

基于范数标量化方法的多目标次梯度算法^{*}

席天为, 江术兰, 赵克全

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】提高多目标优化问题的收敛速率及解的精度。【方法】在欧式空间中基于范数标量化方法提出了求解多目标优化问题的次梯度算法。【结果】在每个目标函数与相应最小值的差的平方为凸函数的假设下,证明了多目标次梯度算法的 Pareto 弱有效解的收敛性。【结论】数值实验结果表明:提出的多目标次梯度算法在求解多目标线性优化模型时具有更快的收敛率,并且在求解非光滑多目标优化问题时具有更高的解的精度。

关键词:多目标优化问题;范数标量化方法;次梯度算法;Pareto 弱有效解

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)02-0001-07

众所周知,多目标优化理论与方法已被广泛应用于经济、工业、交通等方面^[1-3]。多目标优化理论研究发展十分迅速^[4-5],尤其是提出了各种不同类型的解的定义,包括有效解、弱有效解和各类真有效解等^[6-7]。遗传算法是求解多目标优化问题的基本方法之一^[8];基于标量化思想提出的多目标优化问题的各类求解方法也是求解多目标优化问题的基本方法之一。常见的方法有线性加权法、极大极小法、范数标量化等。范数标量化方法的基本思想是首先求出每一个目标函数的最小值,所有目标函数最小值构成理想点,进而在目标空间中引进某种范数,并考虑在该范数下目标函数与理想点距离最小,从而将多目标优化问题转化为单目标优化问题^[9]。

近些年来,一些学者基于传统单目标优化算法提出了求解多目标优化问题的算法。2000年,Fliege 等人^[10]基于传统的最速下降算法提出了求解多目标优化问题的最速下降算法,并在目标函数的凸性假设下,证明了该算法的收敛性;2004年,Grana 等人^[11]在 Fliege 等人的工作基础上提出了求解多目标优化问题的投影梯度算法,主要思想是利用投影法将最速下降算法的迭代点投影到可行域上,从而达到求解含有约束的多目标优化问题;2009年,Fliege 等人^[12]提出了求解多目标优化问题的牛顿算法,该方法在目标函数二次可微的条件下具有二阶收敛性,能够快速求出多目标优化问题的局部有效解;2013年,Bello 等人^[13]提出了求解多目标优化问题的次梯度算法,该方法要求目标函数是 k -凸,在凸性条件假设下,该算法能够求解出多目标优化问题的有效解;2015年,Brito 等人^[14]在 Bello 等人的工作基础上提出了求解多目标优化问题的松弛投影次梯度算法,该算法是基于线性加权法对多目标优化问题的目标函数的次梯度进行线性加权处理,从而克服了 Bello 等人研究工作中的子问题不容易求解的问题,并在目标函数的凸性假设条件下,证明了该算法可以收敛到 Pareto 弱有效解,但是该算法对于多目标线性优化问题这类特殊多目标优化问题的收敛速率较慢。

本文在 Brito 等人的工作基础上,进一步提出了一种新的基于范数标量化方法的多目标次梯度算法。采用每一个目标函数减去最小值后平方的次梯度来构造子问题,该方法不需要目标函数的凸性假设,仅需要每一个目标函数减去最小值后的平方为凸函数即可,并在该假设条件下证明了本文提出的多目标次梯度算法的 Pareto 弱有效解的收敛性。数值实验结果表明:多目标次梯度算法在多目标线性优化模型上有较快的收敛率,同时对于多目标非光滑优化问题,得到的解的精度更高。

^{*} 收稿日期:2021-04-15 修回日期:2021-05-31 网络出版时间:2022-03-28 15:16

资助项目:国家自然科学基金重大项目(No. 11991024);国家自然科学基金面上项目(No. 11671062;No. 12171063);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆市自然科学基金项目(No. cstc2021jcyj-msxmX0280);重庆市教委科学技术研究项目(No. KJQN202100521)

第一作者简介:席天为,男,研究方向为多目标优化理论与算法,E-mail:1695762015@qq.com;通信作者:赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com.

