

求解最优潮流全局最优解的二阶半定规划方法^{*}

柳影¹, 田君杨², 李佩杰³, 黄超²

(1. 广西农业职业技术大学 信息与机电工程系, 南宁 530005; 2. 广西电网电力调度控制中心, 南宁 530023;

3. 广西电力系统最优化与节能技术重点实验室(广西大学), 南宁 530004)

摘要:【目的】半定规划凸松弛方法是求取电力系统最优潮流(Optimal power flow, OPF)问题全局最优解的有效技术手段,但解的秩为1的条件难以满足,导致应用具有一定的局限性。针对这一求解困境,提出了一种新的半定规划凸松弛方法。【方法】基于变量扩展,将原变量对应的二阶单项式扩展为新的变量,扩展后可构造一阶及二阶的半正定扩展矩阵,在此基础上将不等式约束转化为矩阵不等式约束,从而形成二阶半定规划凸松弛模型。【结果】为验证所提方法的有效性,求解了常规半定规划方法应用失败的一些反例,结果表明:二阶半定规划松弛模型能更可靠地求得秩为1的扩展矩阵,从而直接获得原OPF问题精确的全局最优解。【结论】二阶半定规划松弛方法为电力系统OPF问题提供了一种更可靠的全局最优算法,具有更好的应用前景。

关键词:最优潮流;半定规划;凸松弛;全局最优

中图分类号:O224;TM73

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)02-0022-09

电力系统最优潮流(Optimal power flow, OPF)综合考虑电网安全性和经济性,已成为电网运行及规划不可缺少的分析工具。该问题的数学模型属于非凸非线性规划问题,精确求解困难。内点算法在最优潮流问题求解的收敛性和效率方面的应用研究取得了较大进展^[1],受到广泛关注。多种组合算法及新型改进算法也相继被提出,比如内点割平面法^[2]、半光滑牛顿法^[3]、奔德斯分解算法^[4]、交替方向乘法^[5]等,以应对最优潮流问题的各种目标和约束。但如何精确求取最优潮流问题的全局最优解,避免陷入局部最优^[6],仍是困扰学术界的一大难题。

对于非凸优化问题,若能采用凸松弛进行有效逼近,则可求得问题的全局最优解^[7-8]。近些年来,半定规划(Semi-definite programming, SDP)凸松弛方法已成为电力系统优化计算的研究热点。文献[9-10]率先将SDP方法用于求解{0,1}-经济调度和水火联合调度问题。文献[11]首次将SDP方法引入OPF问题的求解,文献[12-15]进一步求解了各种模型的OPF问题。该SDP松弛将矢量变量 $\mathbf{x}$ 转化为矩阵变量 $\mathbf{X}(\mathbf{x}\mathbf{x}^T)$,当求得SDP松弛问题最优解的秩为1时,才能确定原问题的解。但该方法在求解时一般将 $\mathbf{X}$ 的秩为1的条件(以下简称“秩1条件”)松弛为一个半定约束,因此存在最优解的秩不为1的问题,从而难以确定原问题的解。为此,文献[16]通过增加秩约束可获得低秩的矩阵解。文献[17]建立OPF问题的对偶SDP松弛模型,对多个标准算例的节点导纳矩阵进行微小扰动后可满足秩1条件。文献[14]给出了零松弛间隙的充分条件,并在求解过程中进行条件判定,取得一定的效果。然而,文献[6,18]中验证了采用常规SDP松弛方法求解OPF问题不能确保秩1条件始终满足。因此,SDP松弛解的秩不为1的问题依然存在。

另一方面,文献[19-20]引入矩量理论^[21]求解电力系统优化问题,将多项式转换为矩量表达,构造矩量空间的SDP问题。矩量SDP方法可通过提高松弛阶次而逼近到经济调度和OPF问题的全局最优解。但该方法需从矩量解中提取原问题的解,算法过程较为复杂。

本文基于变量扩展,尝试提高SDP松弛模型的阶次,构造二阶SDP松弛模型,以更有效地逼近于OPF问题的全局最优解。算例结果表明,所提方法可通过求得满足秩1条件的最优解,从而直接获得OPF问题全局最优结果,为OPF全局最优算法提供了一种新的思路。

^{*} 收稿日期:2020-06-04 修回日期:2021-11-08 网络出版时间:2022-03-29 14:22

资助项目:国家自然科学基金(No. 51407036);广西高校中青年教师基础能力提升项目(No. 2021KY1566)

第一作者简介:柳影,女,高级实验师,研究方向为电力系统保护与优化运行, E-mail: 13280576@qq.com;通信作者:田君杨,男,高级工程师, E-mail: sumtjy@163.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220328.1404.027.html>

1 基于变量扩展的凸松弛方法

本文研究的凸松弛方法是针对如下不等式约束的非线性规划问题:

$$\begin{cases} \min f(x) \\ \text{s. t. } g_i(x) \geq 0, i=1, \dots, m \end{cases} \quad (1)$$

其中: f, g_i 均为不大于 2 阶的多项式。下面基于变量扩展,导出该非线性规划问题的二阶半定规划凸松弛模型。通过求解松弛后的凸优化问题,若得到与原问题等价的最优解,则可求取原问题的全局最优解。

1.1 线性规划松弛

线性规划松弛就是通过变量扩展将原问题中的多项式方程表示为线性方程。如(2)式所示 2 个变量的优化问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_1 - 2x_2, \\ \text{s. t.} \quad & x_1 \geq 0; x_2 \geq 0, \\ & (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \leq 1, \\ & (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 1. \end{aligned} \quad (2)$$

