

非光滑半无限优化的最优性必要条件^{*}

徐茂杨, 高 英

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究非光滑半无限优化问题在极限次微分下的最优性必要条件。【方法】通过约束品性和择一定理,研究带有抽象集约束的非光滑半无限优化问题的 Kuhn-Tucker 型必要条件。【结果】首先,举例说明已有文献中关于非光滑半无限优化问题的必要性条件的错误,并给出合理的修正。随后,针对半无限优化问题,给出一类约束品性。并通过择一定理得到了带有抽象集约束的非光滑半无限优化问题的 Kuhn-Tucker 型必要条件。【结论】所得结果丰富了半无限优化理论。

关键词:半无限优化;极限次微分;约束品性;最优性必要条件

中图分类号:O221.2

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)02-0008-07

半无限优化问题是指决策变量有限且约束函数个数无限的优化问题,它在控制系统设计、分散系统中的资源分配、竞争决策、多目标优化等问题中有着广泛的应用^[1-2]。近些年来,关于半无限优化的理论研究得到了学者们的广泛关注,主要包括:最优性条件的研究^[4-9]、对偶理论的研究^[10-11]等。在最优性条件的研究中,文献[7-9]主要基于 Clarke 次微分研究了半无限优化问题的最优性条件。文献[4,6]利用 Mordukhovich (极限)次微分研究了半无限优化问题的最优性条件。特别地,Mishra 等人^[4]利用极限次微分得到了半无限优化问题的 Kuhn-Tucker 型最优性条件。随后,文献[5-6]指出文献[4]中不合理的地方,但他们没有给出合理的修正。因此,本文举例说明文献[4]中半无限优化问题必要性条件的错误,并进行合理的修正。其次,为研究半无限优化问题的 Kuhn-Tucker 型必要条件,基于文献[10]中的一类约束品性,本文得到了带有抽象集约束的非光滑半无限优化问题的必要性条件。

1 预备知识

本文考虑如下的非光滑半无限优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{SIP}) \quad & \min f(\mathbf{x}), \\ & \text{s. t. } g_i(\mathbf{x}) \leq 0, i \in I, \\ & \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n. \end{aligned}$$

其中: f 是 $\mathbf{R}^n$ 上的局部 Lipschitz 函数, $g_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}, i \in I, I$ 为无限指标集。

设 S 为 (SIP) 问题的可行解,即 $S = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \forall i \in I\}$ 。对给定 $\bar{\mathbf{x}} \in S, I(\bar{\mathbf{x}})$ 为 (SIP) 问题在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处起作用的约束指标集,即 $I(\bar{\mathbf{x}}) = \{i \in I \mid g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0\}$ 。

设非空集合 $A \subseteq \mathbf{R}^n, \text{cl } A, \text{conv } A$ 和 $\text{cone } A$ 分别表示为 A 的闭集、凸包和凸锥(包含原点)。任取 $\bar{\mathbf{x}} \in \text{cl } A, A$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的切锥、法锥和可行方向锥分别定义为:

$$\begin{aligned} T(A, \bar{\mathbf{x}}) &= \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n : \exists \{\lambda_j\}, \lambda_j \downarrow 0, \exists \{\mathbf{d}_j\}, \mathbf{d}_j \rightarrow \mathbf{d} (j \rightarrow \infty), \text{s. t. } \bar{\mathbf{x}} + \lambda_j \mathbf{d}_j \in A\}, \\ N(A, \bar{\mathbf{x}}) &= \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{y}, \mathbf{d} \rangle \leq 0, \mathbf{d} \in T(A, \bar{\mathbf{x}})\}, \\ D^{\bar{\mathbf{x}}} &= \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\} : \exists \delta > 0, \text{s. t. } \bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d} \in A, \forall \lambda \in (0, \delta)\}. \end{aligned}$$

当 A 是凸集时, A 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的法锥定义为 $N(A, \bar{\mathbf{x}}) = \{\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n : \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}} \rangle \leq 0, \forall \mathbf{x} \in A\}$ 。

^{*} 收稿日期:2021-09-28 修回日期:2021-11-28 网络出版时间:2022-03-29 11:38

资助项目:国家自然科学基金(No. 11771064);重庆市科学技术研究重点项目(No. KJZDK202001104);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆市留学人员回国创业创新支持计划(No. cx2020096)

第一作者简介:徐茂杨,女,研究方向为多目标规划,E-mail: xu28093026@163.cn;通信作者:高英,女,教授,博士,E-mail: gaoying@cqnu.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220328.1344.019.html>

$\mathbf{x}^T$ 表示向量 $\mathbf{x}$ 的转置, $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$ 和 $\mathbf{x}^T \mathbf{y}$ 都表示 $\mathbf{R}^n$ 中的向量 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ 与 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ 的内积, 即 $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x}^T \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ 。

在下面的定理和引理中, 假设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空集合, $\varphi: A \rightarrow \mathbf{R}$ 的函数。

