

芬斯勒流形上的 Bochner 不等式及热方程整体解的构造^{*}

程新跃, 卿春燕, 谭 聪

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究芬斯勒几何中的 Bochner 公式及与 Laplacian 算子相关的问题。【方法】利用偏微分方程及 Sobolev 空间的相关理论展开讨论。【结果】利用 L^2 -梯度估计证明了一个重要的 Bochner 不等式, 讨论了芬斯勒流形上热方程整体解的应用并构造了热方程的若干整体解。【结论】给出了一类 Bochner 公式成立的充分条件并构造了热方程的若干整体解。

关键词: 芬斯勒流形; 加权 Ricci 曲率; Bochner 不等式; 热方程

中图分类号: O186.1

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2022)02-0069-07

在黎曼几何中, Bochner 公式是联系流形上的几何与拓扑的桥梁。具体地, 对任意的光滑函数 f , 有:

$$\frac{1}{2} \Delta |\nabla f|^2 = |\text{Hess } f|^2 + \langle \nabla(\Delta f), \nabla f \rangle + \text{Ric}(\nabla f, \nabla f),$$

其中: $\text{Hess } f$ 表示 f 的 Hessian, Δf 表示 f 的 Laplacian (相关定义见后)。

在芬斯勒几何中, Ohta 等人^[1]给出了芬斯勒流形上的 Bochner-Weitzenböck 公式以及改进的 Bochner 不等式, 并对给定的 $u \in C^\infty(M)$ 及 $N \in (-\infty, 0) \cup [n, \infty)$, 证明了芬斯勒流形上的 Bochner-Weitzenböck 公式:

$$\begin{aligned} \Delta^{\nabla u} \left[\frac{F^2(\nabla u)}{2} \right] - d(\Delta u)(\nabla u) &= \text{Ric}_\infty(\nabla u) + \|\nabla^2 u\|_{\text{HS}(\nabla u)}^2, \\ \Delta^{\nabla u} \left[\frac{F^2(\nabla u)}{2} \right] - d(\Delta u)(\nabla u) &\geq \text{Ric}_N(\nabla u) + \frac{(\nabla u)^2}{N}. \end{aligned} \quad (1)$$

在 $M_u := \{x \in M \mid du \neq 0\}$ 上都成立, 其中: $\|\cdot\|_{\text{HS}(\nabla u)}$ 表示关于度量 $g_{\nabla u}$ 的 Hilbert-Schmidt 范数, ∇u 表示 u 的梯度向量场, Δu 表示 u 的 Laplacian, $\text{Ric}_N, \text{Ric}_\infty$ 表示芬斯勒流形上的加权 Ricci 曲率 (相关定义见后)。特别地, 如果 $\text{Ric}_N \geq K$, 由 (1) 式知 Bochner 不等式

$$\Delta^{\nabla u} \left[\frac{F^2(\nabla u)}{2} \right] - d(\Delta u)(\nabla u) \geq K F^2(\nabla u) + \frac{(\Delta u)^2}{N}$$

在 M_u 上都成立。

芬斯勒流形上的 Bochner-Weitzenböck 公式以及改进的 Bochner 不等式在流形上的分析与几何问题的研究中具有重要的应用价值。如 Ohta 等人^[1]结合 Bochner 不等式, 利用线性热半群的相关理论证明了 L^2 -梯度估计和 Li-Yau 梯度估计。此外, Ohta^[2]利用 Bochner 不等式证明了对数 Sobolev 不等式和 Sobolev 不等式。夏超等人^[3]利用 Bochner 不等式给出了芬斯勒流形上 Laplace 算子第一非零 Neumann 特征值的下界。夏巧玲^[4]则利用 Bochner 不等式得到了第一特征值下界的一个优化估计。本文首先将利用 L^2 -梯度估计, 结合线性热半群的相关理论, 证明一个重要的 Bochner 不等式。具体地, 有以下定理。

定理 1 设 (M, F, m) 是一个测度为 m 的紧致芬斯勒流形。对每个 $K \in \mathbf{R}$, 若 L^2 -梯度估计

$$F^2(\nabla u_t) \leq e^{-2K(t-s)} P_{s,t}^{\nabla u}(F^2(\nabla u_s)), 0 \leq s < t < \infty$$

对满足 $u_0 \in C^2(M)$ 的热方程的全部整体解 $(u_t)_{t \geq 0}$ 均成立, 则对任意的 $u \in C^\infty(M)$, Bochner 不等式

$$\Delta^{\nabla u} \left[\frac{F^2(\nabla u)}{2} \right] - d(\Delta u)(\nabla u) \geq K F^2(\nabla u)$$

