

Fisher 市场均衡问题的新全牛顿步可行内点算法^{*}

杨绮丽¹, 迟晓妮², 张所滨³, 万仲平⁴

(1. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院 广西密码学与信息安全重点实验室;

2. 桂林电子科技大学 数学与计算科学学院 广西自动检测技术与仪器重点实验室;

3. 桂林电子科技大学 科学技术发展研究院, 广西 桂林 541004; 4. 武汉大学 数学与统计学院, 武汉 430072)

摘要:【目的】基于光滑中心路径的等价变换,提出一种新的求解 Fisher 市场均衡问题的线性权互补(Weighted linear complementarity problem, WLCP)模型的全牛顿步可行内点算法。【方法】扰动 WLCP,构造光滑中心路径的新代数等价形式,运用牛顿法得到新搜索方向,从而提出求解 Fisher 市场均衡问题的全牛顿步可行内点算法。【结果】算法采用全牛顿步避免线搜索,提高计算效率,且具有可行性和多项式复杂度。【结论】初步数值结果表明算法有效。

关键词: Fisher 市场均衡问题;线性权互补;内点算法;中心路径;全牛顿步

中图分类号:O221

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)02-0015-07

权互补问题^[1](Weighted complementarity problem, WCP)是指在一个流形和一个锥的交集中找到一个向量对,使得它们在某一代数中的乘积等于给定的权向量。当权向量等于零向量时,WCP退化为互补问题^[2](Complementarity problem, CP)。经济学、动力学和大气化学等领域的许多优化问题均可转化为 WCP。如 Potra^[1]证得 Fisher 市场均衡问题^[3]可简化为斜对称的线性权互补问题(Weighted linear complementarity problem, WLCP)。此外,他将 Anstreicher^[4]提出的线性规划和权中心(Linear programming and weighted centering, LPWC)问题的概念推广到二次规划和权中心(Quadratic programming and weighted centering, QPWC)问题,证明了 QPWC 及它的对偶问题可表述为一个特殊的单调 WLCP。值得注意的是,当这些优化问题既可建立互补模型又可建立权互补模型时,后者可能导致更高效的算法求解问题。如 Potra^[1]提出的求解 Fisher 市场均衡问题的 WLCP 模型的两种内点算法,都比建立非线性互补模型求解 Fisher 市场均衡问题有效。然而与 CP 相比,WCP 因存在非零权向量而更加复杂,由此引起的研究难度增加使得目前关于 WCP 的文献尚不多见^[5-8]。

全牛顿步内点算法是求解优化问题的一种有效算法^[9-10],它无需经过线搜索更新迭代,节省计算工作量和时间,且具有多项式迭代复杂度。如 Mansouri 等人^[11]提出了具有多项式复杂度的全牛顿步不可行内点算法求解单调线性互补问题(Linear complementarity problem, LCP)。Asadi 等人^[12]运用 Darvay^[13]的中心路径代数等价变换,提出了求解具有 $P_*(\kappa)$ 的水平 LCP 的全牛顿步可行内点算法。Lesaja 等人^[14]给出了一种求解充分水平 LCP 的全牛顿步不可行内点算法,并证得该算法生成的迭代序列具有超线性收敛速度。

本文将全牛顿步可行内点算法推广应用求解 Fisher 市场均衡问题的 WLCP。通过扰动 WLCP,定义光滑中心路径的新代数等价形式,得到新牛顿搜索方向,提出全牛顿步可行内点算法求解 Fisher 市场均衡问题的线性权互补模型,并证明全牛顿步可行内点算法求解 WLCP 具有多项式复杂度。最后数值算例验证算法的有效性。

1 预备知识

Fisher 市场均衡问题中的参与者可分为两类:消费者和生产者。消费者 i 用持有的预算 ω_i 购买生产者 j 的

^{*} 收稿日期:2021-04-23 修回日期:2022-03-15 网络出版时间:2022-03-29 10:00

资助项目:国家自然科学基金(No. 11861026;No. 11871383);广西自然科学基金(No. 2021GXNSFAA220034);广西密码学与信息安全重点实验室研究课题(No. GCIS201819);广西自动检测技术与仪器重点实验室基金(No. YQ18112)

第一作者简介:杨绮丽,女,研究方向为优化理论及应用,E-mail:vanessaqly@126.com;通信作者:迟晓妮,女,教授,博士,E-mail:chixiaoni@126.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220328.1408.031.html