定义 1 ^[12] 若对任意的 $\mathbf{x} \in A$, 存在常数 $K > 0$ 和 $\mathbf{x}$ 的邻域 $U(\mathbf{x})$ 使得 $|\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{y})| \leq K \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in U(\mathbf{x})$, 则称 $\varphi(\mathbf{x})$ 在 A 上是局部 Lipschitz 函数。

定义 2 ^[12] 设 φ 在 A 上是局部 Lipschitz 函数, $\bar{\mathbf{x}} \in A, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n$, φ 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处沿方向 $\mathbf{v}$ 的 Clarke 方向导数定义为 $\varphi^\circ(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{v}) = \limsup_{\substack{\mathbf{y} \rightarrow \bar{\mathbf{x}} \\ t \downarrow 0}} \frac{\varphi(\mathbf{y} + t\mathbf{v}) - \varphi(\mathbf{y})}{t}$ 。 φ 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的 Clarke 次微分定义为 $\partial\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid \varphi^\circ(\bar{\mathbf{x}}; \mathbf{v}) \geq \xi^T \mathbf{v}, \forall \mathbf{v} \in \mathbf{R}^n\}$ 。

定义 3 ^[3] 设 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, \mathbf{y}$ 在 A 上的投影定义为 $\text{Proj}_A(\mathbf{y}) = \{\bar{\mathbf{x}} \in A \mid \|\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|, \forall \mathbf{x} \in A\}$ 。 A 在 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的 Proximal 法锥定义为 $N_A^p(\bar{\mathbf{x}}) = \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid \exists (\lambda \geq 0, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n), \text{ s. t. } \bar{\mathbf{x}} \in \text{Proj}_A(\mathbf{y}), \xi = \lambda(\mathbf{y} - \bar{\mathbf{x}})\}$ 。 利用 Proximal 法锥, φ 在点 $\bar{\mathbf{x}} \in A$ 处的 Proximal 次微分定义为 $\partial_P\varphi(\bar{\mathbf{x}}) = \{\xi \in \mathbf{R}^n \mid (\xi, -1) \in N_{\text{epi}\varphi}^p(\bar{\mathbf{x}}, \varphi(\bar{\mathbf{x}}))\}$ 。 其中: $\text{epi}\varphi = \{(\mathbf{x}, \alpha) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid \varphi(\mathbf{x}) \leq \alpha\}$ 。

注 1 设 $\bar{\mathbf{x}} \in \text{cl } A$, 当 A 是凸集时, $N_A^p(\bar{\mathbf{x}}) = N(A, \bar{\mathbf{x}})$ 。 当 A 是非凸集时, 等号不一定成立, 但 $N_A^p(\bar{\mathbf{x}}) \subset N(A, \bar{\mathbf{x}})$, 见例 1。

例 1 设 $A = \{(x, y)^T \in \mathbf{R}^2 \mid y \geq \sqrt{x}, x \geq 0, y \geq \sqrt{-x}, x < 0\}$, 取 $(\bar{x}, \bar{y})^T = (0, 0)^T$, 则:

$$T(A, (\bar{x}, \bar{y})) = \{y \geq 0, x = 0\}, N(A, (\bar{x}, \bar{y})) = \{y \leq 0, x \in \mathbf{R}\}, N_A^p(\bar{x}, \bar{y}) = \{y < 0, x \in \mathbf{R}\}.$$

从而有 $N_A^p(\bar{x}, \bar{y}) \subset N(A, (\bar{x}, \bar{y}))$ 。

定义 4 ^[3] 若存在两个序列 $\{\xi_i\}, \{\mathbf{x}_i\} \subseteq \mathbf{R}^n$ 使得 $\xi_i \in \partial_P\varphi(\bar{\mathbf{x}}_i), \xi_i \rightarrow \xi, \mathbf{x}_i \rightarrow \bar{\mathbf{x}}, \varphi(\mathbf{x}_i) \rightarrow \varphi(\bar{\mathbf{x}})$, 则向量 $\xi \in \mathbf{R}^n$ 是 φ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的极限次微分。 φ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的所有极限次微分的集合用 $\partial_L\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ 表示。

注 2 设 $\bar{\mathbf{x}} \in \text{cl } A$, 由定义可知, $\partial_P\varphi(\bar{\mathbf{x}}) \subset \partial_L\varphi(\bar{\mathbf{x}}) \subset \partial_C\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ 。

例 2 考虑函数 $\varphi(x) = -|x|$, 取 $\bar{x} = 0$, 则 $\partial_P\varphi(\bar{x}) = \emptyset, \partial_L\varphi(\bar{x}) = \{-1, 1\}, \partial_C\varphi(\bar{x}) = [-1, 1]$ 。 从而有:

$$\partial_P\varphi(\bar{x}) \subset \partial_L\varphi(\bar{x}) \subset \partial_C\varphi(\bar{x}),$$