将其中的二阶约束展开,并将变量扩展到 4 个 $[x_{10}, x_{01}, x_{20}, x_{02}]^T$, 分别为 $x_{10} = x_1, x_{01} = x_2, x_{20} = x_1^2, x_{02} = x_2^2$, 则问题(2)可表示为:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{10} - 2x_{01}, \\ \text{s. t.} \quad & x_{10} \geq 0, x_{01} \geq 0, \\ & -x_{20} + 2x_{10} - x_{02} \geq 0, \\ & x_{20} - 2x_{10} + x_{02} - 2x_{01} + 1 \geq 0, \\ & x_{20} \geq 0, x_{02} \geq 0. \end{aligned} \quad (3)$$

上式即为问题(2)的线性规划松弛,可求得最优解为 $[\mathbf{x}^*] = [0 \ 0.5 \ 0 \ 0]^T$, 即 $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_1^2 = 0, x_2^2 = 0$ 。显然,结果中 x_2^2 与 x_2 不满足原有的平方关系,即线性规划松弛的结果不是原问题等价的最优解。

对于原问题(2)的全局最优解可通过图解法^[19]确定,为 $[\mathbf{x}^*] = [0.134 \ 0.5]^T$ 。由此可见,线性规划松弛没有找到原问题的全局最优解。

1.2 一阶半定规划松弛

在线性松弛的基础上对变量进一步扩展,通过构造半正定矩阵增加对扩展变量之间的约束,形成半定规划(SDP)松弛模型。对于问题(2),在线性规划松弛(3)的基础上,定义一个新的变量 $x_{11} = x_1 x_2$, 即将变量扩展到 5 个 $[x_{10}, x_{01}, x_{20}, x_{11}, x_{02}]^T$, 并构造如下半定约束:

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_{10} & x_{01} \\ x_{10} & x_{20} & x_{11} \\ x_{01} & x_{11} & x_{02} \end{bmatrix} \geq 0. \quad (4)$$

由此,可以建立问题(2)的 SDP 松弛模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & x_{10} - 2x_{01}, \\ \text{s. t.} \quad & x_{10} \geq 0, x_{01} \geq 0, \\ & -x_{20} + 2x_{10} - x_{02} \geq 0, \\ & x_{20} - 2x_{10} + x_{02} - 2x_{01} + 1 \geq 0, \\ & \mathbf{M}_1 \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

该 SDP 问题的最优解为 $[\mathbf{x}^*] = [0.134 \ 0.5 \ 0.017 \ 9 \ 0.067 \ 0.25]^T$, 即 $x_1 = 0.134, x_2 = 0.5, x_1^2 = 0.017 \ 9, x_1 x_2 = 0.067, x_2^2 = 0.25$ 。显然,结果中各变量之间满足原有的固有关系,比如 x_2^2 与 x_2 的结果满足原有的平方关系,同时也得到了原问题的全局最优解。

上述 SDP 松弛过程中,(4)式所示的半正定矩阵是由一阶向量 $[1 \ x_1 \ x_2]^T$ 与它的转置相乘所得,因此称为一阶扩展矩阵,且由此构建的 SDP 松弛模型称为一阶 SDP 松弛。

由一阶扩展矩阵的构造方式(4)可知,求解 SDP 松弛模型若能得到秩为 1 的扩展矩阵,才能确保所得结果为

原问题等价的最优解,即全局最优解。然而事实上,对于多数 OPF 问题,一阶 SDP 松弛的结果均不能满足扩展矩阵的秩 1 条件,因此本文将进一步对变量进行扩展,构建二阶 SDP 松弛进行求解。

1.3 二阶半定规划松弛

二阶半定规划(SDP)松弛是一阶 SDP 松弛的推广,对于如(1)式所示的由 2 阶多项式构成的一般性优化问题,变量 $\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbf{R}^n$,二阶 SDP 松弛的步骤如下:

1) 构造一阶及二阶向量。一阶及二阶变量向量分别定义为:

$$[\mathbf{x}]_1 = [1, x_1, x_2, \dots, x_n]^T, \quad (6)$$

$$[\mathbf{x}]_2 = [x_1^2, x_1 x_2, \dots, x_1 x_n, x_2^2, x_2 x_3, \dots, x_n^2]^T. \quad (7)$$

其中二阶变量向量由所有二次单项式组成。

2) 将原问题进行线性松弛。基于变量向量(6)、(7)式,将问题(1)中的多项式展开为若干单项式相加的形式,则可将问题(1)进行线性松弛,如下:

$$\begin{cases} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s. t. } g_i(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \min f_1^T [\mathbf{x}]_1 + f_2^T [\mathbf{x}]_2 \\ \text{s. t. } g_{i1}^T [\mathbf{x}]_1 + g_{i2}^T [\mathbf{x}]_2 \geq 0 \end{cases} \quad (8)$$