产品以达到个人效用 u_i 最大化;而生产者 j 则通过售出产品获得金钱。价格均衡是指对商品进行适当定价可使消费者购得最多商品的同时达到市场出清,即市场中所有的钱都花完,所有的商品都卖完。令 u_{ij} 表示消费者 i 从生产者 j 手中购买商品所获得的效用系数, x_{ij} 表示消费者 i 在生产者 j 处购买的商品数量, $u_i = \sum_{j=1}^{n_p} u_{ij} x_{ij}$ 表示消费者 i 的个人效用函数。Eisenberg 和 Gale^[15] 证得 Fisher 市场均衡问题在一定假设条件下可建立为如下凸优化模型:

$$\begin{aligned} & \max_{u_i, x_{ij}} \sum_{i=1}^{n_c} \omega_i \log u_i, \\ & \text{s. t. } \sum_{i=1}^{n_c} x_{ij} = 1, j = 1, 2, \dots, n_p, \\ & u_i - \sum_{j=1}^{n_p} u_{ij} x_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, n_c, \\ & u_i \geq 0, x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \dots, n_c, j = 1, 2, \dots, n_p. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: n_c, n_p 分别表示消费者人数和生产者人数。通过求解模型的前 n_p 个等式约束的最优拉格朗日乘子可得市场出清价格。该凸优化模型(1)可简写为:

$$\begin{aligned} & \max_x \sum_{i=1}^n \omega_i \log x_i \\ & \text{s. t. } \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (2)$$

其中: $\mathbf{b} = (\mathbf{e}; \mathbf{0}) \in \mathbf{R}^m, \mathbf{e} = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \in \mathbf{R}^{n_p}, \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{e}_1^T & \mathbf{e}_1^T & \dots & \mathbf{e}_1^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{e}_2^T & \mathbf{e}_2^T & \dots & \mathbf{e}_2^T \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{e}_{n_p}^T & \mathbf{e}_{n_p}^T & \dots & \mathbf{e}_{n_p}^T \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{a}_1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{a}_2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{a}_{n_c} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为具有特殊形

式的行满秩矩阵且 $\mathbf{e}_i = (1 \ 1 \ \dots \ 1) \in \mathbf{R}^{n_p}, \mathbf{a}_i = -(u_{i1} \ u_{i2} \ \dots \ u_{in_p}) \in \mathbf{R}^{n_p}, i = 1, 2, \dots, n_c$ 。

本文考虑 Fisher 市场均衡问题的一般形式,即 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ 为任意行满秩矩阵的情形。一般 Fisher 市场均衡问题可转化为 WLCP 模型^[1,3]:

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{s} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0}. \\ \mathbf{xs} = \boldsymbol{\omega} \end{cases} \quad (3)$$

其中: $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}_+^n$ 为给定的权向量, $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ 。定义 WLCP 模型(3)所有严格可行点构成的集合为:

$$F^0 = \{(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}) \in \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}_{++}^n \times \mathbf{R}^m \mid \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{s} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}\}.$$

2 Fisher 市场均衡问题的 WLCP 模型的全牛顿步可行内点算法

下面通过构造光滑中心路径新的等价形式,运用牛顿法得到新搜索方向,从而提出一种新的求解 Fisher 市场均衡问题的全牛顿步可行内点算法。

2.1 光滑中心路径

令 $\boldsymbol{\omega} > \mathbf{0}$, 下给出 WLCP 模型(3)的光滑中心路径。首先,选取一个严格可行初始点 $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \mathbf{y}^0) \in F^0$ 。令

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (1-t)\boldsymbol{\omega} + t\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0, t \in (0, t_0], t_0 = 1. \quad (4)$$

定义 WLCP 模型(3)的光滑中心路径为满足

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{s} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}, \mathbf{s} \geq \mathbf{0} \\ \mathbf{xs} = \boldsymbol{\omega}(t) \end{cases} \quad (5)$$

的所有点集 $\{(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}; t) \mid t \in (0, 1]\}$ 。显然, $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \mathbf{y}^0; t_0)$ 属于中心路径, 且当 $t \rightarrow 0$ 时中心路径收敛到(3)式的解。

2.2 搜索方向

设当前迭代点为 $(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y})$, 求解方程组:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \Delta\mathbf{s} - \mathbf{A}^T \Delta\mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{s}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s} = \boldsymbol{\omega}(t) - \mathbf{xs} \end{cases}, \quad (6)$$