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220328.1027.002.html

1 预备知识

本文中 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 中的内积, $\|\cdot\|$ 表示相应的范数, K 是 $\mathbf{R}^m$ 中的闭点凸锥且 $\text{int}(K)$ 非空。定义偏序关系 $\leq$, $x \leq y (x < y)$ 当且仅当 $y - x \in K (y - x \in \text{int}(K))$ 。本文假设 $K = \mathbf{R}_+^m$, 函数 $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^m$, 且 $F(x) = (F_1(x), F_2(x), \dots, F_m(x))$ 。考虑如下多目标优化问题:

$$\min F(x), \text{ s. t. } x \in C. \quad (1)$$

其中: $C \subset \mathbf{R}^n$ 是非空闭凸集且具有如下形式:

$$C = \{x \in \mathbf{R}^n : g(x) \leq 0\}, \quad (2)$$

其中: $g: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 非线性函数且 $g(x) = \sup\{g_j(x) : j \in J\}$ 。

假设 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $(F_i(x) - F_i^0)^2 : \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ 是 $\Omega \subset C$ 上的凸函数, 即对任意 $x, y \in \Omega$, 有:

$$(F_i((1-\alpha)x + \alpha y) - F_i^0)^2 \leq (1-\alpha)(F_i(x) - F_i^0)^2 + \alpha(F_i(y) - F_i^0)^2, i \in \{1, 2, \dots, m\},$$

其中: $F_i^0 = \min F_i(x)$ 。

定义 1^[5] $x^* \in C \subset \mathbf{R}^n$ 是问题(1)的 Pareto 弱有效解, 若不存在 $x \in C$ 使得 $F(x) < F(x^*)$; 若不存在 $x \in C$ 使得 $F(x) \leq F(x^*)$ 且 $F(x) \neq F(x^*)$, 则称 x^* 是问题(1)的 Pareto 有效解。

定义 2^[5] $\{u^k\} \subset \mathbf{R}^n$ 是非空集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ 上的 Quasi-Fejer 收敛序列, 若对 $\forall u \in U$ 存在子列 $\{\psi_k\} \subset \mathbf{R}_+$ 使得:

$$\|u^{k+1} - u\|^2 \leq \|u^k - u\|^2 + \psi_k, \text{ 且 } \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k < \infty.$$

引理 1^[5] 假设 $x^* \in C$ 满足 $\max_i (F_i(x) - F_i(x^*)) \geq 0, \forall x \in C$, 则称 x^* 是问题(1)的 Pareto 弱有效解。

令 $x \in \mathbf{R}^n, D \subset \mathbf{R}^n$ 是闭凸集, 称它的投影为 D 上的正交投影, 若在 D 中存在唯一一个点使得 $\|P_D(x) - y\| \leq \|x - y\|, \forall y \in D$ 记为 $P_D(x)$ 且 $P_D(x)$ 还满足 $\langle x - P_D(x), y - P_D(x) \rangle \leq 0, y \in D$ 。

引理 2^[15] 若 $\{u^k\} \subset \mathbf{R}^n$ 是非空集合 $U \subset \mathbf{R}^n$ 上的 Quasi-Fejer 收敛序列, 那么 $\{u_k\}$ 有界。进一步, 如果 $\{u_k\}$ 的聚点 $\bar{u} \in U$, 那么 $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = \bar{u}$ 。

引理 3^[15] 对 $\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 有如下结论成立: i) $\forall x \in C, \partial F_i(x)$ 是一个非空闭凸集; ii) $\partial F_i(x)$ 在有界集上是有界的。

引理 4^[14] 对 $\forall k \in \mathbf{N}$, 如下结论成立: i) $\|\omega^k\| \leq 2\beta_k$; ii) $\|x^{k+1} - z^k\| \leq 2\beta_k$ 。

引理 5^[14] 对 $\forall y \in C, \forall k \in \mathbf{N}$, 则有 $\|z^k - y\| \leq \|x^k - y\|$ 成立。