其中: f_1, f_2, g_{i1}, g_{i2} 为相应的系数向量。

3) 构造一阶及二阶扩展矩阵。一阶扩展矩阵 $\mathbf{M}_1$ 是由一阶向量生成的半正定矩阵,如(4)式所示。类似地,在二阶向量的基础上,同样可构造秩为 1 的半正定矩阵:

$$\mathbf{M}_2 = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}]_1 \\ [\mathbf{x}]_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [\mathbf{x}]_1^T & [\mathbf{x}]_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\mathbf{x}]_1 [\mathbf{x}]_1^T & [\mathbf{x}]_1 [\mathbf{x}]_2^T \\ [\mathbf{x}]_2 [\mathbf{x}]_1^T & [\mathbf{x}]_2 [\mathbf{x}]_2^T \end{bmatrix} \geq 0. \quad (9)$$

(9)式即为二阶扩展矩阵,例如当 $n=2$,二阶向量 $[\mathbf{x}]_2 = [x_1^2, x_1 x_2, x_2^2]^T$,则中右下部 $[\mathbf{x}]_2 [\mathbf{x}]_2^T$ 为:

$$[\mathbf{x}]_2 [\mathbf{x}]_2^T = \begin{bmatrix} x_1^4 & x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 \\ x_1^3 x_2 & x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 \\ x_1^2 x_2^2 & x_1 x_2^3 & x_2^4 \end{bmatrix}.$$

由此可见, $\mathbf{M}_2$ 中已将单项式变量扩展到 4 阶,且左上部分为一阶扩展矩阵 $\mathbf{M}_1$ 。

4) 建立二阶 SDP 松弛模型。基于一阶及二阶扩展矩阵,在线性松弛(8)式的基础上,可建立问题(1)的二阶 SDP 松弛模型:

$$\begin{cases} \min f_1^T [\mathbf{x}]_1 + f_2^T [\mathbf{x}]_2 \\ \text{s. t. } (g_{i1}^T [\mathbf{x}]_1 + g_{i2}^T [\mathbf{x}]_2) \mathbf{M}_1 \geq 0, i=1, \dots, m. \\ \mathbf{M}_2 \geq 0 \end{cases} \quad (10)$$

相对于一阶 SDP 松弛,该模型一方面增加了二阶扩展矩阵的半正定约束,另一方面将原问题的不等式约束转化为与一阶扩展矩阵相关的半正定约束。显然,二阶 SDP 松弛模型的约束条件更加严格,理论上可更好地逼近于甚至达到原问题的全局最优解。由此,本文采用二阶 SDP 松弛求解 OPF 问题,若得到扩展矩阵的秩为 1,即求得与原问题等价的最优解,则可获取 OPF 的全局最优解。

2 OPF 问题的二阶半定规划松弛

由于一阶 SDP 松弛方法对于很多 OPF 问题都难以满足扩展矩阵的秩 1 条件,不能求得全局最优解,因此本文将构建二阶 SDP 松弛进行求解。

为表示为多项式问题,OPF 模型采用直角坐标形式,通常描述为:

$$\min \begin{cases} F_{\text{cost}} = \sum_{i=1}^{n_G} (a_i + b_i P_{Gi} + c_i P_{Gi}^2) \\ P_{\text{loss}_1} = \sum_{i=1}^{n_G} P_{Gi} - \sum_{j=1}^n P_{Dj} \\ P_{\text{loss}_2} = - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n G_{ij} ((e_i - e_j)^2 + (f_i - f_j)^2) \\ Q_{\text{loss}} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n B_{ij} ((e_i - e_j)^2 + (f_i - f_j)^2) \end{cases}, \quad (11)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} P_{Di} + \sum_{j=1}^n (e_i(e_j G_{ij} - f_j B_{ij}) + f_i(f_j G_{ij} + e_j B_{ij})) - P_{Gi} = 0 \\ Q_{Di} + \sum_{j=1}^n (f_i(e_j G_{ij} - f_j B_{ij}) - e_i(f_j G_{ij} + e_j B_{ij})) - Q_{Ri} = 0 \end{cases}, i=1,2,\dots,n, \quad (12)$$

$$\underline{V}_i^2 \leq (e_i^2 + f_i^2) \leq \bar{V}_i^2, i=1,2,\dots,n, \quad (13)$$

$$\underline{P}_{Gi} \leq P_{Gi} \leq \bar{P}_{Gi}, i=1,2,\dots,n_G, \quad (14)$$

$$\underline{Q}_{Ri} \leq Q_{Ri} \leq \bar{Q}_{Ri}, i=1,2,\dots,n_R. \quad (15)$$

(11)式列出了 4 种目标函数, F_{cost} 为发电成本, P_{loss_1} 为系统有功损耗, P_{loss_2} 为系统有功传输损耗, Q_{loss} 为系统无功传输损耗, 计算时选取其中一个函数作为目标。式中: n, n_G, n_R 分别为系统节点数、发电机总数、无功电源总数; P_{Gi}, Q_{Ri} 为节点 i 的有功和无功出力; e_i, f_i 为节点电压的实部和虚部, 一般选取某一节点为电压参考点, 设它的虚部 $f_s=0$; $(\underline{\cdot}), (\bar{\cdot})$ 为变量的下界和上界; P_{Di}, Q_{Di} 为节点 i 的有功和无功需求, G_{ij}, B_{ij} 为节点 i, j 之间的互电导和互电纳。