且为真包含。

引理 1 ^[3] 设 φ 为 $\bar{\mathbf{x}} \in A$ 处的局部 Lipschitz 函数, 则 $\partial_L\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ 是闭凸集。

引理 2 ^[15] 设 φ 是局部 Lipschitz 函数, 映射 $\partial_L\varphi(\bar{\mathbf{x}})$ 是外半连续的, 即 $\limsup_{\mathbf{x} \rightarrow \bar{\mathbf{x}}} \partial_L\varphi(\mathbf{x}) \subset \partial_L\varphi(\bar{\mathbf{x}}), \forall \bar{\mathbf{x}} \in \mathbf{R}^n$ 。

引理 3 ^[15] 设 φ 是一个包含在 $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ 的开集上的局部 Lipschitz 函数, 则对 $\mathbf{c} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}], \xi \in \partial_L\varphi(\mathbf{c})$, 有:

$$\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{x}) \leq \langle \xi, \mathbf{y} - \mathbf{x} \rangle.$$

引理 4 ^[3] 设 A 为闭凸集且 $\mathbf{y} \notin A$, 则存在非零向量 $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$ 和常数 α 使得对任意的 $\mathbf{x} \in A$, 有 $\mathbf{p}^T \mathbf{y} > \alpha, \mathbf{p}^T \mathbf{x} \leq \alpha$ 。

定义 5 ^[3] 设 $\bar{\mathbf{x}} \in S$, (SIP) 问题的目标函数 f 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处的下降方向定义为:

$$F^{\bar{\mathbf{x}}} = \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n \mid \exists \delta > 0, \text{ s. t. } f(\bar{\mathbf{x}} + \lambda \mathbf{d}) < f(\bar{\mathbf{x}}), \forall \lambda \in (0, \delta)\}.$$

2 (SIP) 问题的最优性必要条件

本节针对文献[4]中(SIP)问题的 Kuhn-Tucker 型必要条件的错误进行修正。首先, 文献[4]针对(SIP)问题给出了如下最优性必要条件。

引理 5 ^[4] 设 $\bar{\mathbf{x}} \in S, f(\mathbf{x})$ 和 $g_i(\mathbf{x}), i \in I(\bar{\mathbf{x}})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处是局部 Lipschitz 的且 $g_i(\mathbf{x}), i \notin I(\bar{\mathbf{x}})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处连续。 若 $\bar{\mathbf{x}}$ 是(SIP)问题的最优解, 则存在 $\lambda = \lambda_i, i \in I$, 其中 $\lambda_i \geq 0, \lambda_i \neq 0$ 有限个 $i \in I$ 使得:

$$0 \in \partial_L f(\bar{\mathbf{x}}) + \sum_{i \in I(\bar{\mathbf{x}})} \lambda_i \partial_L g_i(\bar{\mathbf{x}}), \quad (1)$$

$$\lambda_i g_i(\bar{\mathbf{x}}) = 0, i \in I.$$

引理 5 的证明主要引用了文献[3]中给出的如下结果。

引理 6 ^[3] 设 $\bar{\mathbf{x}} \in S, f(\mathbf{x})$ 和 $g_i(\mathbf{x}), i \in I(\bar{\mathbf{x}})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处是局部 Lipschitz 的且 $g_j(\mathbf{x}), j \notin I(\bar{\mathbf{x}})$ 在点 $\bar{\mathbf{x}}$ 处连续。 若 $\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n$ 满足 $\eta^T \mathbf{d} < 0, \forall \eta \in \bigcup_{j \in I(\bar{\mathbf{x}})} \partial_L g_j(\bar{\mathbf{x}})$, 则 $\mathbf{d} \in D^{\bar{\mathbf{x}}}$ 。

上面两个引理存在以下两个问题:

1) 当 I 是无限指标集时, 文献[6]通过例子说明引理 6 的证明中 δ 可能为 0, 其中:

$$\delta = \min\{\delta'', \min\{\delta_j\}, \min\{\delta'_j\}\}, \delta'' > 0, \delta_j > 0, j \in I(\bar{x}), \delta'_j > 0, j \notin I(\bar{x}),$$

从而导致引理 6 的证明错误。但该文献并未对该错误进行修正。

2) 文献[5-6]指出当 I 是有限指标集时, 在没有任何条件下, 引理 5 的 Kuhn-Tucker 型必要条件不一定成立。本研究还发现导致引理 5 不一定成立的原因是在引理 5 的证明中, 对任意的 $\eta \in \partial_L f(\bar{x})$ 和 $\eta \in \bigcup_{j \in I(\bar{x})} \partial_L g_j(\bar{x})$ 可能有 $\eta \notin B, B = \{b \in \mathbf{R}^n : \exists \lambda = \lambda_i, i \in I, \text{其中 } \lambda_i \geq 0, \text{有限个 } i \in I, \lambda_i \neq 0, \text{存在 } (d, d_i, i \in I(\bar{x})), \text{s. t. } d \in \partial_L f(\bar{x}), d_i \in \partial_L g_i(\bar{x}) \text{ 且 } b = d + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i d_i\}$ 。