^{*} 收稿日期: 2021-04-21 修回日期: 2021-09-15 网络出版时间: 2022-03-29 09:35

资助项目: 国家自然科学基金项目 (No. 11871126); 重庆师范大学研究基金 (No. 17XLB022)

第一作者简介: 程新跃, 男, 教授, 博士, 研究方向为微分几何及应用, E-mail: chengxy@cqnu.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220328.1029.004.html>

在 M_u 上成立,其中 $M_u := \{x \in M \mid du \neq 0\}$, $P_{s,t}^{\nabla u}$ 表示 $L^2(M)$ 上的算子,称为芬斯勒流形上的线性化热半群(相关定义见后)。

芬斯勒流形上的热方程以及热方程的局部解和整体解由 Ohta 等人^[5]引进,他们还证明了热方程的局部解和整体解的存在性。近些年来,人们利用热方程的整体解对芬斯勒几何中的若干整体问题开展了深入研究,并且取得了一些重要的进展。一个自然而重要的问题是:如何寻找并构造热方程的整体解并运用于相关问题的研究呢?这是研究芬斯勒流形上的整体几何与分析问题的一个重要基础。本文着重研究了热方程整体解的构造问题并得到了热方程的若干整体解。详情请见第 3 节。

1 预备知识

设 M 是 n 维光滑流形, F 是流形 M 上的芬斯勒度量。 F 的测地系数 G^i 定义为 $G^i := \frac{1}{4} g^{ij} \{ [F^2]_{x^j y^i} y^k - [F^2]_{x^i} \}$ 。 F 的黎曼曲率张量 $R_y := R_k^i \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k$ 由测地系数 G^i 完全确定。在局部坐标系下,定义曲率张量 $R_k^i = 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2G^j \frac{\partial^2 G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}$ 。称 $R = \{R_y : T_x M \rightarrow T_x M \mid y \in T_x M \setminus \{0\}, x \in M\}$ 为芬斯勒流形 (M, F) 的黎曼曲率。

给定切向量 $v, w \in T_x M \setminus \{0\}$, 芬斯勒度量 F 的旗曲率定义为:

$$K(v, w) := \frac{g_v(R_v(w), v)}{g_v(v, v)g_v(w, w) - [g_v(v, w)]^2},$$

其中: $v = v^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $w = w^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 。进一步,黎曼曲率的迹称为度量 F 的 Ricci 曲率,记为 $\text{Ric}(x, y) := \text{trace}(R_y)$ ^[6]。

给定芬斯勒度量 F 的 Busemann-Hausdorff 体积形式 $dV = \sigma(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 。任取 $T_x M$ 上的一组基 $\{b_i\}_{i=1}^n$ 及 $T_x^* M$ 上的对偶基 $\{\theta^i\}_{i=1}^n$, 体积系数 $\sigma(x)$ 定义为 $\sigma(x) = \frac{V(B^n(1))}{V\{y \in \mathbf{R}^n \mid F(x, y^i b_i) < 1\}}$, 其中: V 表示欧氏体积, $B^n(1)$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的标准单位球。

对切向量 $y \in T_x M \setminus \{0\}$, 芬斯勒流形 (M, F, dV) 的畸变定义为 $\tau(y) := \ln \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma(x)}$, 其中 $g_{ij}(x, y) := \frac{1}{2} [F^2]_{y^i y^j}(x, y)$ 。进一步,对切向量 $y \in T_x M \setminus \{0\}$, 芬斯勒度量 F 的 S-曲率定义为 $S(y) := \frac{d}{dt} [\tau(c(t), \dot{c}(t))]_{t=0}$, 这里 $c(t)$ 表示满足 $c(0) = x$ 且 $\dot{c}(0) = y$ 的测地线。

Ohta 在文献[7]中定义了芬斯勒流形上的加权 Ricci 曲率。具体地,给定一个测度为 m 的 n 维芬斯勒流形 (M, F, m) 和切向量 $v \in T_x M \setminus \{0\}$, 令 $\eta: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ 是满足 $\eta(0) = v$ 的测地线, 并且测度 m 沿着测地线 η 分解成 $dm = e^{-\psi_\eta} \sqrt{\det(g_{ij}(\eta, \dot{\eta}))} dx^1 dx^2 \cdots dx^n$, 其中 $\psi_\eta = \psi_\eta(\eta(t), \dot{\eta}(t)): (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbf{R}$ 为一个 C^∞ 函数。对任意的 $N \in [n, \infty)$, 加权 Ricci 曲率定义为 $\text{Ric}_N(v) := \text{Ric}(v) + \psi_\eta''(0) - \frac{\psi_\eta'(0)^2}{N-n}$ 。