得牛顿搜索方向 $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}, \Delta\mathbf{y})$ 。因为 $\mathbf{A}$ 是行满秩矩阵, 当 $\mathbf{x} > \mathbf{0}, \mathbf{s} > \mathbf{0}$ 时方程组(6)的系数矩阵非奇异, 因此搜索方向 $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}, \Delta\mathbf{y})$ 存在且唯一。经过一次全牛顿步后得新迭代点 $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mathbf{y}^+) = (\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}, \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y})$ 。令:

$$\mathbf{v} = \mathbf{xs}, \mathbf{d} = \sqrt{\mathbf{xs}^{-1}}, \mathbf{d}_x = \mathbf{d}^{-1} \Delta\mathbf{x}, \mathbf{d}_s = \mathbf{d} \Delta\mathbf{s}, \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \text{diag}(\mathbf{d}), \quad (7)$$

则有:

$$\mathbf{s}\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}\Delta\mathbf{s} = \mathbf{xs} \left(\frac{\Delta\mathbf{x}}{\mathbf{x}} + \frac{\Delta\mathbf{s}}{\mathbf{s}} \right) = \sqrt{\mathbf{v}} (\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s) = \sqrt{\mathbf{v}} \left(\frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{\sqrt{\mathbf{v}}} - \sqrt{\mathbf{v}} \right), \quad (8)$$

$$\Delta\mathbf{x}\Delta\mathbf{s} = \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s. \quad (9)$$

故方程组(6)转化为:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{A}} \mathbf{d}_x = \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_s - \bar{\mathbf{A}}^T \Delta\mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s = \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{\sqrt{\mathbf{v}}} - \sqrt{\mathbf{v}} \end{cases}. \quad (10)$$

定义邻近测度:

$$\delta(\mathbf{v}; t) := \delta(\mathbf{x}, \mathbf{s}; t) = \frac{1}{2} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{\sqrt{\mathbf{v}}} - \sqrt{\mathbf{v}} \right\|, \quad (11)$$

度量当前迭代点 $(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y})$ 到中心路径的距离。显然, $\delta(\mathbf{v}; t) = 0 \Leftrightarrow \frac{\boldsymbol{\omega}(t)}{\sqrt{\mathbf{v}}} = \sqrt{\mathbf{v}} \Leftrightarrow \mathbf{xs} = \boldsymbol{\omega}(t)$ 。此时, $\mathbf{x}, \mathbf{s}$ 亦满足 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, $\mathbf{s} - \mathbf{A}^T \mathbf{y} = \mathbf{0}$ 。故当 $t \rightarrow 0$ 时得 WLCP 模型(3)的解。

引理 1^[16] 若向量 $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^n$ 且 $\mathbf{p}^T \mathbf{q} = 0$, 则 $\|\mathbf{pq}\|_\infty \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$, $\|\mathbf{pq}\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \|\mathbf{p} + \mathbf{q}\|^2$ 。

根据方程组(10)的前两个式子易知 $\mathbf{d}_x^T \mathbf{d}_s = 0$, 故结合引理 1 和(11)式得:

$$\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\|_\infty \leq \frac{1}{4} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^2 = \delta^2(\mathbf{v}; t), \quad (12)$$

$$\|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\| \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \|\mathbf{d}_x + \mathbf{d}_s\|^2 = \sqrt{2} \delta^2(\mathbf{v}; t). \quad (13)$$

2.3 Fisher 市场均衡问题的新全牛顿步可行内点算法

下面给出一种新的全牛顿步可行内点算法求解 Fisher 市场均衡问题的 WLCP 模型(3)。

给定精度参数 $\epsilon > 0$, 令 $t = 1$, 选取严格可行初始点 $(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y}) \in F^0$ 。若 $(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{y})$ 满足停止条件 $\|\mathbf{xs} - \boldsymbol{\omega}\| \leq \epsilon$, 则算法终止, 该初始点即为 WLCP 模型(3)的解; 否则由(7), (10)式求得牛顿搜索方向 $(\Delta\mathbf{x}, \Delta\mathbf{s}, \Delta\mathbf{y})$, 经全牛顿步得到新迭代点 $\mathbf{x}^+ = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}, \mathbf{s}^+ = \mathbf{s} + \Delta\mathbf{s}, \mathbf{y}^+ = \mathbf{y} + \Delta\mathbf{y}$ 。选取适当的更新参数 $\theta \in (0, 1)$, 更新 $t_+ = (1 - \theta)t$, 使得 $\mathbf{x}^+ > \mathbf{0}$, $\mathbf{s}^+ > \mathbf{0}$ 且 $\delta(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+; t_+) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t_+$ 。算法继续迭代直至产生的新迭代点 $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mathbf{y}^+)$ 满足停止条件, 此时 $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mathbf{y}^+)$ 即为 WLCP 模型(3)的 ϵ -近似解。