为便于理解, 下面以文献[6]中的 2 节点系统(简称 WB2 系统)为例进行说明。

如图 1 所示, 该系统中节点 1 具有一台发电机, 节点 2 为负荷节点。设节点 1 为电压参考节点, 即电压虚部 $f_1=0$, 根据(6)、(7)式可定义该系统的一阶、二阶向量为:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}]_1 &= [1, e_1, e_2, f_2, P_{G1}, Q_{R1}]^T, \\ [\mathbf{x}]_2 &= [e_1^2, e_1 e_2, e_1 f_2, e_1 P_{G1}, e_1 Q_{R1}, e_2^2, e_2 f_2, e_2 P_{G1}, e_2 Q_{R1}, f_2^2, f_2 P_{G1}, f_2 Q_{R1}, P_{G1}^2, P_{G1} Q_{R1}, Q_{R1}^2]^T. \end{aligned}$$

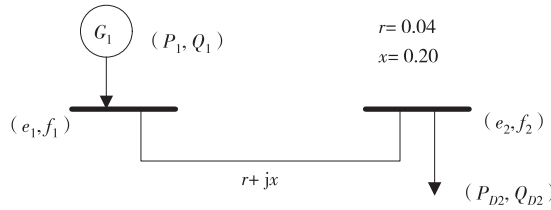


图 1 WB2 系统接线示意图

Fig. 1 Diagram of the WB2 2-bus system

由于半定规划松弛方法只能处理不等式约束问题, 因此需将模型中的等式约束表示为不等式约束, 则该 OPF 模型(以 P_{loss_1} 为目标函数)为:

$$\min f(x) = P_{G1} - P_{D2},$$

$$\begin{aligned} \text{s. t. } g_1(x) &= P_1(x) - P_{G1} \geq 0, g_2(x) = P_{G1} - P_1(x) \geq 0, g_3(x) = P_{D2} + P_2(x) \geq 0, g_4(x) = -P_{D2} - P_2(x) \geq 0, \\ g_5(x) &= Q_1(x) - Q_{R1} \geq 0, g_6(x) = Q_{R1} - Q_1(x) \geq 0, g_7(x) = Q_{D2} + Q_2(x) \geq 0, g_8(x) = -Q_{D2} - Q_2(x) \geq 0, \\ g_9(x) &= e_1^2 - \underline{V}_1^2 \geq 0, g_{10}(x) = \bar{V}_1^2 - e_1^2 \geq 0, g_{11}(x) = (e_2^2 + f_2^2) - \underline{V}_2^2 \geq 0, g_{12}(x) = \bar{V}_2^2 - (e_2^2 + f_2^2) \geq 0, \\ g_{13}(x) &= P_{G1} - \underline{P}_{G1} \geq 0, g_{14}(x) = \bar{P}_{G1} - P_{G1} \geq 0, g_{15}(x) = Q_{R1} - \underline{Q}_{R1} \geq 0, g_{16}(x) = \bar{Q}_{R1} - Q_{R1} \geq 0. \end{aligned}$$

式中: $P_1(x) = e_1^2 G_{11} + e_1 e_2 G_{12} - e_1 f_2 B_{12}$, $Q_1(x) = -e_1^2 B_{11} - e_1 f_2 G_{12} - e_1 e_2 B_{12}$, $P_2(x) = e_2 e_1 G_{21} + f_2 e_1 B_{21} + e_2^2 G_{22} + f_2^2 G_{22}$, $Q_2(x) = f_2 e_1 G_{21} - e_2 e_1 B_{21} - f_2^2 B_{22} - e_2^2 B_{22}$ 。

对于以上不等式约束的 OPF 问题, 根据(10)式的松弛方法, 即可建立二阶 SDP 松弛模型:

$$\begin{cases} \min P_{G1} - P_{D2} \\ \text{s. t. } (g_{i1}^T \mathbf{X}_1 + g_{i2}^T \mathbf{X}_2) \mathbf{M}_1 \geq 0, i=1, \dots, 16. \\ \mathbf{M}_2 \geq 0 \end{cases} \quad (16)$$

式中: $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ 分别为一阶、二阶扩展矩阵。可以看出, 原问题的 16 个不等式约束转换为 16 个矩阵不等式约束, 这里仅给出其中第 16 个约束的表达, 如(17)式。

$$g_{16}(x) \mathbf{M}_1 = (\bar{Q}_{R1} - Q_{R1}) \mathbf{M}_1 =$$

$$\begin{bmatrix}
\bar{Q}_{R1} - Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 - e_1 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_2 - e_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} f_2 - f_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} P_{G1} - P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} Q_{R1} - Q_{R1}^2 \\
\bar{Q}_{R1} e_1 - e_1 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1^2 - e_1^2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 e_2 - e_1 e_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 f_2 - e_1 f_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 P_{G1} - e_1 P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 Q_{R1} - e_1 Q_{R1}^2 \\
\bar{Q}_{R1} e_2 - e_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 e_2 - e_1 e_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_2^2 - e_2^2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_2 f_2 - e_2 f_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_2 P_{G1} - e_2 P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_2 Q_{R1} - e_2 Q_{R1}^2 \\
\bar{Q}_{R1} f_2 - f_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 f_2 - e_1 f_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_2 f_2 - e_2 f_2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} f_2^2 - f_2^2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} f_2 P_{G1} - f_2 P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} f_2 Q_{R1} - f_2 Q_{R1}^2 \\
\bar{Q}_{R1} P_{G1} - P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_1 P_{G1} - e_1 P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} e_2 P_{G1} - e_2 P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} f_2 P_{G1} - f_2 P_{G1} Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} P_{G1}^2 - P_{G1}^2 Q_{R1} & \bar{Q}_{R1} P_{G1} Q_{R1} - P_{G1} Q_{R1}^2 \\
\bar{Q}_{R1} Q_{R1} - Q_{R1}^2 & \bar{Q}_{R1} e_1 Q_{R1} - e_1 Q_{R1}^2 & \bar{Q}_{R1} e_2 Q_{R1} - e_2 Q_{R1}^2 & \bar{Q}_{R1} f_2 Q_{R1} - f_2 Q_{R1}^2 & \bar{Q}_{R1} P_{G1} Q_{R1} - P_{G1} Q_{R1}^2 & \bar{Q}_{R1} Q_{R1}^2 - Q_{R1}^3
\end{bmatrix} \geq 0 \quad (17)$$