针对 I 是无限的情况, 举例说明引理 5 的 Kuhn-Tucker 型必要条件也不一定成立。

例 3 考虑如下函数:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x + 2|x|, \\ \text{s. t. } g_0(x) &= x^3, \\ g_k(x) &= x^3 - \frac{1}{k}, k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

易知: $S = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 0\}, \bar{x} = 0, I(\bar{x}) = \{0\}, g_0(\bar{x}) = 0, g_k(\bar{x}) = -\frac{1}{k}, \partial_L f(\bar{x}) = -1, \partial_L g_0(\bar{x}) = 0$ 。

要使 $\lambda_0 g_0(\bar{x}) + \lambda_k g_k(\bar{x}) = 0, k = 1, 2, \dots$, 则 $\lambda_0 > 0, \lambda_k = 0$, 从而 $\partial_L f(\bar{x}) + \lambda_0 \partial_L g_0(\bar{x}) = \{-1\}$, 即不存在 λ_0 满足 (1) 式。

为了修正引理 5 的错误, 建立 (SIP) 问题正确的最优性必要条件。首先, 将引理 6 中的可行方向锥 $D^{\bar{x}}$ 改为切锥 $T(S, \bar{x})$, 得到如下结果。

定理 1 设 $\bar{x} \in S, g_j(x), j \in I(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 的且 $g_j(x), j \notin I(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 处连续, 若 $d \in \mathbf{R}^n$ 满足 $\eta^T d < 0, \forall \eta \in \bigcup_{j \in I(\bar{x})} \partial_L g_j(\bar{x})$, 则 $d \in T(S, \bar{x})$ 。

证明 任取 $d \in \mathbf{R}^n$ 满足 $\eta^T d < 0, \forall \eta \in \bigcup_{j \in I(\bar{x})} \partial_L g_j(\bar{x})$, 则由文献[3]中定理 3.1 证明可知, 当 $j \in I(\bar{x})$ 时, 存在 $\delta_j > 0$ 使得 $g_j(\bar{x} + \lambda_j d) < g_j(\bar{x}) = 0, \forall \lambda_j \in (0, \delta_j)$ 。

当 $j \notin I(\bar{x})$ 时, 由 $g_j(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处连续且 $g_j(\bar{x}) < 0$, 则存在 $\delta'_j > 0$ 使得 $g_j(\bar{x} + \lambda_j d) < 0, \forall \lambda_j \in (0, \delta'_j)$ 。令 $\lambda_j = \begin{cases} \frac{\delta_j}{2}, j \in I(\bar{x}) \\ \frac{\delta'_j}{2}, j \notin I(\bar{x}) \end{cases}$, 则有 $g_j(\bar{x} + \lambda_j d) < 0$ 。由 $g_j(x), j \in I$ 在点 $\bar{x}$ 处连续, 则对任意序列 $\{d_j\} \subseteq \mathbf{R}^n$ 使得 $d_j \rightarrow d (j \rightarrow \infty)$ 有 $g_j(\bar{x} + \lambda_j d_j) < 0$ 。这表明存在趋于零的数列 $\{\frac{\lambda_j}{j}\}$, 满足 $\bar{x} + \frac{\lambda_j}{j} d_j \in S$, 从而 $d \in T(S, \bar{x})$ 。证毕

下面举例说明定理 1 成立, 但引理 6 不成立。

例 4 考虑如下函数:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x, \\ \text{s. t. } g_n(x) &= e^{-nx} - 1, n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

易知 $S = \{x \in \mathbf{R} : x \geq 0\}, \bar{x} = 0, I(\bar{x}) = \{1, 2, \dots\}, \bigcup_{n \in I(\bar{x})} \partial_L g_n(\bar{x}) = \{-1, -2, \dots\}$ 。

对任意 $\eta \in \bigcup_{n \in I(\bar{x})} \partial_L g_n(\bar{x})$, 有 $\eta^T d < 0$, 这表明 $d > 0$ 。从而对任意 $d > 0$, 存在 $\delta_n = \frac{1}{n} > 0$ 有 $\bar{x} + \lambda_n d \in S, \forall \lambda_n \in (0, \delta_n)$, 且 $\delta = \inf \delta_n = 0$, 即不存在 $\lambda \in (0, \delta)$ 使得 $d \notin D^{\bar{x}}$ 。但可找到序列 $\{d_n\}, d_n \rightarrow d (n \rightarrow \infty)$, 当 $\lambda_n = \frac{\delta_n}{2}$ 时, 有 $\lambda_n \downarrow 0, \bar{x} + \lambda_n d_n \in S$, 则 $d \in T(S, \bar{x})$ 。

由文献[14]中定理 3.2.1 的证明可得到以下结论。

定理 2 设 $\bar{x}$ 是 (SIP) 问题的最优解, 则 $F^{\bar{x}} \cap T(S, \bar{x}) = \emptyset$ 。