当 $N \rightarrow \infty$ 和 $N \rightarrow n^+$ 时, 可定义如下的加权 Ricci 曲率:

$$\text{Ric}_\infty(v) := \text{Ric}(v) + \psi_\eta''(0), \text{Ric}_n(v) := \begin{cases} \text{Ric}(v) + \psi_\eta''(0), & \psi_\eta'(0) = 0 \\ -\infty, & \psi_\eta'(0) \neq 0 \end{cases}.$$

事实上,容易看出 $\psi_\eta'(0) := S(x, v)$ 是芬斯勒几何中关于测度 m 的 S-曲率且 $\psi_\eta''(0) = \dot{S}(x, v) = S|_m(x, v)v^m$, 其中“ $|$ ”表示关于 Chern 联络的水平协变导数^[8]。因此,可以进一步把 $\text{Ric}_N(v)$ 写成 $\text{Ric}_N(v) := \text{Ric}(v) + \dot{S}(x, v) - \frac{S(x, v)^2}{N-n}$ 。

一般地,若对任意的 $x \in M$ 和切向量 $v \in T_x M$, 总有 $\text{Ric}_N(v) \geq KF^2(x, v)$, 这里 K 为一实常数, 则称 $\text{Ric}_N \geq K$ 。

设 F 是流形 M 上的一个芬斯勒度量, F^* 表示 F 在 M 上的对偶芬斯勒度量。对 $x \in M$ 及任意的切向量 $y \in T_x M \setminus \{0\}$, 余切向量 $\xi = g_y(y, \cdot) \in T_x^* M$ 满足:

$$F(x, y) = F^*(x, \xi) = \frac{\xi(y)}{F(x, y)}. \quad (2)$$

反之,对任意的余切向量 $\xi \in T_x^* M \setminus \{0\}$, 都存在唯一一个切向量 $y \in T_x M \setminus \{0\}$, 使得余切向量 $\xi = g_y(y, \cdot) \in T_x^* M^{[6]}$. 由此, 可以定义芬斯勒流形 (M, F) 上的 Legendre 变换 $\mathcal{L}: TM \rightarrow T^*M$, 且 $\mathcal{L}(y) := \begin{cases} g_y(y, \cdot), & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$.

于是, 由(2)式可得: $F(x, y) = F^*(x, \mathcal{L}(y))$.

令 $\xi = \mathcal{L}(y) = \xi_i \theta^i$, 则易知 $\xi_i = g_{ij}(x, y) y^j$. 进一步, 对 $F^2(x, y) = F^{*2}(x, \mathcal{L}(y))$ 两边同时关于 y^i 求导, 有 $\frac{1}{2} [F^2]_{y^i}(x, y) = \frac{1}{2} [F^{*2}]_{\xi_i}(x, \xi) g_{ik}(x, y)$. 进而有 $g^{*kl}(x, \xi) \xi_l = y^k$, 其中: $g^{*kl}(x, \xi) := \frac{1}{2} [F^{*2}]_{\xi_k \xi_l}(x, \xi)$, 且 $g^{*kl}(x, \xi) = g^{kl}(x, y)$, 这里 $(g^{kl}(x, y)) = (g_{kl}(x, y))^{-1 [6, 9]}$.

给定流形 M 上的一个光滑函数 u , 则 u 在 M 上任意点 x 处的微分为 $du_x = \frac{\partial u}{\partial x^i}(x) dx^i$. 可以通过 Legendre 变换定义函数 u 在点 x 处的梯度向量为 $\nabla u(x) := \mathcal{L}^{-1}(du(x)) \in T_x M$. 由上述讨论, 在局部坐标下, ∇u 可写成:

$$\nabla u(x) = \begin{cases} g^{*ij}(x, du) \frac{\partial u}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}, & x \in M_u \\ 0, & x \in M \setminus M_u \end{cases}, \quad (3)$$

其中: $M_u = \{x \in M \mid du(x) \neq 0\}$. 进一步, 由(2)式可以得到, 对任意的 $v \in T_x M$, 有:

$$\begin{aligned} du_x(v) &= g_{\nabla u_x}(\nabla u_x, v), \\ F(x, \nabla u_x) &= F^*(x, du_x) = \frac{du_x(\nabla u_x)}{F(x, \nabla u_x)}. \end{aligned} \quad (4)$$

给定流形 M 上的一个光滑测度 m , 对应的体积形式为 $dm = e^\Phi dx^1 dx^2 \cdots dx^n$. 设 $X = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 是 M 上的一个向量场. 定义向量场 X 关于光滑测度 m 的散度为 $\text{div}_m(X) := \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial X^i}{\partial x^i} + X^i \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right)$. 另一方面, 对所有的 $\varphi \in C_c^\infty(M)$, 可以定义弱意义下的 $\text{div}_m(X)$ 为 $\int_M \varphi \text{div}_m(X) dm = - \int_M d\varphi(X) dm$, 其中: $C_c^\infty(M)$ 表示 M 上具有紧致支集的光滑函数构成的空间.