3 计算结果及讨论

为验证二阶 SDP 方法求解 OPF 问题的效果,选取文献[6,18]中提出的采用常规 SDP 方法求解失败时的一些反例作为测试用例,测试结果如下。

3.1 LMBM3 系统

LMBM3 系统如图 2 所示,是一个具有两台发电机和一台同步调相机的 3 节点系统。

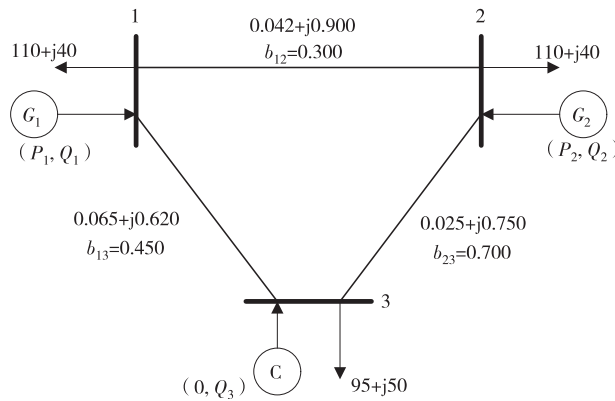


图 2 LMBM3 系统接线示意图

Fig. 2 Diagram of the LMBM3 3-bus system

文献[18]中,考虑该系统的 OPF 问题以 F_{cost} 为目标函数,电压偏移在 $\pm 10\%$ 以内,采用常规 SDP 松弛方法进行求解时不能获得秩为 1 的矩阵解,因此无法求得与原问题等价的最优解。而本文通过二阶 SDP 松弛可求得秩为 1 的扩展矩阵:

$$\begin{matrix}
1 \\
e_1 \\
e_2 \\
e_3 \\
f_2 \\
f_3 \\
P_{G1} \\
\vdots
\end{matrix}
\begin{bmatrix}
1 & 1.100\ 0 & 0.918\ 7 & 0.859\ 4 & 0.117\ 0 & -0.267\ 1 & 1.480\ 7 & \cdots \\
1.100\ 0 & 1.210\ 0 & 1.010\ 6 & 0.945\ 4 & 0.128\ 7 & -0.293\ 9 & 1.628\ 7 & \cdots \\
0.918\ 7 & 1.010\ 6 & 0.844\ 1 & 0.789\ 6 & 0.107\ 5 & -0.245\ 4 & 1.360\ 4 & \cdots \\
0.859\ 4 & 0.945\ 4 & 0.789\ 6 & 0.738\ 6 & 0.100\ 6 & -0.229\ 6 & 1.272\ 5 & \cdots \\
0.117\ 0 & 0.128\ 7 & 0.107\ 5 & 0.100\ 6 & 0.013\ 7 & -0.031\ 3 & 0.173\ 3 & \cdots \\
-0.267\ 1 & -0.293\ 9 & -0.245\ 4 & -0.229\ 6 & -0.031\ 3 & 0.071\ 4 & -0.395\ 6 & \cdots \\
1.480\ 7 & 1.628\ 7 & 1.360\ 4 & 1.272\ 5 & 0.173\ 3 & -0.395\ 6 & 2.192\ 4 & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{bmatrix}$$

可以看出,扩展矩阵中各变量值满足原有的固有关系,比如第 2 行第 2 列 e_1^2 的值(1.210 0)与第 2 行第 1 列 e_1 的值(1.100 0)满足平方关系,第 2 行第 3 列 $e_1 e_2$ 的值(1.010 6)也正好是第 2 行第 1 列 e_1 的值(1.100 0)与第 1 行第 3 列 e_2 的值(0.918 7)的乘积。由此可见,二阶 SDP 松弛求得秩为 1 的矩阵解是与原问题等价的最优解,从而可确定该 OPF 算例的全局最优解,如表 1 所示。

表 1 的结果与文献[19]所确定的全局最优解相同,由此说明二阶 SDP 松弛方法计算结果是正确的。

3.2 WB2 系统

WB2 系统如图 1 所示,考虑电压偏移在 $\pm 5\%$ 以内,则系统的可行域如图 3 所示,图中 v_1, v_2 分别为节点 1

和节点 2 的电压幅值。

表 1 LMBM3 系统的二阶 SDP 松弛结果

Tab. 1 OPF solution for the LMBM3 by two-degree SDP

$F_{\text{cost}}/\text{美元}$	节点 i	e_i/pu	f_i/pu	P_i/MW	Q_i/MVar
5 812.60	1	1.100	0	148.07	54.70
	2	0.919	0.117	170.01	-8.79
	3	0.859	-0.267	0	-4.84