推论 1 设 $\bar{x}$ 是 (SIP) 问题的最优解和 $D = \{d \in \mathbf{R}^n : \eta^T d < 0, \forall \eta \in \bigcup_{j \in I(\bar{x})} \partial_L g_j(\bar{x})\}$, 则 $F^{\bar{x}} \cap D = \emptyset$ 。

文献[5]举例说明了引理 5 的 Fritz John 型必要条件不成立, 但本文发现该举例存在计算错误。事实上, 对于 (SIP) 问题的 Fritz John 型必要条件是成立的, 见如下结果。

定理 3 设 $\bar{x} \in S, g_i(x), i \in I(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 函数且 $g_i(x), i \notin I(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 处连续。若 $\bar{x}$ 是 (SIP)

问题的最优解,则存在不全为 0 的非负数 $\alpha, \lambda_i, i \in I$ 且 λ_i 中只有有限多个非零数使得:

$$0 \in \alpha \partial_L f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \partial_L g_i(\bar{x}); \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I.$$

证明 令 $F_0^\times = \{d \in \mathbf{R}^n : \eta^\top d < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x})\}, D_0^\times = \{d \in \mathbf{R}^n : \eta^\top d < 0, \forall \eta \in \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial_L g_i(\bar{x})\}$ 。因为 $\bar{x}$ 是 (SIP) 问题的最优解,由定理 2 可知 $F^\times \cap T(S, \bar{x}) = \emptyset$ 。再由推论 1 知 $F_0^\times \cap D_0^\times = \emptyset$ 。

不妨令 $B = \{b \in \mathbf{R}^n : \text{存在不全为 0 的非负数 } \alpha, \lambda_i, i \in I, \text{ 且 } \lambda_i \text{ 中只有有限多个非零数}, (b_0, b_i, i \in I(\bar{x})), \text{ s. t. } b_0 \in \partial_L f(\bar{x}), b_i \in \partial_L g_i(\bar{x}) \text{ 且 } b = b_0 + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i b_i\}$, 由引理 1 可知集合 B 是闭凸集。令 $\lambda_i \geq 0, i \in I(\bar{x}), \lambda_i = 0, i \notin I(\bar{x})$, 则 $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I$ 。假设 $0 \notin B$, 由引理 4 知, 存在一个非零向量 $p \in \mathbf{R}^n$ 和常数 α , 使得 $p^\top(0) > \alpha$ 且 $p^\top b \leq \alpha, \forall b \in B$, 从而 $p^\top b \leq 0, \forall b \in B$ 。

若对任意的 $\eta \in \partial_L f(\bar{x})$ 和 $\eta \in \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial_L g_i(\bar{x})$ 有 $\eta \in B$, 从而 $p^\top \eta < 0$ 。因此 $p \in F_0^\times \cap D_0^\times$ 。这与 $F_0^\times \cap D_0^\times = \emptyset$ 矛盾, 故 $0 \in B$ 。证毕

虽然例 3 中 (SIP) 问题的 Kuhn-Tucker 型必要条件不成立, 但当 $\alpha = 0, \lambda_0 > 0, \lambda_k = 0, k = 1, 2, \dots$ 时, 显然有 $0 \in \alpha \partial_L f(\bar{x}) + \lambda_0 \partial_L g_0(\bar{x})$, 这表明 (SIP) 问题的 Fritz-John 型必要条件成立。

3 带有抽象集约束的半无限优化问题的必要条件

本节在 (SIP) 问题基础上加一个抽象集约束, 即 $S = \{x \in X : g_i(x) \leq 0, i \in I\}$, 其中 $X \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空凸集。

首先在文献[12]中给出的广义 Abadie 约束品性的基础上, 针对带有抽象集约束的半无限优化问题引进约束品性。

定义 6 若 $(Z(\bar{x}) \cap \text{ri } X) - \{\bar{x}\} \subset T(S, \bar{x})$, 则称函数 g 在 $\bar{x} \in S$ 处满足广义 Abadie 约束品性, 其中 $Z(\bar{x}) = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$, $\text{ri } X$ 表示 X 的相对内部, 即:

$$\text{ri } X = \{x \in \text{aff } X : \exists \epsilon > 0, (x + \epsilon B) \cap (\text{aff } X) \subset X\},$$

B 是 $\mathbf{R}^n$ 中的闭单位球。

下面给出满足广义 Abadie 约束品性的带有抽象集约束的半无限优化问题。

例 5 考虑如下函数:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= x, \\ \text{s. t. } g_k(x) &= \log_{\frac{1}{k}} x, k = 2, 3, \dots \\ x &\in X = [1, +\infty). \end{aligned}$$

易知 $S = X, \bar{x} = 1, I(\bar{x}) = \{2, 3, 4, \dots\}$, 从而 $Z(\bar{x}) = [1, +\infty), \text{ri } X = (1, +\infty), T(S, \bar{x}) = [1, +\infty)$, 且 $(Z(\bar{x}) \cap \text{ri } X) - \{\bar{x}\} \subset T(S, \bar{x})$ 。这表明该函数在 $\bar{x}$ 处满足广义的 Abadie 约束品性。