引理 6^[14] 令 $y \in C_k$, 则 $\langle \omega^k, z^k - y \rangle \leq \frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \langle s_i^k, y - z^k \rangle + 2\beta_k^2, k = 0, 1, \dots$ 成立。

引理 7^[16] $y^0 \in \mathbf{R}^n, g(y^0) > 0, \{y^j\}$ 是由投影算法产生的序列则有: i) $\|y^{j+1} - y\| \leq \|y^j - y\|, \forall y \in C$; ii) 算法将在有限步内终止。

定义两种非负序列 λ_k 和 β_k 且满足如下条件: $\{\lambda_k\} \subset [0, 1], \sum_{i=1}^m \lambda_k = 1, \forall k \in \mathbf{N}; \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \infty, \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k^2 < \infty$ 。

2 基于范数标量化方法的多目标次梯度算法

下面首先介绍 Konnov 等人在 1997 年提出的投影算法, 该算法将 $\mathbf{R}^n$ 中的点投影到可行域 C 上; 并假设约束集内部非空, 即存在一点 $\omega \in \mathbf{R}^n$ 使得 $g(\omega) < 0$ 。

2.1 投影算法^[16]

步骤 0: 令 $y^0 \in \mathbf{R}^n, j := 0$;

步骤 1: 若 $g(y^j) \leq 0$, 则停止计算; 否则转步骤 2;

步骤 2: 选取 $s^j \in \partial g(y^j)$ 计算:

$$y^{j+1} := y^j - \frac{2}{\|s^j\|^2} g(y^j) s^j, j := j + 1, \quad (3)$$

转步骤 1。

2.2 本文算法

步骤 0: 选择初始点 $x^0 \in \mathbf{R}^n$, 令 $k = 0$;

步骤 1: 若 $g(x_k) \leq 0$, 则令 $z_k := x^k$, 否则应用投影算法令 $y^0 = x^k$ 得到 $y^{j(k)}$, 令 $z^k = y^{j(k)}$;

步骤 2: 选取 $v_k \in \partial g(z_k)$, 定义 $C_k := \{x \in \mathbf{R}^n : g(z^k) + \langle v^k, x - z^k \rangle \leq 0\}$; 选取 $s_i^k \in \partial(F_i(x) - F_i^0)^2$, 若 $s_i^k = 0$,

则算法终止; 否则令 $\eta_k = \max_{i=1, \dots, m} \{1, \|s_i^k\|\}$, 计算 $\omega_k := \arg \min_{C_k - z_k} h_k(\omega)$, 其中 $h_k(\omega) = \frac{\beta_k}{\eta_k} \langle \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k, \omega \rangle + \frac{\|\omega\|^2}{2}$ 。若 $\omega^k = 0$, 则算法终止; 否则转步骤 3;

步骤 3: 令

$$x^{k+1} := z^k + \omega^k, \quad (4)$$

$k := k+1$ 转步骤 1。

3 收敛性分析

引理 8 假设算法在第 k 步 ($k \in \mathbf{N}$) 使得下列条件之一成立: i) $\exists i \in \{1, \dots, m\}$, s. t. $s_i^k = 0$; ii) $\omega_k = 0$ 。则 z_k 是问题(1)的 Pareto 弱有效解。

证明 设在第 k 步 ($k \in \mathbf{N}$) 使得 i) 成立, 即存在 $i_0 \in \{1, \dots, m\}$ 使得 $s_{i_0}^k = 0$, 由于 $(F_i(x) - F_i^0)^2, \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ 是凸函数, 从而 $\forall x \in C, (F_{i_0}(x) - F_{i_0}^0)^2 \geq (F_{i_0}(z^k) - F_{i_0}^0)^2$, 即 $F_{i_0}(x) \geq F_{i_0}(z^k)$ 。由引理 1 可得 z^k 是问题(1)的 Pareto 弱有效解。