由图 3 可以看出,由于节点 2 的电压幅值 $0.976 < v_2 < 1.035$ 时,节点 1 的电压不满足要求 ($v_1 < 0.95$),因此该系统 v_2 的可行域由两部分组成,分别为 $[0.95, 0.976]$ 和 $[1.035, 1.05]$ 。则该 OPF 问题存在两个局部最优解^[6],分布在图 3 中每段可行域的上端,记为 S_1, S_2 ,具体取值见表 2,可以看出 S_1 的目标值更优,为全局最优解。

本文采用二阶 SDP 松弛方法,选取不同的电压初始值进行计算,计算结果见表 3,可以看出二阶 SDP 松弛方法对初值选取不敏感,能可靠求得全局最优解。

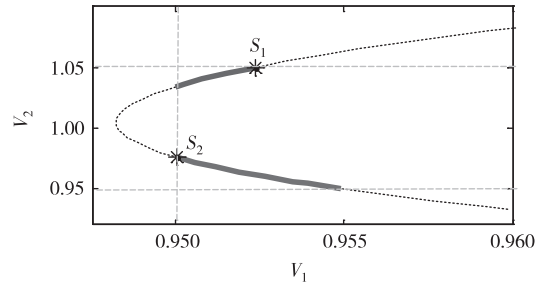


图 3 WB2 系统的可行域示意图

Fig. 3 Feasible region of the WB2 2-bus system

表 2 WB2 系统的 OPF 最优解

Tab. 2 OPF solution for the WB2 2-bus system

编号	$P_{\text{loss}}/\text{MW}$	节点 i	e_i/pu	f_i/pu	P_i/MW	Q_i/MVar
S_1	88.89	1	0.952	0	438.89	94.44
		2	0.570	-0.882	/	/
S_2	102.86	1	0.950	0	452.86	164.32
		2	0.413	-0.884	/	/

表 3 WB2 系统在不同初始值小的计算结果

Tab. 3 OPF solution for the WB2 when different initial values

序号	初始值 v_1	初始值 v_2	迭代次数	目标值
1	0.96	0.95	22	88.89
2	0.95	0.97	17	88.89
3	0.95	1.00	20	88.89
4	1.00	1.00	16	88.89

对于上述算例,采用一阶 SDP 松弛方法也能求得全局最优解,但若将电压幅值 v_2 的上限值 $\bar{V}_2$ 不再设定为 1.05,则可能得不到有效的解。文献[6]中也验证了当 $\bar{V}_2$ 设定在 $[0.976, 1.035]$ 之间(即图 3 所示的中间虚线段)时,常规 SDP 松弛的结果不能满足秩 1 条件而求解失败。然而,本文采用二阶 SDP 方法求解时,均能求得秩为 1 的扩展矩阵解,从而获得全局最优解。图 4 给出了在 $\bar{V}_2$ 取值变化情况下二阶 SDP 方法求得的全局最优目标值。

由图 4 可以看出,当 $\bar{V}_2$ 设定在 $[0.976, 1.035]$ 之间时,求得的全局最优值不变,这是因为此时电压幅值 v_2 的有效可行域均为 $0.95 < v_2 < 0.976$,由图 3 可

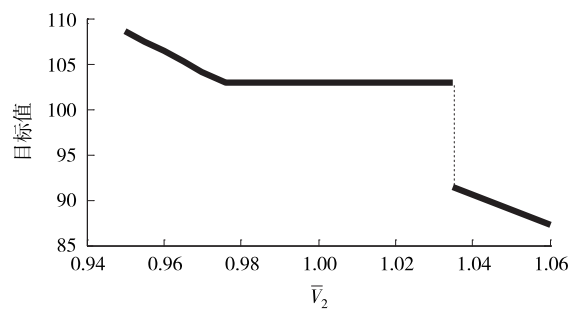


图 4 WB2 系统的 MSDP 松弛目标曲线

Fig. 4 Performance of MSDP method on WB2 system

知,此时的最优解固定在可行域的上端,即图 3 中的 S_2 。可见,二阶 SDP 方法求得的结果是正确的。

3.3 WSCC-9 系统

WSCC-9 系统是一个具有 3 台发电机的 9 节点系统。文献[6]中采用非线性内点法从 2 000 个不同的初始点进行尝试求解,找到 4 个局部最优解(以 F_{cost} 为目标函数),表 4 给出了各结果的机组出力情况。从表中可以看出,4 个局部最优解的目标值最大相差近 30% 的发电费用,可见求取该系统的全局最优解具有明显的现实意义。但文献[6]中采用常规 SDP 方法求解该 OPF 算例时,不能获得秩为 1 的矩阵解,也不能得到表 4 中最小的目标结果。而本文通过二阶 SDP 松弛同样能得到秩为 1 的扩展矩阵,从而确定全局最优解如表 5 所示,目标值与表 4 中最小的结果 1 是一致的,这说明二阶 SDP 方法求得的结果是正确的。

表 4 WSCC-9 系统 OPF 的局部最优解
Tab. 4 Local solutions of WSCC-9

序号	结果 1		结果 2		结果 3		结果 4	
	P_i/MW	Q_i/MVar	P_i/MW	Q_i/MVar	P_i/MW	Q_i/MVar	P_i/MW	Q_i/MVar
$i=1$	10.00	-5.00	143.22	-5.00	10.00	-5.00	142.24	-5.00
$i=2$	125.37	-5.00	37.81	-5.00	64.79	-5.00	10.00	-5.00
$i=3$	57.03	-5.00	10.00	-5.00	117.79	-5.00	38.76	-5.00
$F_{\text{cost}}/\text{美元}$	3 087.84		4 246.48		3 398.03		4 265.15	