下面在广义 Abadie 约束品性条件下给出带有抽象集约束的半无限优化问题的 Kuhn-Tucker 型必要条件, 首先针对文献[13]中给出的择一定理进行推广, 得到如下结果。

定理 4 设 J_1, J_2 为任意指标集, 其中 $J_1 \neq \emptyset, X \subseteq \mathbf{R}^n$ 是非空凸集, $\bar{x} \in X, \{x_i^*\}_{i \in J_1 \cup J_2}$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一簇序列, 则下面的 i) 和 ii) 有且仅有一个成立:

i) $0 \in \text{conv}\{x_i^*, i \in J_1\} + \text{cone}\{x_j^*, j \in J_2\} + N(X, \bar{x})$;

ii) 存在 $x \in \text{ri } X$ 使得对任意的 $x^* \in N(X, \bar{x})$ 和 $\lambda_i \geq 0, \sum_{i \in J_1} \lambda_i = 1$ 有 $\begin{cases} \langle \sum_{i \in J_1} \lambda_i x_i^* + x^*, x \rangle > 0, \forall i \in J_1 \\ \langle x_j^*, x \rangle \geq 0, \forall j \in J_2 \end{cases}$ 。

证明 假设 i) 成立有 $0 \in \text{conv}\{x_i^*, i \in J_1\} + \text{cone}\{x_j^*, j \in J_2\} + N(X, \bar{x})$, 则存在 $x^* \in N(X, \bar{x}), \bar{\lambda}_i \geq 0, \sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i = 1, u_j \geq 0, i \in J_1, j \in J_2$, 有 $\sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i x_i^* + u_j x_j^* + x^* = 0$ 。

对任意 $x \in X$ 有 $\langle \sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i x_i^* + u_j x_j^* + x^*, x \rangle = 0$, 即:

$$\langle \sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i x_i^* + x^*, x \rangle + u_j \langle x_j^*, x \rangle = 0, \forall x \in X. \quad (2)$$

下面证明 ii) 不成立。假设 ii) 成立, 则存在 $x \in \text{ri } X$ 使得对上面的 $x^* \in N(X, \bar{x})$ 和 $\bar{\lambda}_i \geq 0, \sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i = 1, u_j \geq 0$

有 $\begin{cases} \langle \sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i x_i^* + x^*, x \rangle > 0, \forall i \in J_1 \\ \langle x_j^*, x \rangle \geq 0, \forall j \in J_2 \end{cases}$, 从而有 $\langle \sum_{i \in J_1} \bar{\lambda}_i x_i^* + x^*, x \rangle + u_j \langle x_j^*, x \rangle > 0$ 。这与(2)式矛盾, 因此 ii) 无解。

下面证明 ii) 成立时, i) 不成立。

假设 ii) 成立, 则存在 $x \in \text{ri } X$ 使得对任意的 $x^* \in N(X, \bar{x})$ 和 $\lambda_i \geq 0, \sum_{i \in J_1} \lambda_i = 1$ 有:

$$\begin{cases} \langle \sum_{i \in J_1} \lambda_i x_i^* + x^*, x \rangle > 0, \forall i \in J_1 \\ \langle x_j^*, x \rangle \geq 0, \forall j \in J_2 \end{cases}.$$

从而对任意的 $u_j \geq 0, j \in J_2$, 有 $\langle \sum_{i \in J_1} \lambda_i x_i^* + u_j x_j^* + x^*, x \rangle > 0, \forall i \in J_1, j \in J_2$ 。

这表明对上面的 $x \in \text{ri } X, 0 \notin \text{conv}\{x_i^*, i \in J_1\} + \text{cone}\{x_j^*, j \in J_2\} + N(X, \bar{x})$, 故 i) 不成立。证毕

定理 5 设 $X \subseteq \mathbb{R}^n$ 是非空凸集, $\bar{x} \in S$ 是(SIP)问题的最优解, $g_i(x), i \in I(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 处满足广义的 Abadie 约束品性且 $Z(\bar{x}) \cap \text{ri } X \neq \emptyset$, 则存在 $\lambda_i \geq 0, i \in I(\bar{x})$, 使得:

$$0 \in \partial_L f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \partial_L g_i(\bar{x}) + N(X, \bar{x}); \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I(\bar{x}).$$

证明 首先证明系统:

$$\begin{cases} \langle \eta, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x}) \\ \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}) \end{cases}$$

在 $x \in \text{ri } X$ 无解。反证, 假设系统有解, 则存在 $x \in \text{ri } X$ 使得:

$$\begin{cases} \langle \eta, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x}) \\ \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}) \end{cases}.$$