对函数 $u \in H_{\text{loc}}^1(M)$, 定义函数 u 在芬斯勒流形上的 Laplacian 为:

$$\Delta u := \text{div}_m(\nabla u), \quad (5)$$

其中: $H_{\text{loc}}^1(M)$ 表示由 M 中满足如下条件的弱可微函数 u 所构成的 Sobolev 空间: 函数 u 及 $F^*(du)$ 都属于 $L_{\text{loc}}^2(M)$. 这里 $L_{\text{loc}}^2(M)$ 是由 M 上满足如下条件的 Borel 可测函数 u 所构成的空间: 对任一紧集 $K \subset M$, $\|u\|_{L^2(K)} < \infty^{[10]}$.

进一步, 对所有的 $\varphi \in C_c^\infty(M)$, 定义弱意义下函数 u 的 Laplacian 为满足如下条件的 Δu :

$$\int_M \varphi \Delta u dm := - \int_M d\varphi(\nabla u) dm.$$

由 Laplacian 及散度定义, 对流形 M 上任意的光滑函数 φ , 有:

$$\text{div}_m(\varphi \nabla u) = \varphi \Delta u + d\varphi(\nabla u). \quad (6)$$

令 $V = V^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ 是流形 M 上的非零向量场, 对任意的切向量 $X, Y \in T_x M$, 定义流形 M 上的加权黎曼度量 $g_V(X, Y) = g_{ij}(x, V) X^i Y^j$. 特别地, $g_V(V, V) = F^2(x, V)$. 在加权黎曼流形 (M, g_V, m) 上, 可定义线性梯度向量场与线性 Laplacian 为:

$$\nabla^V u := \begin{cases} g^{ij}(x, V) \frac{\partial u}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i}, & x \in M_u \\ 0, & x \in M \setminus M_u \end{cases}, \quad \nabla^V u := \text{div}_m(\nabla^V u). \quad (7)$$

由(7)式可以得到: 对任意的 $u \in H_{\text{loc}}^1(M)$, 有 $\Delta^{\nabla^V} u = \nabla^V u$ 和 $\Delta^{\nabla^V} u = \Delta u^{[5]}$. 因此, 对任意在 $M \setminus M_u$ 上处处满足 $df_1 = df_2 = 0$ 的 $f_1, f_2 \in H_{\text{loc}}^1(M)$, 由(4)式有:

$$df_2(\nabla^{\nabla^V} f_1) = g_{\nabla^V}(\nabla^{\nabla^V} f_1, \nabla^{\nabla^V} f_2) = df_1(\nabla^{\nabla^V} f_2). \quad (8)$$

利用芬斯勒流形上的 Laplacian, 人们自然地研究了芬斯勒流形上的热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$. Ohta 等人^[5]定义了芬斯勒流形上热方程的局部解和整体解, 并且证明了热方程的局部解和整体解的存在性. 具体地, 给定一个开

集 $\Omega \subset M$ 和开区间 $I \subset \mathbf{R}$ 。一个 $I \times \Omega$ 上的实函数 $u = u(t, x)$ 被称为是热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$ 的局部解, 如果: 1) $u \in L^2_{\text{loc}}(I \times \Omega)$ 且 $F(\nabla u) \in L^2_{\text{loc}}(I \times \Omega)$; 2) 对任意的 $\varphi \in C_c^\infty(I \times \Omega)$, 有 $\int_I \int_\Omega u \frac{\partial \varphi}{\partial t} dm dt = \int_I \int_\Omega d\varphi(\nabla u) dm dt$ 。