算法 1 Fisher 市场均衡问题的新全牛顿步可行内点算法

步骤 0: 给定精度参数 $\epsilon > 0$, 权向量 $\boldsymbol{\omega} > \mathbf{0}$ 。选取严格可行初始点 $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \mathbf{y}^0) \in F^0$ 。令 $t_0 = 1, \boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0$ 。置 $k := 0$;

步骤 1: 当 $\|\mathbf{x}^k \mathbf{s}^k - \boldsymbol{\omega}\| \leq \epsilon$ 时算法停止, 得到 WLCP 模型(3)的 ϵ -近似解; 否则转步骤 2;

步骤 2: 求解方程组(10), 并由(7)式得牛顿搜索方向 $(\Delta x^k, \Delta s^k, \Delta y^k)$ 。令新迭代点为:

$$x^{k+1} := x^k + \Delta x^k, s^{k+1} := s^k + \Delta s^k, y^{k+1} := y^k + \Delta y^k.$$

步骤 3: 选取适当的参数 $\theta_k \in (0, 1)$, 更新 $t_{k+1} = (1 - \theta_k)t_k$ 。令 $\omega(t_{k+1}) = (1 - t_{k+1})\omega + t_{k+1}x^0s^0$ 。置 $k := k + 1$ 。转步骤 1。

3 算法可行性

本节分析算法 1 的可行性。

令严格可行初始点 $(x^0, s^0, y^0) \in F^0, \gamma = \min\{\omega, x^0s^0\}$ 。设经过一次全牛顿步后得到的新迭代点为 (x^+, s^+, y^+) 。下面给出 (x^+, s^+, y^+) 严格可行的充分条件。

引理 2 若 $\delta(v; t) < \sqrt{\gamma}$, 则 $x^+ > 0, s^+ > 0$ 。

证明 当 $t \in (0, 1]$ 时, 由(4)式知:

$$\min \omega(t) = \min[(1-t)\omega + tx^0s^0] = \min\{\omega, x^0s^0\} = \gamma. \quad (14)$$

对 $\forall \alpha \in [0, 1]$, 定义 $x(\alpha) = x + \alpha\Delta x, s(\alpha) = s + \alpha\Delta s$ 。故由(7)~(9), (12)和(14)式得:

$$\begin{aligned} x(\alpha)s(\alpha) &= xs + \alpha(x\Delta s + s\Delta x) + \alpha^2\Delta x\Delta s = v + \alpha\sqrt{v}\left(\frac{\omega(t)}{\sqrt{v}} - \sqrt{v}\right) + \alpha^2d_xd_s = \\ (1-\alpha)v + \alpha\omega(t) + \alpha^2d_xd_s &\geq (1-\alpha)v + \alpha\min(\omega(t) - \|d_xd_s\|_\infty e) \geq (1-\alpha)v + \alpha(\gamma - \delta^2(v; t))e. \end{aligned} \quad (15)$$

故若 $\delta(v; t) < \sqrt{\gamma}$, 则 $x(\alpha)s(\alpha) > 0$ 。

因为 $x(\alpha)$ 和 $s(\alpha)$ 线性依赖于 α , 且 $x(0) = x^0 > 0, s(0) = s^0 > 0$, 所以对 $\forall \alpha \in [0, 1]$, 有 $x(\alpha) > 0, s(\alpha) > 0$ 。从而 $x^+ = x(1) > 0, s^+ = s(1) > 0$ 。证毕

令 $v^+ := x^+s^+$ 。下面讨论 t 更新前邻近测度 $\delta(v^+; t)$ 的上界。

引理 3 若 $\delta(v; t) < \sqrt{\gamma}$, 则 $\min \sqrt{v^+} \geq \sqrt{\gamma - \delta^2(v; t)}$ 。

证明 在(15)式中令 $\alpha = 1$ 得:

$$v^+ = x^+s^+ = \omega(t) + d_xd_s \geq \min(\omega(t) - \|d_xd_s\|_\infty e) \geq (\gamma - \delta^2(v; t))e, \quad (16)$$