由 $Z(\bar{x}) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x})\}$ 可知, 存在 $x \in Z(\bar{x}) \cap \text{ri } X$ 使得:

$$\langle \eta, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x}).$$

由 $g_i(x), i \in I(\bar{x})$ 在点 $\bar{x}$ 处满足广义的 Abadie 约束品性, 即 $(Z(\bar{x}) \cap \text{ri } X) - \{\bar{x}\} \subset T(S, \bar{x})$ 。故对上面的 $\bar{x}$, 有 $x - \bar{x} \in T(S, \bar{x})$ 使得 $\langle \eta, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x})$ 。

由 $x - \bar{x} \in T(S, \bar{x})$ 和 $T(S, \bar{x})$ 定义知, 存在 $\{t_k\}, t_k \downarrow 0$, 存在 $\{x_k\}, x_k - \bar{x} \rightarrow x - \bar{x}, k \in N$, 使得:

$$\bar{x} + t_k(x_k - \bar{x}) \in S.$$

再由引理 3 可知, 对任意的 $k \in N$, 存在 $u_k \in (\bar{x}, \bar{x} + t_k(x_k - \bar{x})), \eta_k \in \partial_L f(u_k)$, 使得:

$$f(\bar{x} + t_k(x_k - \bar{x})) - f(\bar{x}) \leq t_k \langle \eta_k, x_k - \bar{x} \rangle.$$

又因 $f(x)$ 在点 $\bar{x}$ 处是局部 Lipschitz 函数, 则序列 $\{\eta_k\}$ 有界, 从而序列 $\{\eta_k\}$ 存在收敛子列。不妨设 $\{\eta_k\}$ 收敛, 有 $\eta_k \rightarrow \eta_0$ 。根据引理 2 知, $\eta_0 \in \partial_L f(\bar{x})$ 。因此对于 $t_k > 0$, 由 $\langle \eta_0, x - \bar{x} \rangle < 0$ 得出:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(\bar{x} + t_k(x_k - \bar{x})) - f(\bar{x})] \leq \lim_{k \rightarrow \infty} [t_k \langle \eta_k, x_k - \bar{x} \rangle] = \langle \eta_0, x - \bar{x} \rangle < 0,$$

当 k 充分大时, 有 $f(\bar{x} + t_k(x_k - \bar{x})) < f(\bar{x})$ 。

这与 $\bar{x} \in S$ 是(SIP)问题的最优解矛盾, 故系统

$$\begin{cases} \langle \eta, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x}) \\ \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}) \end{cases} \quad (3)$$

在 $x \in \text{ri } X$ 无解。从而系统

$$\begin{cases} \langle \eta + d, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x}), d \in N(X, \bar{x}) \\ \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}) \end{cases} \quad (4)$$

在 $x \in \text{ri } X$ 无解。假设系统(4)有解, 则存在 $x \in \text{ri } X$ 使得:

$$\begin{cases} \langle \eta + d, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x}), d \in N(X, \bar{x}) \\ \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}) \end{cases}.$$

取 $d = 0$ 时, 则存在 $x \in \text{ri } X$ 使得:

$$\begin{cases} \langle \eta, x - \bar{x} \rangle < 0, \forall \eta \in \partial_L f(\bar{x}) \\ \langle \xi_i, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \forall \xi_i \in \partial_L g_i(\bar{x}), i \in I(\bar{x}) \end{cases}^\circ$$

这与系统(3)矛盾,故系统(4)无解。根据定理 4 知,存在 $\lambda_i \geq 0, i \in I(\bar{x})$ 使得:

$$0 \in \partial_L f(\bar{x}) + \sum_{i \in I(\bar{x})} \lambda_i \partial_L g_i(\bar{x}) + N(X, \bar{x}); \lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i \in I(\bar{x}). \quad \text{证毕}$$

例 3 说明(SIP)问题的 Fritz-John 型必要条件成立,但 Kuhn-Tucker 型必要条件不成立的原因是该例子不满足广义的 Abadie 约束品性。

例 6 由例 3 可知, $S = (-\infty, 0], \bar{x} = 0, I(\bar{x}) = \{0\}$, 取 $\lambda_0 = 1, \partial_L f(\bar{x}) + \lambda_0 \partial_L g_0(\bar{x}) = \{-1\}$, 当 $X = \mathbf{R}$ 时, $Z(\bar{x}) = \mathbf{R}, \text{ri} X = \mathbf{R}, T(S, \bar{x}) = (-\infty, 0]$, 则 $g_0(\bar{x})$ 不满足广义的 Abadie 约束品性。

下面举例说明带有抽象集约束的半无限优化问题的 Kuhn-Tucker 型必要条件成立。

例 7 由例 5 知,该函数满足广义的 Abadie 约束品性且 $\bar{x} = 1$, 则 $\partial_L f(\bar{x}) = 1, \partial_L g_k(\bar{x}) = -\frac{1}{\ln k}, k = 2, 3, 4, \dots, N(X, \bar{x}) = (-\infty, 0]$, 有 $0 \in \partial_L f(\bar{x}) + \sum_{k \in I(\bar{x})} \lambda_k \partial_L g_k(\bar{x}) + N(X, \bar{x})$ 。

