

(2+1)维非线性耦合型 Burgers 方程的各种精确行波解*

宋 明, 吴沈辉

(绍兴文理学院 数学系, 浙江 绍兴 312000)

摘要:【目的】研究(2+1)维非线性耦合型 Burgers 方程的各种精确行波解。【方法】应用动力系统分支方法。【结果】求出了(2+1)维非线性耦合型 Burgers 方程对应平面系统的分支相图及各种行波解。【结论】所得各种精确行波解是全新的结果。

关键词:分支方法; Burgers 方程; 分支相图; 行波解

中图分类号: O175

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2022)02-0076-08

著名的 Burgers 方程

$$u_t - 2uu_x - u_{xx} = 0 \quad (1)$$

是流体力学中的基本模型方程之一, 其中 $u(x, t)$ 是可微函数, uu_x 是对流过程项, u_{xx} 是扩散项。这个方程主要描述了由对流和扩散相反效应的相互作用所引起的通道中湍流流体的一些特征^[1], 该方程也可用于描述公路交通中车辆流的变化特征。

近些年来, 一些学者引入了不同形式的耦合型 Burgers 方程并进行了相关研究。2014 年, Wang 等人^[2]引入了如下(2+1)维非线性耦合型 Burgers 方程:

$$\begin{cases} u_t - 2uu_x - v_{xx} = 0 \\ v_t - u_{xy} - 2uv_{xy} - 2u_x v_y = 0 \end{cases} \quad (2)$$

特别地, 当 $u=v$ 且 $x=y$ 时, 方程(2)可化为著名的 Burgers 方程(1)。Wang 等人利用广义对称性和 Painlevé 分析证明了方程(2)是可积的。Wazaz^[1]利用 Cole-Hopf 变换以及简化的 Hirota 方法获得了方程(2)的单扭波解、二扭波解、三扭波解和广义扭波解。Unsal 和 Tascan^[3]利用 Backlund 变换和二元 Bell 多项式方法得到了方程(2)的单孤子解和二孤子解。

本文利用动力系统分支方法^[4-11]研究方程(2)的各类精确行波解。首先求出(2+1)维非线性耦合型 Burgers 方程对应平面系统的分支相图, 然后通过沿一些特殊的轨线积分, 求出方程(2)的各种精确行波解, 这些解包括精确扭波解、奇异波解、周期波解和孤立波解。

1 分支相图

假设

$$u(x, y, t) = \varphi(\zeta), v(x, y, t) = \psi(\zeta), \zeta = x + y - ct, \quad (3)$$

其中 c 表示波速。

将(3)式代入方程(2)中, 可得常微分方程组

$$\begin{cases} -c\varphi' - 2\varphi\varphi' - \psi'' = 0 \\ -c\psi' - \varphi'' - 2\varphi\psi' - 2\varphi'\psi = 0 \end{cases} \quad (4)$$

对(4)式中的第 1 个方程关于 ζ 积分 1 次, 并令积分常数为 0, 得到:

$$\psi' = -\varphi^2 - c\varphi. \quad (5)$$

* 收稿日期: 2021-06-08 修回日期: 2021-07-11 网络出版时间: 2022-03-29 13:54

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11775146)

第一作者简介: 宋明, 男, 教授, 博士, 研究方向为微分方程与动力系统, E-mail: songming12_15@163.com

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220328.1350.023.html>

对(4)式中的第2个方程关于 ζ 积分1次,得到:

$$-c\psi' - \varphi'' - 2\varphi\psi' = g, \quad (6)$$

其中: g 是积分常数。

把(5)式代入(6)式中,得到:

$$\varphi'' = 2\varphi^3 + 3c\varphi^2 + c^2\varphi - g. \quad (7)$$

显然(7)式可以转化为如下的平面系统:

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{d\zeta} = \rho \\ \frac{d\rho}{d\zeta} = 2\varphi^3 + 3c\varphi^2 + c^2\varphi - g \end{cases}, \quad (8)$$