故 $\min \sqrt{v^+} \geq \sqrt{\gamma - \delta^2(v; t)}$ 。证毕

引理 4 若 $\delta(v; t) < \sqrt{\gamma}$, 则 $\delta(v^+; t) \leq \frac{\sqrt{2}\delta^2(v; t)}{2\sqrt{\gamma - \delta^2(v; t)}}$ 。

证明 由(11), (13)和(16)式及引理 3 得:

$$\delta(v^+; t) = \frac{1}{2} \left\| \frac{\omega(t)}{\sqrt{v^+}} - \sqrt{v^+} \right\| = \frac{1}{2} \left\| \frac{\omega(t) - \omega(t) - d_xd_s}{\sqrt{v^+}} \right\| \leq \frac{\|d_xd_s\|}{2\min \sqrt{v^+}} \leq \frac{\sqrt{2}\delta^2(v; t)}{2\sqrt{\gamma - \delta^2(v; t)}}. \quad \text{证毕}$$

令 $t_+ := (1 - \theta)t, \kappa := \|\omega - x^0s^0\|$ 。下面给出 t 更新后邻近测度 $\delta(v^+; t_+)$ 的上界。

引理 5 若 $\delta(v; t) < \sqrt{\gamma}$, 则 $\delta(v^+; t_+) \leq \frac{\theta\kappa t + \sqrt{2}\delta^2(v; t)}{2\sqrt{\gamma - \delta^2(v; t)}}$ 。

证明 因为 $t_+ = (1 - \theta)t$, 则由(4)式得:

$$\omega(t_+) = [1 - (1 - \theta)t]\omega + (1 - \theta)tx^0s^0 = \omega(t) + \theta(\omega - x^0s^0)t. \quad (17)$$

故根据(11), (17)式, 引理 3 及引理 4 得:

$$\begin{aligned} \delta(v^+; t_+) &= \frac{1}{2} \left\| \frac{\omega(t_+)}{\sqrt{v^+}} - \sqrt{v^+} \right\| \leq \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{\omega(t_+)}{\sqrt{v^+}} - \frac{\omega(t)}{\sqrt{v^+}} \right\| + \left\| \frac{\omega(t)}{\sqrt{v^+}} - \sqrt{v^+} \right\| \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left\| \frac{\theta(\omega - x^0s^0)t}{\sqrt{v^+}} \right\| + \delta(v^+; t) \leq \frac{\theta\kappa t}{2\min \sqrt{v^+}} + \delta(v^+; t) \leq \frac{\theta\kappa t + \sqrt{2}\delta^2(v; t)}{2\sqrt{\gamma - \delta^2(v; t)}}. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

引理 6 令 $\theta \leq \frac{\gamma(\sqrt{2(2-t^2)}-t)}{\sqrt{2}(\kappa + \gamma\sqrt{2-t^2})}$ 。若 $\delta(v; t) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}t$, 则 $\delta(v^+; t_+) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}t_+$ 。

证明 当 $\delta(v; t) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}}t$ 时, 由引理 5 得: $\delta(v^+; t_+) \leq \frac{\theta\kappa t + \sqrt{2}\delta^2(v; t)}{2\sqrt{\gamma - \delta^2(v; t)}} \leq \frac{\theta\kappa t + \frac{\sqrt{2}}{2}\gamma t^2}{2\sqrt{\gamma - \frac{1}{2}\gamma t^2}} = \frac{\sqrt{2}\theta\kappa t + \gamma t^2}{2\sqrt{\gamma(2-t^2)}}.$

因此要使 $\delta(\mathbf{v}^+; t_+) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t_+$, 不妨设 $\frac{\sqrt{2}\theta\kappa t + \gamma t^2}{2\sqrt{\gamma(2-t^2)}} \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t_+$ 。将 $t_+ = (1-\theta)t$ 代入并整理得若 $\delta(\mathbf{v}; t) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t$, 当 $0 < \theta \leq \frac{\gamma(\sqrt{2(2-t^2)} - t)}{\sqrt{2}(\kappa + \gamma\sqrt{2-t^2})}$ 时, $\delta(\mathbf{v}^+; t_+) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t_+$ 成立。证毕

4 多项式复杂度

当 $t \in (0, 1]$ 时, 取:

$$\theta = \frac{\gamma(\sqrt{2(2-t^2)} - t)}{\sqrt{2}(\kappa + \gamma\sqrt{2-t^2})}, \quad (18)$$

其中: $\gamma = \min\{\|\boldsymbol{\omega}, \mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0\|\}, \kappa = \|\boldsymbol{\omega} - \mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0\|$ 。