参考文献:

- [1] LÓPEZ M, STILL G. Semi-infinite programming[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 180(2): 491-518.
- [2] GOBERNA M A, LÓPEZ M A. Linear semi-infinite optimization[M]. New York: John Wiley & Sons, 1998.
- [3] SOLEIMANI-DAMANEH M, JAHANSHAHLOO G R. Nonsmooth multiobjective optimization using limiting subdifferentials[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 328(1): 281-286.
- [4] MISHRA S K, JAISWAL M, le THI H A. Nonsmooth semi-infinite programming problem using limiting subdifferentials[J]. Journal of Global Optimization, 2012, 53(2): 285-296.
- [5] KANZI N. Two constraint qualifications for non-differentiable semi-infinite programming problems using Fréchet and Mordukhovich subdifferentials[J]. Journal of Mathematical Extension, 2014, 8(2): 83-94.
- [6] GADHI N A. Necessary optimality conditions for a nonsmooth semi-infinite programming problem[J]. Journal of Global Optimization, 2019, 74: 161-168.
- [7] KANZI N, NOBAKHTEIAN S. Optimality conditions for non-smooth semi-infinite programming[J]. Optimization, 2010, 59(5): 717-727.
- [8] KANZI N. Necessary optimality conditions for nonsmooth semi-infinite programming problems[J]. Journal of Global Optimization, 2011, 49(4): 713-725.
- [9] 陈荣波, 谢静. 一类带抽象集的半无限单目标规划的最优性必要条件[J]. 江苏师范大学学报(自然科学版), 2017, 35(2): 46-48.
CHEN R B, XIE J. Necessary optimality condition for a class of semi-infinite single objective programming with abstract sets[J]. Journal of Jiangsu Normal University (Natural Science Edition), 2017, 35(2): 46-48.
- [10] 刘娟, 龙宪军. 非光滑多目标半无限规划问题的混合型对偶[J]. 应用数学和力学, 2021, 42(6): 595-601.
LIU J, LONG X J. Mixed type duality of nonsmooth multiobjective semi-infinite programming problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2021, 42(6): 595-601.
- [11] 王荣波, 张庆祥, 冯强. 一类非光滑多目标半无限规划的混合型对偶[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2011, 34(4): 471-474.
WANG R B, ZHANG Q X, FENG Q. Mixed type duality for a class of nonsmooth multiobjective semi-infinite programming[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2011, 34(4): 471-474.
- [12] 高英. 一类不可微广义分式规划的最优性条件和对偶[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2007.
GAO Y. Optimality conditions and duality for a class of nondifferentiable generalized fractional programming[D]. Hohhot: Inner Mongolia University, 2007.
- [13] ASADI M B, SOLEIMANI-DAMANEH M. Infinite alternative theorems and nonsmooth constraint qualification conditions[J]. Set-Valued and Variational Analysis, 2012, 20(4): 551-566.
- [14] 卢厚佐. 多目标分式规划问题的最优性条件和对偶[D]. 重庆: 重庆师范大学, 2015.
LU H Z. Optimality conditions and duality for multiobjective fractional programming problems[D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2015.
- [15] 刘金杰. 广义微分下多目标优化问题最优性条件研究[D]. 重庆: 重庆师范大学, 2016.

LIU J J. Study on optimality for multiobjective programming problem with generalized subdifferential[D]. Chongqing: Chongqing Normal University, 2016.

[16] 陈武星, 张圣贵. 关于 preinvex 函数和 pseudoinvex 函数[J]. 漳州师范学院学报(自然科学版), 2005(3): 1-7.

CHEN W X, ZHANG S G. On preinvex functions and pseudoinvex functions[J]. Journal of Zhangzhou Teachers College (Natural Science), 2005(3): 1-7.

Operations Research and Cybernetics

Necessary Conditions of Nonsmooth Semi-Infinite Programming

XU Maoyang, GAO Ying

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] To study the necessary optimality conditions of nonsmooth semi-infinite optimization problem under limiting subdifferential. [Methods] The Kuhn-Tucker-type necessary condition for nonsmooth semi-infinite optimization problems with abstract set constraint is studied by using constraint qualification condition and alternative theorem. [Findings] First, examples are given to illustrate the errors in the necessary conditions of nonsmooth semi-infinite optimization problem in the existing literature, and reasonable corrections are given. Then, aiming at the semi-infinite optimization problem, a class of constraint qualification condition is given. The Kuhn-Tucker type necessary condition for nonsmooth semi-infinite optimization problems with abstract set constraint is obtained by using an alternative theorem. [Conclusions] The results obtained are of great significance to the semi-infinite optimization theory.

Keywords: semi-infinite programming; limiting subdifferential; constraint qualification condition; necessary optimality condition

(责任编辑 黄 颖)