表 5 WSCC-9 系统 OPF 计算结果
Tab. 5 Optimal value of WSCC-9

$F_{\text{cost}}/\text{美元}$	节点 i	e_i/pu	f_i/pu	P_i/MW	Q_i/MVar
3 087.84	1	0.909 5	0	10.00	-5.00
	2	0.900 4	0.197 4	125.37	-5.00
	3	0.931 8	0.114 5	57.03	-5.00
	4	0.912 7	-0.006 3	/	/
	5	0.916 0	-0.011 7	/	/
	6	0.939 2	0.079 6	/	/
	7	0.925 5	0.073 1	/	/
	8	0.921 9	0.115 1	/	/
	9	0.899 9	-0.009 9	/	/

综上,运用二阶 SDP 松弛方法求解 OPF 问题均能求得秩为 1 的扩展矩阵,获得与原问题等价的最优解,由此确定 OPF 的全局最优解。且上述算例均为常规 SDP 方法求解时的反例,从而说明二阶 SDP 方法能够克服常规 SDP 方法所求矩阵解的秩不为 1 的问题,具有更高的可靠性。

3.4 扩展性讨论

二阶 SDP 松弛时,随着原问题变量数的增加,扩展变量的规模将急剧增大,使得二阶 SDP 松弛模型的求解需要消耗大量内存。从表 6 可以看出,当原问题具有 34 个变量数时,扩展变量数就达到了 66 044 个,此时半定规划内点法求解需要约 40 G 内存空间。可见,由于内存有限,未稀疏化的二阶 SDP 方法还不能直接用于求解大规模问题。

实际上,二阶 SDP 松弛模型中的很多扩展变量与原问题不具有相关性,即该模型具有较好的稀疏性。因此,下一步还需要研究二阶 SDP 松弛模型的稀疏特性及求解策略,以满足扩展应用的需求。

4 结论

本文基于变量扩展的凸松弛方法,在一阶 SDP 松弛的基础上,推导了 OPF 问题的二阶 SDP 松弛模型。该模型增加二阶扩展矩阵约束,并将不等式约束也转化为矩阵不等式约束,使得扩展变量之间约束更加严格,则该

松弛模型在理论上与原问题更加逼近。

表 6 各算例的内存消耗情况

Tab. 6 The memory consumption in the cases

算例	原变量数	扩展变量数	内存消耗/G
WB2	5	64	0.08
LMBM3	10	670	0.57
WSSC-9	24	17 525	3.05
IEEE-14	34	66 010	39.50

算例结果表明,二阶 SDP 松弛结果能够得到秩为 1 的扩展矩阵,获得与原问题等价的最优解,从而得到 OPF 问题的全局最优解。并且在常规 SDP 方法求解失败时,二阶 SDP 松弛方法均能有效求得全局最优解,具有更高的可靠性。

二阶 SDP 松弛方法可有效逼近原 OPF 问题,精确求取全局最优解的能力明显优于常规 SDP 方法。但该松弛方法存在内存消耗量大的问题,使得求解大规模问题时由于内存溢出而无法进行计算。下一步工作将研究二阶 SDP 松弛模型的求解策略,以扩大求解规模。

参考文献:

- [1] WEI H, SASAKI H, KUBOKAWA J, et al. An interior point nonlinear programming for optimal power flow problems within a novel data structure[J]. IEEE Transactions Power System, 1998, 13(3): 870-877.
- [2] 丁晓莺, 王锡凡, 张显, 等. 基于内点割平面法的混合整数最优潮流算法[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(2): 1-7.
DING X Y, WANG X F, ZHANG X, et al. Mixed integer optimal power flow based on interior point cutting plane method[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(2): 1-7.
- [3] 张永平, 童小娇, 吴复立, 等. 基于非线性互补问题函数的半光滑牛顿最优潮流算法[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(9): 130-135.
ZHANG Y P, TONG X J, WU F L, et al. Study on semismooth newton optimal power flow algorithm based on nonlinear complementarity problem function[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(9): 135-135.
- [4] 钟世民, 韩学山, 刘道伟, 等. 计及校正控制的安全约束最优潮流的奔德斯分解算法[J]. 中国电机工程学报, 2011, 31(1): 65-71.
ZHONG S M, HAN X S, LIU D W, et al. Benders decomposition algorithm for corrective security-constrained optimal power flow[J]. Proceedings of the CSEE, 2011, 31(1): 65-71.
- [5] YANG L F, LUO J Y, XU Y, et al. A distributed dual consensus ADMM based on partition for DC-DOPF with carbon emission trading[J]. IEEE Transactions Industrial Informatics, 2020, 16(3): 1858-1872.
- [6] BUKHSH W, GROTHEY A, MCKINNON K, et al. Local solutions of the optimal power flow problem[J]. IEEE Transactions Power System, 2013, 28(4): 4780-4788.
- [7] HORST R, PARDALOS M, THOAI N V. 全局优化引论[M]. 黄红选译. 北京: 清华大学出版社, 2003.
HORST R, PARDALOS M, THOAI N V. Introduction to global optimization[M]. HUANG H X, translation. Beijing: Tsinghua University Press, 2003.
- [8] 林哲, 胡泽春, 宋永华. 最优潮流问题的凸松弛技术综述[J]. 中国电机工程学报, 2019, 39(13): 3717-3727.
LIN Z, HU Z H, SONG Y H. Convex relaxation for optimal power flow problem: a recent review[J]. Proceedings of the CSEE, 2019, 39(13): 3717-3727.
- [9] MADRIGAL M, QUINTANA V H. Semidefinite programming relaxations for $\{0,1\}$ -power dispatch problems[C]//1999 IEEE Power Engineering Society Summer Meeting Conference Proceedings, July 18-22, 1999, Edmonton, AB, Canada, Piscataway: IEEE, 1999: 697-702.
- [10] FUENTES-LOYOLA R, QUINTANA V H. Medium-term hydrothermal coordination by semidefinite programming[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2003, 18(4): 1515-1522.
- [11] 白晓清, 韦化, KATSUKI F. 求解最优潮流问题的内点半定规划法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(19): 56-64.
BAI X Q, WEI H, KATSUKI F. Solution of optimal power flow problems by semi-definite programming[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(19): 56-64.