显然当 $t_0 = 1$ 时, 由(4)式知 $\boldsymbol{\omega}(t_0) = \mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0$, 则 $\delta(\mathbf{v}^0; t_0) = 0 \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t_0$ 。更新 $t_+ = (1-\theta)t$ 。由引理 2 和引理 6

知算法 1 生成的新迭代点 $(\mathbf{x}^+, \mathbf{s}^+, \mathbf{y}^+) \in F^0$, 且满足 $\delta(\mathbf{v}^+; t_+) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t_+$ 。

下面分析算法 1 的多项式迭代复杂度。

引理 7 若 $\delta(\mathbf{v}; t) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t$, 则 $\|\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ - \boldsymbol{\omega}\| \leq \left(\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma t}{2} \right) t$ 。

证明 若 $\delta(\mathbf{v}; t) \leq \sqrt{\frac{\gamma}{2}} t$, 则由(4), (13)和(16)式得:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}^+ \mathbf{s}^+ - \boldsymbol{\omega}\| &= \|\boldsymbol{\omega}(t) + \mathbf{d}_x \mathbf{d}_s - \boldsymbol{\omega}\| \leq \|\boldsymbol{\omega}(t) - \boldsymbol{\omega}\| + \|\mathbf{d}_x \mathbf{d}_s\| \leq \\ &\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| t + \sqrt{2} \delta^2(\mathbf{v}; t) \leq \left(\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma t}{2} \right) t. \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

定理 1 若 WLCP 模型(3)的初始点 $(\mathbf{x}^0, \mathbf{s}^0, \mathbf{y}^0) \in F^0$ 且更新参数 θ , 由(18)式定义, 则算法 1 至多经过

$$\left\lceil \frac{\sqrt{2}(\kappa + \gamma)}{(\sqrt{2} - 1)\gamma} \log \left(\frac{\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma}{2}}{\epsilon} \right) \right\rceil + 1$$

次迭代可得到 WLCP 模型(3)的 ϵ -近似解。

证明 对 $\forall k \geq 2$ 有 $\theta_{k-2} = \frac{\gamma(\sqrt{2(2-t_{k-2}^2)} - t_{k-2})}{\sqrt{2}(\kappa + \gamma\sqrt{2-t_{k-2}^2})} \geq \theta_{\min} = \frac{(\sqrt{2}-1)\gamma}{\sqrt{2}(\kappa + \gamma)}$ 。又 $t_0 = 1, t_{k-1} = (1-\theta_{k-2})t_{k-2}$, 则由引

理 7 得: $\|\mathbf{x}^k \mathbf{s}^k - \boldsymbol{\omega}\| \leq \left(\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma t_{k-1}}{2} \right) t_{k-1} \leq \left(\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma}{2} \right) (1-\theta_{\min})^{k-1} t_0$ 。

要使 $\|\mathbf{x}^k \mathbf{s}^k - \boldsymbol{\omega}\| \leq \epsilon$, 不妨设算法 1 在第 k 次迭代后满足 $\left(\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma}{2} \right) (1-\theta_{\min})^{k-1} \leq \epsilon$, 即:

$$(k-1) \log(1-\theta_{\min}) \leq \log \epsilon - \log \left(\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma}{2} \right).$$

又因为对 $\theta_{\min} \in (0, 1)$ 有 $-\log(1-\theta_{\min}) \geq \theta_{\min}$, 故算法 1 至多经过 $\frac{\sqrt{2}(\kappa + \gamma)}{(\sqrt{2}-1)\gamma} \log \left(\frac{\|\mathbf{x}^0 \mathbf{s}^0 - \boldsymbol{\omega}\| + \frac{\sqrt{2}\gamma}{2}}{\epsilon} \right) + 1$ 次迭

代可得到 WLCP 模型(3)的 ϵ -近似解。证毕

5 数值算例

本节运用 Matlab R2018a 编程, 在 CPU 为 Intel(R) Xeon(R) E3-1226 v3 @3.30 GHz、内存为 4.00 GB、Windows 10 专业版 64 位操作系统的计算机上进行算法 1 的数值实验。

首先, 随机生成行满秩矩阵 $\mathbf{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, 向量 $\mathbf{b} \in \mathbf{R}^m$ 和权向量 $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{R}_{++}^n$ 。再根据 Ye^[3]的方法得到严格可行初