下面给出热方程整体解的定义^[5]。

定义 1^[5] (整体解) 一个 $[0, T] \times M$ 上的实函数 $u = u(t, x)$ 被称为是热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$ 的整体解, 如果: 1) $u \in L^2([0, T], H_0^1(M)) \cap H^1([0, T], H^{-1}(M))$; 2) 对任意的 $\varphi \in H_0^1(M)$ 和 $t \in [0, T]$, 有:

$$\int_M \varphi \partial_t u_t dm = - \int_M d\varphi(\nabla u_t) dm。$$

注 1 定义 1 的条件 1) 中相关符号的定义可以参考文献[11]。条件 1) 中 $u \in L^2([0, T], H_0^1(M))$ 意味着 $\int_0^T \|u\|_{H^1}^2 dt < \infty$ 。条件 1) 中的 $H^{-1}(M)$ 表示 $H_0^1(M)$ 的对偶 Banach 空间, 因此 $L^2(M) \subset H^{-1}(M)$ 。从而 $u \in H^1([0, T], H^{-1}(M))$ 意味着对每一个 $t \in (0, T)$, 弱导数 $\partial_t u_t \in H^{-1}(M)$ 都存在, 即对所有的 $\varphi \in C_c^\infty((0, T) \times M)$, 有 $\int_0^T \int_M \varphi_t \cdot \partial_t u_t dm dt = - \int_0^T \int_M \partial_t \varphi_t \cdot u_t dm dt$, 且 $\int_0^T \|\partial_t u_t\|_{H^{-1}}^2 dt < \infty$ 成立。于是, 由 $H_0^1(M) \subset L^2(M) \subset H^{-1}(M)$, 可知定义 1 的条件 1) $u \in L^2([0, T], H_0^1(M)) \cap H^1([0, T], H^{-1}(M))$ 等价于 $u \in C([0, T], L^2(M))$, 这也就意味着 $u \in L^2(M)$ ^[10-12]。

最后给出线性化热半群的相关定义。

设 $(u_t)_{t \geq 0} \subset H_0^1(M)$ 是热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$ 的整体解。选取可测的一族单参数非零向量场 $\{V_t\}_{t \geq 0}$, 使得 $V_t = \nabla u_t$ 在 M_{u_t} 上对每一个 $t \geq 0$ 都成立。给定 $f \in H_0^1(M)$ 和 $s \geq 0$, 令 $(P_{s,t}^{\nabla u}(f))_{t \geq s} \subset H_0^1(M)$ 是线性化热方程

$$\partial_t [P_{s,t}^{\nabla u}(f)] = \Delta^{V_t} [P_{s,t}^{\nabla u}(f)], P_{s,s}^{\nabla u}(f) = f \quad (9)$$

的弱解, 其中: $0 \leq s < t \leq T$ 。 $P_{s,t}^{\nabla u}$ 表示 $L^2(M)$ 上的算子, 称为芬斯勒流形 (M, F, m) 上的线性化热半群^[1]。

半群 $P_{s,t}^{\nabla u}$ 是线性的, 但是关于 $L^2(M)$ 的内积不一定是对称的。由此, 可引进 $P_{s,t}^{\nabla u}$ 的伴随热半群 $\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}$ 。给定 $\varphi \in H_0^1(M)$ 和 $t > 0$, 定义 $(\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(\varphi))_{s \in [0, t]} \subset H_0^1(M)$ 为下列方程的弱解:

$$\partial_s [\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(\varphi)] = - \Delta^{V_s} [\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(\varphi)], \hat{P}_{t,t}^{\nabla u}(\varphi) = \varphi。 \quad (10)$$

容易验证:

$$\int_M \varphi \cdot P_{s,t}^{\nabla u}(f) dm = \int_M \hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(\varphi) \cdot f dm。 \quad (11)$$

2 定理 1 的证明

本节着重给出定理 1 的详细证明, 为此引入下述引理。

引理 1^[1-2] 设 $(u_t)_{t \geq 0}$ 是热方程的整体解, 则

$$\frac{\partial}{\partial t} [F^2(\nabla u_t)] = 2d(\Delta u_t)(\nabla u_t) \quad (12)$$

对所有的 $t > 0$ 都成立。

下面将利用(11)式以及引理 1 对定理 1 作出详细证明。

证明 (定理 1) 对任意的 $u \in C^\infty(M)$, 设 $(u_t)_{t \geq 0}$ 为热方程的整体解且 $u_0 = u$ 。由已知, 对所有的 $0 \leq s < t < \infty$, 有:

$$e^{2Kt} F^2(\nabla u_t) \leq e^{2Ks} P_{s,t}^{\nabla u}(F^2(\nabla u_s))。 \quad (13)$$

对任意非零光滑函数 $h \in C^\infty(M)$ ($h > 0$), (13) 式两边同乘 h , 可得:

$$h \cdot e^{2Kt} F^2(\nabla u_t) \leq h \cdot e^{2Ks} P_{s,t}^{\nabla u}(F^2(\nabla u_s))。 \quad (14)$$

再对(14)式两边同时积分, 有:

$$e^{2Kt} \int_M h \cdot \frac{F^2(\nabla u_t)}{2} dm \leq e^{2Ks} \int_M h \cdot P_{s,t}^{\nabla u} \left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right) dm。 \quad (15)$$

