凡的连通图的笛卡尔积存在处处无零 4-流。

证明 设 G, H 是两个非平凡的连通图, 则 G 和 H 均无孤立点。根据图的笛卡尔积的定义得:

$$E(G \square H) = V(G) \times E(H) \cup E(G) \times V(H).$$

任取 $(u, e') \in V(G) \times E(H)$, 其中 e' 的两个端点分别是 u' 和 v' 。因为 G 无孤立点, 所以存在 $e \in E(G)$ 以 u 为它的一个端点。设 e 的另一个端点是 v , 则 4 条边 $(u, e'), (e, u'), (v, e')$ 和 (e, v') 在 $G \square H$ 中的诱导子图是一个 4-圈。因此 $V(G) \times E(H)$ 中任意一条边都包含在 $G \square H$ 的一个 4-圈中。

同理 $E(G) \times V(H)$ 中任意一条边也都包含在 $G \square H$ 的一个 4-圈中。这就证明了 $G \square H$ 中任意一条边都包含在的一个 4-圈中。根据定理 3, $G \square H$ 存在处处无零 4-流。证毕

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U. Graph theory[M]. London: Springer, 2008.
- [2] ZHANG C Q. Integer flows and cycle covers of graphs[M]. New York: Marcel Dekker Inc, 1997.
- [3] IMEICH W, ŠKREKOVSKI R. A theorem on integer flows on Cartesian products of graphs[J]. Graph Theory, 2003, 43: 93-98.
- [4] LAI H J. The size of graphs without nowhere-zero 4-Flow[J]. Graph Theory, 1988, 19: 385-395.
- [5] JAEGER F. Flows and generalized coloring theorems in graphs[J]. Journal of Combinatorial Theory B, 1979, 26: 205-216.
- [6] THOMASSEN C. The weak 3-flow conjecture and the weak circular flow conjecture[J]. Journal of Combinatorial Theory B, 2012, 102: 521-529.
- [7] LOVÁSZ L M, THOMASSEN C, WU Y, et al. Nowhere-zero 3-flows and modulo k -orientations[J]. Journal of Combinatorial Theory B, 2013, 103: 587-598.

Operations Research and Cybernetics

Short Circle Coverage and Nowhere-Zero 4-Flow

LU Na, ZHANG Junyang

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] Verify Tutte's 4-flow conjecture for some special classes of graphs. [Methods] Use the nowhere-zero 4-flow of subgraphs to construct the nowhere-zero 4-flow of original graphs. [Findings] 1) Let $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$ be a graph where every G_i is a subgraph of G admitting a nowhere-zero 4-flow. If there are at most two common edges between $\bigcup_{i=1}^{l-1} G_i$ and G_l for each $2 \leq l \leq n$, then G admits a nowhere-zero 4-flow. 2) If a graph $G = H \cup F$ where H admits a nowhere-zero 4-flow and F is a bridgeless graph of order at least 4, then G admits a nowhere-zero 4-flow. 3) If each edge of a graph G is contained in cycle of length at most 4, then G admits a nowhere-zero 4-flow. [Conclusions] Our second result is a generalization of Catlin's lemma. The result on the existence of nowhere-zero 4-flows of Cartesian product graphs given by Imrich and Škrekovsk is a direct corollary of our third result.

Keywords: integer flow; nowhere-zero 4-flow; cartesian product graph

(责任编辑 黄 颖)