始点 (x^0, s^0, y^0) , 并由(18)式确定更新参数 θ 。记: $\kappa = \|\omega - x^0 s^0\|$, $G = \|x^k s^k - \omega\|$, $\delta = \frac{1}{2} \left\| \frac{\omega(t)}{\sqrt{v}} - \sqrt{v} \right\|$ 。令 $\epsilon = 10^{-5}$, 算法终止条件为 $\|xs - \omega\| \leq \epsilon$ 。

表 1 为算法 1 在不同 κ 值情况下求解不同维数 Fisher 市场均衡问题 20 次结果的平均值, 其中 t 表示算法迭代所需平均时间(单位:s), i 表示算法所需平均迭代次数。当问题维数 m 和 n 一定时, 随着 κ 取值的增大, 算法 1 求解 WLCP 模型(3)所需的运行时间和迭代次数越多。同时, 当 κ 的取值一定时, 算法迭代次数和迭代时间受问题维数影响, 两者均随着问题维数的增大而有所增加。由表 1 知, 算法 1 可有效求解 Fisher 市场均衡问题。

表 1 算法 1 在不同 κ 值下求解 Fisher 市场均衡问题的数值结果

Tab. 1 Numerical results of algorithm 1 for solving the Fisher market equilibrium problems with different κ

m	n	$\kappa \leq 5$		$\kappa \leq 10$		$\kappa \leq 20$	
		t/s	$i/\text{次}$	t/s	$i/\text{次}$	t/s	$i/\text{次}$
4	6	0.004 46	66	0.006 98	119	0.009 44	167
8	20	0.007 48	69	0.013 48	125	0.026 56	184
10	30	0.011 05	73	0.023 95	134	0.060 85	192
20	110	0.058 86	80	0.233 38	167	0.376 48	220
30	240	0.541 93	86	1.749 46	189	5.093 44	253
40	420	3.784 65	93	7.114 12	198	14.383 53	296

例 1 求解 $\mathbf{R}^{4 \times 6}$ 上的一个 Fisher 市场均衡问题, 其中:

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 & -7 & 6 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 6 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 4 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 7 & 0 & -3 & 12 \end{pmatrix}, b = (23 \ 11 \ 42 \ -21)^T, \omega = (5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5 \ 5)^T.$$

取严格可行初始点 $x^0 = (4 \ 1 \ 2 \ 1 \ 2 \ 3)^T$, $s^0 = (2 \ 3 \ 7 \ 3 \ 5 \ 1)^T$, $y^0 = (1 \ 2 \ 2 \ -2)^T$ 。运行算法 1 求得该 Fisher 市场均衡问题的 ϵ -近似解为:

$$x^* = (3.127 \ 7 \ 2.286 \ 1 \ 1.762 \ 5 \ 2.416 \ 8 \ 1.338 \ 0 \ 3.405 \ 4)^T,$$

$$s^* = (1.598 \ 5 \ 2.187 \ 0 \ 2.836 \ 8 \ 2.068 \ 8 \ 3.736 \ 7 \ 1.468 \ 2)^T,$$

$$y^* = (1.032 \ 3 \ 0.476 \ 9 \ 2.320 \ 0 \ -1.439 \ 8)^T.$$

算法所需运行时间为 0.002 39 s, 迭代次数为 49 次。由图 1 可知在求解例 1 过程中, 随着 $t \rightarrow 0$, G 和 δ 值最终均趋向于 0, 从而验证了算法 1 的有效性。

6 总结

本文提出了一种新的全牛顿步可行内点算法求解 Fisher 市场均衡问题的 WLCP。证明了算法在适当参数条件下的可行性, 并得到了求解 Fisher 市场均衡问题的 WLCP 的多项式复杂度。数值算例结果表明算法可有效求解 Fisher 市场均衡问题。将本文提出的内点算法应用于求解其他实际问题的 WCP 模型, 以及如何设计出更高效的算法求解相关实际均衡问题值得进一步研究。

参考文献:

- [1] POTRA F A. Weighted complementarity problems: a new paradigm for computing equilibria[J]. SIAM Journal on Optimization, 2012, 22(4): 1634-1654.
- [2] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海: 上海出版社, 2006.