给定 $t > 0$, 令 $H(s) := e^{2Ks} \int_M h \cdot P_{s,t}^{\nabla u} \left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right) dm$ 。由(11)式, $H(s)$ 可以写成:

$$H(s) = e^{2Ks} \int_M \hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h) \cdot \frac{F^2(\nabla u_s)}{2} dm。 \quad (16)$$

再由(9),(15)式,对所有的 $0 \leq s < t < \infty$, 有 $H(t) \leq H(s)$, 从而 $H'(s) \leq 0$ 。又由(16)式,可知:

$$H'(s) = 2KH(s) + e^{2Ks} \int_M \partial_s(\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h)) \cdot \frac{F^2(\nabla u_s)}{2} dm + e^{2Ks} \int_M \hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h) \cdot \partial_s \left[\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right] dm。$$

由(8),(10)式可知:

$$\begin{aligned} \int_M \partial_s(\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h)) \cdot \frac{F^2(\nabla u_s)}{2} dm &= - \int_M \Delta^{\nabla u_s}(\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h)) \cdot \frac{F^2(\nabla u_s)}{2} dm = \int_M d\left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2}\right) (\nabla^{\nabla u_s} \hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h)) dm = \\ &= \int_M d(\hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h)) \left[\nabla^{\nabla u_s} \left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right) \right] dm = - \int_M \hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h) \cdot \Delta^{\nabla u_s} \left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right) dm。 \end{aligned}$$

再由(12)式, $H'(s)$ 可以重新写成:

$$H'(s) = e^{2Ks} \int_M \hat{P}_{s,t}^{\nabla u}(h) \left\{ KF^2(\nabla u_s) - \Delta^{\nabla u_s} \left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right) + d(\Delta u_s)(\nabla u_s) \right\} dm。$$

进一步,令 $t=s$, 由(10)式,有 $\hat{P}_{s,s}^{\nabla u}(h)=h$ 。因此, $H'(s)$ 可以写成:

$$H'(s) = e^{2Ks} \int_M h \cdot \left\{ KF^2(\nabla u_s) - \Delta^{\nabla u_s} \left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right) + d(\Delta u_s)(\nabla u_s) \right\} dm。$$

于是,由 $H'(s) \leq 0$ 及 $h > 0$ 的任意性,有:

$$KF^2(\nabla u_s) - \Delta^{\nabla u_s} \left(\frac{F^2(\nabla u_s)}{2} \right) + d(\Delta u_s)(\nabla u_s) \leq 0。 \quad (17)$$

最后,在(17)式中令 $s \rightarrow 0^+$, 可得 $KF^2(\nabla u) - \Delta^{\nabla u} \left(\frac{F^2(\nabla u)}{2} \right) + d(\Delta u)(\nabla u) \leq 0$ 。

这就证明了 $\Delta^{\nabla u} \left(\frac{F^2(\nabla u)}{2} \right) - d(\Delta u)(\nabla u) \geq KF^2(\nabla u)$ 。从而定理1得证。

证毕

3 热方程整体解的构造

热方程整体解的构造是研究芬斯勒流形上整体几何与分析问题的重要基础之一。本节着重给出热方程的若干整体解。

定理2 给定一个具有体积测度 m 的芬斯勒流形 (M, F, m) 。设 $f \in H_0^1(M)$ 是满足 $\Delta f = -\lambda f$ 的一个特征函数, 这里 $\lambda \geq 0$ 。则 $u_t(x) = e^{-\lambda t} f(x)$ 是热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$ 的整体解。

证明 首先证明 $\partial_t u_t(x) = \Delta u_t(x)$ 。由已知, $\Delta f = -\lambda f$, 因此有:

$$\partial_t u_t(x) = -\lambda e^{-\lambda t} f(x) = e^{-\lambda t} \Delta f(x), \quad (18)$$

$$\frac{\partial u_t(x)}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} (e^{-\lambda t} f(x)) = e^{-\lambda t} \frac{\partial f(x)}{\partial x^i}。 \quad (19)$$

于是,由(3),(19)式,则 $\nabla u_t(x) = g^{*ij}(du(x)) \frac{\partial u_t(x)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = e^{-\lambda t} g^{*ij}(du(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$ 。

由于 $du_t(x) = e^{-\lambda t} df(x)$ 且 $e^{-\lambda t} > 0$, 所以 $g^{*ij}(du_t(x)) = g^{*ij}(df(x))$, 从而有:

$$\nabla u_t(x) = e^{-\lambda t} g^{*ij}(df(x)) \frac{\partial f(x)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} = e^{-\lambda t} \nabla f(x)。$$