- [12] 郑佳滨,刘明波,谢敏. 求解含储能装置的微电网动态最优潮流的对偶半定规划方法[J]. 电网技术,2017,41(9):2879-2886.
ZHENG J B, LIU M B, XIE M. Dual semi-definite programming method for dynamic optimal power flow with energy storage device[J]. Power System Technology, 2017, 41(9): 2879-2886.
- [13] 朱梓荣,卫志农,赵静波,等. 基于内点半定规划法的含 UPFC 的最优潮流[J]. 电力自动化设备,2018,38(11):92-99.
ZHU Z R, WEI Z N, ZHAO J B, et al. Optimal power flow with UPFC based on semi-definite programming method[J]. Electric Power Automation Equipment, 2018, 38(11): 92-99.
- [14] 耿琪,胡炎,何建宗,等. 含电力电子变压器的交直流混合电网最优潮流[J]. 电网技术,2019,43(9):3288-3296.
GENG Q, HU Y, HE J Z, et al. Optimal power flow for hybrid AC/DC grid with power electronic transformer[J]. Power System Technology, 2019, 43(9): 3288-3296.
- [15] 唐爱红,石诚成,郑旭,等. 基于半定规划法的含分布式潮流控制器最优潮流[J]. 电力系统自动化,2020,44(4):119-125.
TANG A H, SHI C C, ZHENG X, et al. Optimal power flow with distributed power flow controller based on semi-definite programming method[J]. Automation of Electric Power Systems, 2020, 44(4): 119-125.
- [16] JABR R A. Rank-constrained semidefinite program for unit commitment[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2013, 47: 13-20.
- [17] LAVAEI J, LOW S H. Zero duality gap in optimal power flow problem[J]. IEEE Transactions on Power Systems, 2012, 27(1): 92-107.
- [18] LESIEUTRE B C, MOLZAHN D K, BORDEN A R, et al. Examining the limits of the application of semidefinite programming to power flow problems[C]//49th Annual Allerton Conference on Communication, Control, and Computing, Sept 28-30, 2011, Monticello, IL, USA. Piscataway: IEEE, 2011: 1492-1499.
- [19] 田君杨. 基于矩量理论的电力系统全局优化算法研[D]. 南宁:广西大学,2014.
TIAN J Y. Study on global optimization for power system based on theory of moment [D]. Nanning: Guangxi University, 2014.
- [20] 孙东磊,韩学山,张波. 电力系统源网间协同的经济调度模型及矩量半定规划法[J]. 电力自动化设备,2016,36(5):74-80.
SUN D L, HAN X S, Zhang Bo. Power system economic dispatch model with source-network synergy and moment-based semi-definite programming[J]. Electric Power Automation Equipment, 2016, 36(5): 74-80.
- [21] LASSERRE J B. Global optimization with polynomials and the problem of moments[J]. SIAM Journal on Optimization, 2001, 11(3): 796-817.

Operations Research and Cybernetics

Two-Degree SDP Method for Optimal Power Flow with Global Optimization

LIU Ying¹, TIAN Junyang², LI Peijie³, HUANG Chao²

(1. Department of Information and Electromechanical Engineering, Guangxi Vocational University of Agricultural Technical, Nanning 530005; 2. Guangxi Power Grid Dispatching Control Center, Nanning 530023; 3. Guangxi Key Laboratory of Power System Optimization and Energy Technology (Guangxi University), Nanning 530004, China)

Abstract: [Purposes] The convex relaxation method of semi-definite programming (SDP) is an important means to solve optimal power flow (OPF) problems with global optimums. But it is difficult to meet the rank-1 condition and it has certain limitations. A new convex relaxation approach is presented, called 2-degree SDP method, to facilitate the rank-1 condition satisfied for deterministic global optimal solution. [Methods] The method constructs 1- and 2-degree positive semi-definite expansion matrices based on variable expansion, and employs linear matrix inequalities to formulate the inequality constraints. Thus, the 2-degree SDP model is built for OPF problems. [Findings] This method is effectively applied to certain OPF's examples of unsuccessful applications with conventional SDP method. Simulation results showed that the 2-degree SDP method can obtain rank-1 expansion matrices more reliably, then the global solutions can be gotten directly. [Conclusions] The 2-degree SDP relaxation is a more reliable algorithm with global optimality for OPF problems, it has a better application prospect.

Keywords: optimal power flow (OPF); semi-definite programming (SDP); convex relaxation; global optimization

(责任编辑 黄 颖)