现在假设 ii) 成立, 由 ω_k 的定义可得:

$$\begin{aligned} \omega_k &= \arg \min_{\omega \in C_k - z_k} \left\{ \frac{\beta_k}{\eta_k} \langle \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k, \omega \rangle + \frac{\|\omega\|^2}{2} \right\} = \arg \min_{\omega \in C_k - z_k} \left\{ \frac{\beta_k}{\eta_k} \langle \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k, \omega \rangle + \left(\frac{\|\omega\|^2}{2} + \frac{1}{2} \left\| \frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k \right\|^2 \right) \right\} = \\ &= \arg \min_{\omega \in C_k - z_k} \frac{1}{2} \left\| \omega - \left(-\frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k \right) \right\|^2 = P_{C - z_k} \left(-\frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k \right). \end{aligned}$$

令 $D_k = C_k - \{z_k\} = \{x - z_k \mid x \in C_k\}$, $x = -\frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k, \omega_k = 0$, 从而由(4)式可得:

$$\left\langle \frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k, \omega \right\rangle \geq 0, \forall \omega \in C_k - \{z_k\}.$$

由于 $C \subset C_k$, 故有 $\frac{\beta_k}{\eta_k} \left\langle \sum_{i=1}^m s_i^k \lambda_i^k, y - z^k \right\rangle \geq 0, \forall y \in C$ 。

综上所述, 对 $\forall y \in C$, 存在 $j \in \{1, 2, \dots, m\}$ 使得 $\langle s_j^k, y - z^k \rangle \geq 0$ 。由 $(F_j(x) - F_j^0)^2, \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}$ 是 C 上的凸函数, 从而有:

$$\max_i \{ (F_i(x) - F_i^0)^2 - (F_i(z_k) - F_i^0)^2 \} \geq (F_j(x) - F_j^0)^2 - (F_j(z_k) - F_j^0)^2 \geq (s_j^k, y - z^k) \geq 0.$$

从而 $F_j(y) \geq F_j(z^k), \forall y \in C$, 故有引理 1 可得 z^k 是问题(1)的 Pareto 弱有效解。

证毕

引理 9 若 $\{z_k\}$ 有界, 则对 $\forall y \in C_k$, 有如下结论成立:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2) \geq 0.$$

证明 令 $k \in \mathbf{N}, y \in C_k$ 。由引理 4、引理 5、引理 6 和(4)式可得:

$$\begin{aligned} \|z^{k+1} - y\|^2 &\leq \|x^{k+1} - y\|^2 = \|z^k - y + \omega^k\|^2 = \|z^k - y\|^2 + \|\omega^k\|^2 + 2\langle \omega^k, z^k - y \rangle \leq \\ &\leq \|z^k - y\|^2 + 2 \frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \langle s_i^k, y - z^k \rangle + 8\beta_k^2. \end{aligned} \quad (5)$$

$(F_i(y) - F_i^0)^2$ 是凸函数, 由次梯度的定义可得 $\langle s_i^k, y - z^k \rangle \leq (F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2$ 。再由此式及(5)式最后一个不等式有:

$$\|z^{k+1} - y\|^2 \leq \|z^k - y\|^2 + 2 \frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2) + 8\beta_k^2. \quad (6)$$

定义集合 $\Lambda := \{k \in \mathbf{N} : \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2)\}$ 。下面分两种情况讨论。

i) 集合 Λ 是有限的。此时有:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) \leq \liminf_{k \in \Lambda} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) \leq 0,$$

则结论得证。

ii) 集合 Δ 是有限的。此时存在 $k_0 \in \mathbf{N}$ 使得 $\forall k > k_0$, 有 $\sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) \geq 0$ 。由于 $\{z^k\}$ 是有界, 从而存在一个整数 L 使得 $\eta_k \leq L$, 因此, 对于 $k \geq k_0$ 有:

$$2 \frac{\beta_k}{L} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) \leq 2 \frac{\beta_k}{\eta_k} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2). \quad (7)$$

结合(6)式与(7)式有: $2 \frac{\beta_k}{L} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) \leq \|z^k - y\|^2 - \|z^{k+1} - y\|^2 + 8\beta_k$ 。