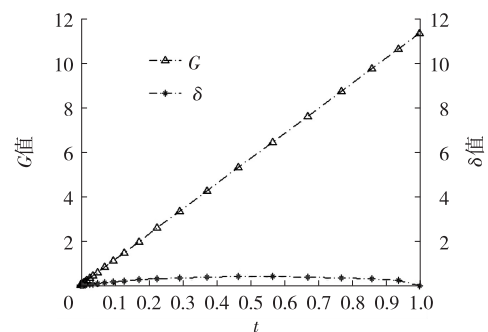


图 1 求解例 1 过程中的 G 和 δ 值

Fig. 1 The values of G and δ in Algorithm 1 for example 1

- HAN J Y, XIU N H, QI H D. Nonlinear complementarity theory and algorithm[M]. Shanghai: Shanghai Press, 2006.
- [3] YE Y Y. A path to the Arrow-Debreu competitive market equilibrium[J]. Mathematical Programming, 2008, 111(1/2): 315-348.
- [4] ANSTREICHER K M. Interior-point algorithm for a generalization of linear programming and weighted centering[J]. Optimization Methods Soft, 2012, 27(4/5): 605-612.
- [5] CHI X N, LIU S Y. An infeasible-interior-point predictor-corrector algorithm for the second-order cone program[J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28B(3): 551-559.
- [6] ASADI S, DARVAY Z, LESAJA G, et al. A full-Newton step interior-point method for monotone weighted linear complementarity problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2020, 186(3): 864-878.
- [7] ZHANG J. A smoothing Newton algorithm for weighted linear complementarity problem[J]. Optimization Letters, 2016, 10(3): 499-509.
- [8] CHI X N, GOWDA M S, TAO J Y. The weighted horizontal linear complementarity problem on a Euclidean Jordan algebra[J]. Journal of Global Optimization, 2019, 73(1): 153-169.
- [9] WANG G Q, BAI Y Q. A class of polynomial interior point algorithms for the Cartesian P -matrix linear complementarity problem over symmetric cones[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2012, 152(3): 739-772.
- [10] WANG G Q. A new polynomial interior-point algorithm for the monotone linear complementarity problem over symmetric cones with full NT-steps[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2012, 29(2): 1-20.
- [11] MANSOURI H, ZANGIABADI M, PIRHAJI M. A full-Newton step $O(n)$ infeasible interior-point algorithm for linear complementarity problems[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2011, 12(1): 545-561.
- [12] ASADI S, MANSOURI H. Polynomial interior-point algorithm for $P_*(\kappa)$ horizontal linear complementarity problems[J]. Numerical Algorithm, 2013, 63(2): 385-398.
- [13] DARVAY Z. New interior-point algorithm in linear programming[J]. Advanced Modeling and Optimization, 2003, 5(1): 51-92.
- [14] LESAJA G, POTRA F A. Adaptive full Newton-step infeasible interior-point method for sufficient horizontal LCP[J]. Optimization Methods Software, 2018, 34(5): 1014-1034.
- [15] EISENBERG E, GALE D. Consensus of subjective probabilities: the parimutuel method[J]. The Annals of Statistics, 1959, 30(1): 165-168.
- [16] ROOS C, TEERLAKY T, VIAL J P. Theory and algorithm for linear optimization—an interior point approach[M]. New York: John Wiley, 1997.

Operations Research and Cybernetics

A New Full-Newton Step Feasible Interior-Point Algorithm for Solving the Fisher Market Equilibrium Problem

YANG Qili¹, CHI Xiaoni², ZHANG Suobin³, WAN Zhongping⁴

- (1. Guangxi Key Laboratory of Cryptography and Information Security, School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology; 2. Guangxi Key Laboratory of Automatic Detection Technology and Instruments, School of Mathematics and Computing Science, Guilin University of Electronic Technology;
3. Institute of Scientific Research and Development, Guilin University of Electronic Technology, Guilin Guangxi 541004;
4. School of Mathematics and Statistics, Wuhan University, Wuhan 430072, China)

Abstract: [Purposes] Based on the equivalent transformation of smooth central path, a new full-Newton step feasible interior-point algorithm is presented to solve the weighted linear complementarity model of the Fisher market equilibrium problem. [Methods] By perturbing WLCP, the new algebraic equivalent transformation of smooth central path is constructed, and a new search direction by Newton's method is obtained. Then a full-Newton step feasible interior-point algorithm for solving the Fisher market equilibrium problem is proposed. [Findings] The algorithm uses the full-Newton steps to avoid linear search and improve computational efficiency. It shows the feasibility and polynomial complexity of the algorithm. [Conclusions] Preliminary numerical results indicate that the algorithm is effective.

Keywords: Fisher market equilibrium problem; weighted linear complementarity; interior-point algorithm; central path; full-Newton step