因此,由(6)式可得:

$$\Delta u_t(x) = \text{div}(e^{-\lambda t} \nabla f(x)) = e^{-\lambda t} \Delta f(x)。 \quad (20)$$

比较(18),(20)式,可知 $\partial_t u_t(x) = \Delta u_t(x)$ 。

为证明 $u_t(x)$ 是热方程的整体解,由注1,只需证明 $u_t(x) \in L^2(M)$, 即证明:

$$\int_M |u_t(x)|^2 dx = e^{-2\lambda t} \int_M f^2(x) dx < \infty。$$

事实上,由 $f \in H_0^1(M)$, 可知 $\int_M f^2(x) dx < \infty$ 。从而对任意的 $t \geq 0$, 总有: $\int_M |u_t(x)|^2 dx < \infty$, 即 $u_t(x) \in L^2(M)$ 。

综上,这就证明了 $u_t(x) = e^{-\lambda t} f(x)$ 是热方程的整体解。

证毕

下面构造热方程的另一整体解。众所周知,一般空间上热方程整体解的构造是十分困难的。这里主要在欧氏空间上构造出热方程的一个整体解。

定理 3 设 $(\mathbf{R}^n, \|\cdot\|, m)$ 是具有标准欧氏测度和体积形式的空间, 则对于任意给定的 $\mathbf{y} \in \mathbf{R}^n, u_t(x) = (t+t_0)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}}$ 是热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$ 的整体解, 这里 $t_0 > 0$ 为常数。

证明 首先证明 $\partial_t u_t(x) = \Delta u_t(x)$ 。由已知可得:

$$\begin{aligned} \partial_t u_t(x) &= -\frac{n}{2}(t+t_0)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} + (t+t_0)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} \frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)^2} = \\ &= -\frac{1}{2}(t+t_0)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} \left(n - \frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{2(t+t_0)} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

由假设, $dm = dx^1 \wedge dx^2 \wedge \cdots \wedge dx^n$ 且 $g_{ij} = \delta_{ij}$, 则 $\nabla u_t(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u_t(x)}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i}$ 。再由(5)式可得:

$$\Delta u_t(x) = \operatorname{div}(\nabla u_t(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u_t(x)}{\partial^2 x^i}. \quad (22)$$

易见:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_t}{\partial x^i} &= (t+t_0)^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} \right) = (t+t_0)^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} \left(-\frac{1}{4(t+t_0)} \right) \frac{\partial}{\partial x^i} (\|\mathbf{y}-x\|^2) = \\ &= \frac{1}{2}(t+t_0)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} (y^i - x^i). \end{aligned}$$

进一步可得:

$$\frac{\partial^2 u_t}{\partial^2 x^i} = \frac{1}{2}(t+t_0)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} \frac{\partial}{\partial x^i} \left[e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} (y^i - x^i) \right] = \frac{1}{2}(t+t_0)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} \left[\frac{(y^i - x^i)^2}{2(t+t_0)} - 1 \right]. \quad (23)$$

将(23)式代入(22)式, 整理可得:

$$\Delta u_t(x) = \frac{1}{2}(t+t_0)^{-\left(\frac{n}{2}+1\right)} e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} \left(\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{2(t+t_0)} - n \right). \quad (24)$$

比较(21), (24)式, 可知 $\partial_t u_t(x) = \Delta u_t(x)$ 。

为证明 $u_t(x)$ 为热方程的整体解, 由注 1 只需证明 $u_t(x) \in L^2(M)$ 。

由 $e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{2(t+t_0)}} \leq e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}}$, 有 $\int_M e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{2(t+t_0)}} dx \leq \int_M e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} dx$ 。进一步, 对积分 $\int_M e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} dx$ 作 n 维球坐标变换:

$$\begin{cases} y_1 - x_1 = 2\sqrt{t+t_0} r \cos \theta_1 \\ y_2 - x_2 = 2\sqrt{t+t_0} r \sin \theta_1 \cos \theta_2 \\ \dots\dots\dots \\ y_n - x_n = 2\sqrt{t+t_0} r \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cdots \sin \theta_{n-1} \end{cases}.$$

这里变换的 Jacobi 行列式为 $J = (2\sqrt{t+t_0})^n r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \sin^{n-3} \theta_2 \cdots \sin^2 \theta_{n-3} \sin \theta_{n-2}$, 其中 $0 \leq r < +\infty, 0 \leq \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-2} \leq \pi, 0 \leq \theta_{n-1} \leq 2\pi$ 。