取 $K \in \mathbf{N}$, 将上式从 $k=k_0$ 加到 K 。由于 $-\|z^{K+1} - y\|^2 < 0$, 从而可得:

$$2 \sum_{k=k_0}^K \frac{\beta_k}{L} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) \leq \sum_{k=k_0}^K \beta_k^2 + \|z^0 - y\|^2. \quad (8)$$

对(8)式令 $K \rightarrow \infty$, 同时结合(3)式有 $\liminf_{K \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) \leq 0$, 则结论得证。证毕

定理 1 (Pareto 弱有效解的收敛性) 若序列 $\{z^k\}$ 是有界的, 则 $\{z^k\}$ 存在收敛子列 $\{z^{k_j}\}$, $z^* \in C$ 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} z^{k_j} = z^*$, 并且 z^* 是问题(1)的 Pareto 弱有效解。

证明 令 $y \in C$ 。则由引理 9 可得 $0 \leq \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2)$ 。从而存在子列 $\{\sum_{i=1}^m \lambda_i^{k_j} ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^{k_j}) - F_i^0)^2)\}$ 使得:

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k_j} ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^{k_j}) - F_i^0)^2) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2)。$$

另一方面, 由于 $\{z^k\}$ 有界及(3)式, 则存在 $\{z^k\}$ 的子列 $\{z^{k_j}\}$ 及 $\{\lambda_i^k\}$ 的子列 $\{\lambda_i^{k_j}\}$ 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} z^{k_j} = z^* \in C, \lim_{j \rightarrow \infty} \lambda_i^{k_j} = \lambda_i$ 且 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ 。从而有:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^{k_j} ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^{k_j}) - F_i^0)^2) = \limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2) = \\ &\limsup_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \lambda_i ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i \max_i ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2) \leq \\ &\max_i ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2) \sum_{i=1}^m \lambda_i = \max_i ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2)。 \end{aligned}$$

不妨设上式在 i_0 处取得最大值即:

$$(F_{i_0}(y) - F_{i_0}^0)^2 - (F_{i_0}(z^k) - F_{i_0}^0)^2 = \max_i ((F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2) \geq 0。$$

从而有 $F_{i_0}(y) \geq F_{i_0}(z^k)$ 。结合引理 4 可得 z^* 是问题(1)的弱 Pareto 有效解, 从而结论得证。证毕

定义如下集合: $T := \{y \in C: \exists \bar{k} \in \mathbf{N}, \forall k > \bar{k}, (F(y) - F^0)^2 \leq (F(z^k) - F^0)^2\}$ 。

引理 10 设 T 非空, 由于 $(F_i(x) - F_i^0)^2$ 是凸函数, 则对于 $\forall y \in T$ 有:

$$\langle s_i^k, y - z^k \rangle \leq (F_i(y) - F_i^0)^2 - (F_i(z^k) - F_i^0)^2 \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m。$$

证明 由上式及(10)式可以得到 $\|z^{k+1} - y\|^2 \leq \|z^k - y\|^2 + 8\beta_k^2$; 结合(3)式及定义 2, 取 $\phi_k = 8\beta_k^2$ 。证毕

引理 11 设 $\{\lambda_i^k\} \subset [\underline{\lambda}, 1]$, 其中 $\underline{\lambda} > 0$ 且 T 非空, 那么序列 $\{z^k\}$ 收敛到 $z^* \in T$, 并且对 $\forall y \in T$ 有 $(F(y) - F^0)^2 = (F(z^*) - F^0)^2$ 。

证明 由引理 8 及引理 10 可得 $\{z^k\}$ 是有界序列, 则对 $\forall y \in T$ 有:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \sum_{i=1}^m \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) < \infty。$$

由 $y \in T$ 及(3)式可得 $\liminf_{k \rightarrow \infty} \lambda_i^k ((F_i(z^k) - F_i^0)^2 - (F_i(y) - F_i^0)^2) = 0$ 。由 $\forall i, k, \lambda_i^k > \underline{\lambda}$ 及上式可得:

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} (F_i(z^k) - F_i^0)^2 = (F_i(y) - F_i^0)^2, \quad 1 \leq i \leq m。$$

因为 $\{z^{k_j}\} \subset \{z^k\}$, 从而满足上述极限, 故可得 $\liminf_{k \rightarrow \infty} (F_i(z^{k_j}) - F_i^0)^2 = (F_i(y) - F_i^0)^2, 1 \leq i \leq m$ 。

不失一般性, 设存在 $z^* \in C$ 使得 $\lim_{j \rightarrow \infty} z^{k_j} = z^*$ 。由 $(F_i(z^{k_j}) - F_i^0)^2$ 的连续性得: $\lim_{j \rightarrow \infty} (F_i(z^{k_j}) - F_i^0)^2 = (F_i(z^*) - F_i^0)^2$ 且 $(F_i(z^*) - F_i^0)^2 = (F_i(y) - F_i^0)^2, \forall y \in T$ 。

从而由引理 8 可得 $\{z^k\}$ 收敛到 $\{z^*\}$ 。

证毕

定理 2 (Pareto 有效解的收敛性) 序列 $\{z^k\}$ 极限点是问题(1) Pareto 有效解。

证明 由引理 10 可得, $\{z^k\}$ 收敛到 $z^* \in T$ 且 $(F_i(z^*) - F_i^0)^2 = (F_i(y) - F_i^0)^2, \forall y \in T$ 。设 z^* 不是问题(1) 的 Pareto 有效解, 则存在 $\bar{z}$ 和 j 使得 $F_i(\bar{z}) \leq F_i(z^*), \forall i=1, 2, \dots, m, i \neq j, F_j(\bar{z}) < F_j(z^*)$ 。

从而有 $(F_i(\bar{z}) - F_i^0)^2 \leq (F_i(z^*) - F_i^0)^2, \forall i=1, 2, \dots, m, i \neq j, (F_j(\bar{z}) - F_j^0)^2 < (F_j(z^*) - F_j^0)^2$ 。

由于 $z^* \in T$ 由 T 的定义可得 $\bar{z} \in T$, 这与 $(F_i(z^*) - F_i^0)^2 = (F_i(y) - F_i^0)^2, \forall y \in T$ 。产生矛盾。因此 z^* 是问题(1)的 Pareto 有效解, 从而结论得证。

证毕

4 数值实验

本文主要与文献[14]中所提的算法进行数值实验对比。本文的数值实验在参数为 12 GB RAM, 2.20 GHz i5 Thinkpad 上完成, 使用 Matlab 2020 中的 FMINCON 和 QUADPROG 中的求解器进行求解。选择的终止准则为 $\|\omega^k\| \leq 10^{-2}$ 或最大迭代步数为 500, 选择的步长 $\beta_k = \beta/k$, 其中 $\beta \in \{1, 2, \dots, 1\ 000\}$ 。

例 1

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= 2 + (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, \\ \min f_2(x) &= 9x_1 - (x_2 - 1)2, \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq 225 \\ x_1 - 3x_2 + 10 \leq 0 \\ -20 \leq x_1 \leq 20 \\ -20 \leq x_2 \leq 20 \end{cases} \end{aligned}$$

本文从 $[-20, 20]$ 随机选择 100 个初始点进行计算。从平均迭代步数和 Pareto 有效解的分布进行比较, 结果见表 1。

表 1 例 1RPM 与 New_RPM 结果对比表

Tab.1 Comparison of results between example 1 RPM and New_RPM

方法	平均迭代步数	f_1^*	f_2^*	x_1^*	x_2^*
RPM	25.36	3 478	-3 728	-5	820
NPM	17.32	779	-73.02	-38	8.17

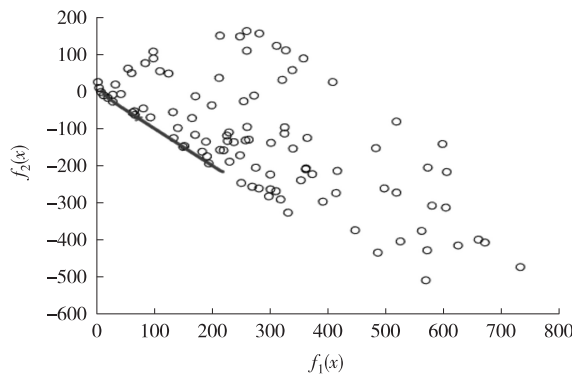


图 1 例 1 目标函数空间图

Fig.1 Spatial diagram of objective function for example 1

例 2

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= -6x_1 - 4x_2, \\ \min f_2(x) &= -x_1, \\ \text{s. t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 100 \\ 2x_1 + x_2 \leq 150 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

本文从 $[0, 75]$ 随机选择 100 个初始点进行计算。从平均迭代步数和 Pareto 有效解的分布进行比较, 结果见表 2。

表 2 例 2RPM 与 New_RPM 结果对比表

Tab. 2 Comparison of results between example 2 RPM and New_RPM

方法	平均迭代步数	f_1^*	f_2^*	x_1^*	x_2^*
RPM	111	$[-499.934\ 1, 458.141\ 5]$	$[-70.929\ 2, -50.032\ 9]$	$[50.032\ 9, 70.929\ 2]$	$[8.141\ 6, 49.934\ 3]$
NPM	91.8	$[-495.212\ 6, -465.771]$	$[-67.088\ 5, -53.5]$	$[53.5, 67.088\ 5]$	$[15.822\ 4, 45.278\ 1]$

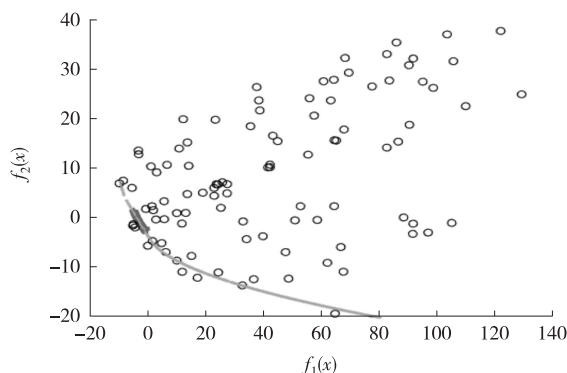


图 2 例 2 目标函数空间图

Fig. 2 Space diagram of objective function for example 2

例 1 与例 2 表明: 虽然两种方法产生的最优解不一样且产生的最优解区间不一样, 但函数值都在 Pareto 面上, 且当目标函数是线性时, 本文的迭代步数优于 RPM 算法。

例 3

$$\begin{aligned} \min f_1(x) &= |x_1 + x_2| + x_2^2 - 2x_2, \\ \min f_2(x) &= |x_1 - x_2| - 2x_2, \\ \text{s. t. } &\begin{cases} -10 \leq x_1 \leq 10 \\ -10 \leq x_2 \leq 10 \end{cases} \end{aligned}$$

本文从 $[-10, 10]$ 随机选择了 100 个初始点进行计算。从平均迭代步数和 Pareto 有效解的分布进行比较, 结果见表 3。

表 3 例 3RPM 与 New_RPM 结果对比表

Tab. 3 Comparison of results between example 3 RPM and New_RPM

方法	平均迭代步数	f_1^*	f_2^*	x_1^*	x_2^*
RPM	16.54	$[-7.401\ 0, -0.013\ 9]$	$[-3.986\ 1, 3.401\ 1]$	$[1.766\ 3, 9.419\ 9]$	$[1.769\ 1, 2.050\ 9]$
NPM	21.58	$[-5.052\ 8, -1.059\ 4]$	$[-5.953, 1.406]$	$[1.641\ 9, 9.173\ 6]$	$[1.401\ 7, 5.906]$