于是, 对积分 $\int_M e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} dx$ 进一步整理可得:

$$\begin{aligned} \int_M e^{-\frac{\|\mathbf{y}-x\|^2}{4(t+t_0)}} dx &= \int_0^{+\infty} dr \int_0^\pi d\theta_1 \cdots \int_0^\pi d\theta_{n-2} \int_0^{2\pi} e^{-r^2} (2\sqrt{t+t_0})^n r^{n-1} \sin^{n-2} \theta_1 \cdots \sin \theta_{n-2} d\theta_{n-1} \leq \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \cdots \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{-r^2} (2\sqrt{t+t_0})^n r^{n-1} dr d\theta_1 \cdots d\theta_{n-2} d\theta_{n-1} = \\ &= 2\pi^{n-1} (2\sqrt{t+t_0})^n \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr = 2^{n+1} \pi^{n-1} (t+t_0)^{\frac{n}{2}} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr. \end{aligned}$$

又由 $\int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2n} dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{2^n} = \frac{\sqrt{\pi} \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}}$, 可知:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr &= \int_0^1 e^{-r^2} r^{n-1} dr + \int_1^{+\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr \leq \int_0^1 r^{n-1} dr + \int_1^{+\infty} e^{-r^2} r^{2n} dr \leq \\ &= \int_0^1 r^{n-1} dr + \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r^{2n} dr = \frac{1}{n} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

因此,对任意的 $t \geq 0$, 总有:

$$\int_M |u_t(x)|^2 dx = \int_M (t+t_0)^{-n} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{2(t+t_0)}} dx \leq (t+t_0)^{-n} \int_M e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4(t+t_0)}} dx \leq 2^{n+1} \pi^{n-1} (t+t_0)^{-\frac{n}{2}} \left(\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot (2n-1)!!}{2^{n+1}} \right) < \infty.$$

这就证明了 $\int_M |u_t(x)|^2 dx < +\infty$, 也就意味着 $u_t(x) \in L^2(M)$ 。

综上,证明了 $u_t(x) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|y-x\|^2}{4t}}$ 是热方程 $\partial_t u_t = \Delta u_t$ 的整体解。

证毕

参考文献:

- [1] OHTA S, STURM K T. Bochner-Weitzenböck formula and Li-Yau estimates on Finsler manifolds[J]. Advances in Mathematics, 2014, 252: 429-448.
- [2] OHTA S. Some functional inequalities on non-reversible Finsler manifolds[J]. Proceedings of the Indian Academy of Sciences-Mathematical Sciences, 2017, 127: 833-855.
- [3] XIAC, WANG G. A sharp lower bound for the first eigenvalue on Finsler manifolds[J]. Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse Nonlinéaire, 2013, 30: 983-996.
- [4] XIA Q L. A sharp lower bound for the first eigenvalue on Finsler manifolds with nonnegative weighted Ricci curvature[J]. Nonlinear Analysis, 2015, 117: 189-199.
- [5] OHTA S, STURM K T. Heat flow on Finsler manifold[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2009, 62: 1386-1433.
- [6] SHEN Z M. Lecture on Finsler geometry[M]. Singapore: World Scientific, 2001.
- [7] OHTA S. Finsler interpolation inequalities[J]. Calculus of Variations and Partial Differential Equations, 2009, 36: 211-249.
- [8] CHERN S S, SHEN Z M. Riemann-Finsler geometry[M]. Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 6. Singapore: World Scientific, 2005.
- [9] CHENG X Y. Some fundamental problems in global Finsler geometry[J]. AUT Journal of Mathematics and Computing, 2021, 2(2): 185-198.
- [10] LIEB E H, LOSS M. Analysis[M]. 2nd edition. Providence: American Mathematical Society, 2001.
- [11] EVANS L C. Partial differential equations[M]. Providence: American Mathematical Society, 1998.
- [12] BREZIS H. Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations[M]. New York: Springer, 2010.

Bochner Inequality and the Constructions of the Global Solution of the Heat Equation on Finsler Manifolds

CHENG Xinyue, QING Chunyan, TAN Cong

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] It mainly studies the Bochner formula and the problems related to Laplacian operators in Finsler geometry.

[Methods] The discussions are carried out by using the theories of partial differential equations and Sobolev space. [Findings] An important Bochner inequality is proved by using of L^2 -gradient estimation, the applications of the global solution of the heat equation on the Finsler manifold are discussed and several global solutions of the heat equation are constructed. [Conclusions] A sufficient condition for a kind of Bochner formulas to hold is given and some global solutions of the heat equation are constructed.

Keywords: Finsler manifold; weighted Ricci curvature; Bochner inequality; heat equation

(责任编辑 黄颖)