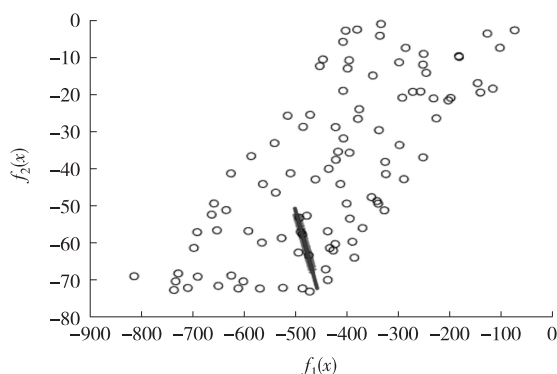


图 3 例 3 目标函数空间图

Fig. 3 Spatial diagram of objective function for example 3

例 3 表明:虽然本文提出的算法的平均迭代步数比 RPM 多了 5 次,但解空间却比 RPM 的范围要广。

参考文献:

- [1] BELTON V, STEWART T J. Multiple criteria decision analysis[M]. New York: Springer, 2002.
- [2] MARLER R T, ARORA J S. Survey of multi-objective optimization methods for engineering[J]. Structural Multidisciplinary Optimization, 2004, 26(6): 369-395.
- [3] ZOPOUNIDIS C, PARDALOS P M. Handbook of multicriteria analysis[M]. Berlin: Springer, 2010.
- [4] CHINCHULUUN A, PARDALOS P M. A survey of recent developments in multiobjective optimization[J]. Annals of Operations Research, 2007, 154(1): 29-50.
- [5] YU P L. Multiple-criteria decision making[M]. New York: Plenum Press, 1985.
- [6] ZHENG X Y, YANG X Q. The structure of weak Pareto solution sets in piecewise linear multiobjective optimization in normed spaces[J]. Science China Mathematics, 2008, 51(7): 1243-1256.
- [7] GEOFFROY A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 22(3): 618-630.
- [8] DEB K, PRATAP A, AGARWAL S, et al. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm: NSGA-II[J]. IEEE Transactions on Evolutionary Computation, 2002, 6(2): 182-197.
- [9] COLLETTE Y. Multiobjective optimization[M]. Berlin: Springer, 2008.
- [10] FLIEGE J, SVAITER B F. Steepest descent methods for multicriteria optimization[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2000, 51(3): 479-494.
- [11] DRUMMOND L, IUSEM A N. A projected gradient method for vector optimization problems[J]. Computational Optimization & Applications, 2004, 28(1): 5-29.
- [12] FLIEGE J, GRANA L M, SVAITER D B F. Newton's method for multiobjective optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2009, 20(2): 602-626.
- [13] CRUZ B J Y. A subgradient method for vector optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2013, 23(4): 2169-2182.
- [14] BRITO A S, NETO J, SANTOS P, et al. A relaxed projection method for solving multiobjective optimization problems[J]. European Journal of Operational Research, 2017, 256(1): 17-23.
- [15] ROCKAFELLAR R T. Convex analysis [M]. New Jersey: Princeton University, 1970.
- [16] CRUZ B J Y, ALLENDE B G. Steepest descent-like method for variable order vector optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 162(2): 371-391.

Operations Research and Cybernetics

Multi-Objective Subgradient Algorithm Based on Norm Scale Quantization Method

XI Tianwei, JIANG Shulan, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] Improve the convergence rate and solution accuracy of multi-objective linear optimization problems. [Methods] It proposes a multi-objective subgradient algorithm in Euclidean space based on norm scale quantization method. [Findings] Under the assumption that the square of each objective function minus its minimum value is a convex function, the convergence of the Pareto weakly efficient solution of the multi-objective subgradient algorithm proposed is proved. [Conclusions] Finally, the numerical results show that the proposed multi-objective subgradient algorithm has a fast convergence rate on the multi-objective linear optimization model, and a higher precision on the multi-objective non-smooth model.

Keywords: multi-objective; norm scale quantization; subgradient algorithm; Pareto efficient solution

(责任编辑 陈 乔)