易知系统(8)是一个哈密顿系统并有哈密顿函数 $H(\varphi, \rho) = \frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{2}\varphi^4 - c\varphi^3 - \frac{c^2}{2}\varphi^2 + g\varphi = h$, 其中 h 是哈密顿量。

为了研究系统(8)的分支相图,令 $f(\varphi) = 2\varphi^3 + 3c\varphi^2 + c^2\varphi - g$ 。当 $g=0$ 时,函数 $f(\varphi)$ 有极大值点 $\varphi_- = \frac{-3c-\sqrt{3}c}{6}$, 极小值点 $\varphi_+ = \frac{-3c+\sqrt{3}c}{6}$, 极大值 $g_0 = f(\varphi_-) = \frac{c^3}{6\sqrt{3}}$, 极小值 $\overline{g_0} = f(\varphi_+) = -\frac{c^3}{6\sqrt{3}}$, 且方程 $f(\varphi)=0$

的3个实根分别为 $\varphi_0=0, \varphi_1=-\frac{c}{2}, \varphi_2=-c$ 。

当 $0 < g < g_0$ 时,方程 $f(\varphi)=0$ 有3个实根 $\varphi_3 \in \left(-c, \frac{-3c-\sqrt{3}c}{6}\right), \varphi_4 = \frac{-3c-2\varphi_3-\sqrt{c^2-12c\varphi_3-12\varphi_3^2}}{4}$ 和 $\varphi_5 = \frac{-3c-2\varphi_3+\sqrt{c^2-12c\varphi_3-12\varphi_3^2}}{4}$ 。

当 $g=g_0$ 时,方程 $f(\varphi)=0$ 有两个实根 $\varphi_- = \frac{-3c-\sqrt{3}c}{6}$ 和 $\varphi_6 = \frac{-3c+2\sqrt{3}c}{6}$ 。

利用微分方程定性理论和数学计算软件 Mathematica,可以得到系统(8)的分支相图(图1)。

2 精确行波解

本节通过对积分常数 g 的取值范围分别求解方程(2)的行波解。

I) 当 $g=0$ 时,从图1d中可以看出有通过鞍点 $(\varphi_2, 0)$ 和 $(\varphi_0, 0)$ 的两个异宿轨道 $\Gamma_1, \bar{\Gamma}_1$ 以及4个特殊轨道 $\Gamma_2, \bar{\Gamma}_2, \Gamma_3$ 和 $\bar{\Gamma}_3$, 它们的代数表达式为 $H(\varphi, \rho) = H(\varphi_0, 0)$, 即:

$$\rho = \pm \varphi(\varphi - \varphi_2), \quad (9)$$

其中: $\varphi_2 = -c$ 。

将(9)式代入系统(8)中第1个式子并沿着上述轨道积分可得如下定积分:

$$\pm \int_{\bar{\varphi}}^{\varphi} \frac{1}{\varphi(\varphi - \varphi_2)} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta, \quad (10)$$

其中初始值为 $\bar{\varphi} \in (\varphi_2, \varphi_1)$, 以及:

$$\pm \int_{\varphi}^{+\infty} \frac{1}{\varphi(\varphi - \varphi_2)} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta. \quad (11)$$

完成上述积分并利用(3)式和(5)式,可得方程(2)的两组扭波解:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \frac{c\bar{\varphi}\left(1 + \tanh \frac{c\zeta}{2}\right)}{c - (c + 2\bar{\varphi})\tanh \frac{c\zeta}{2}} \\ v(x, y, t) = \frac{2\bar{\varphi}(c + \bar{\varphi})\sinh \frac{c\zeta}{2}}{(c + 2\bar{\varphi})\sinh \frac{c\zeta}{2} - c\cosh \frac{c\zeta}{2}} \end{cases}, \quad (12)$$

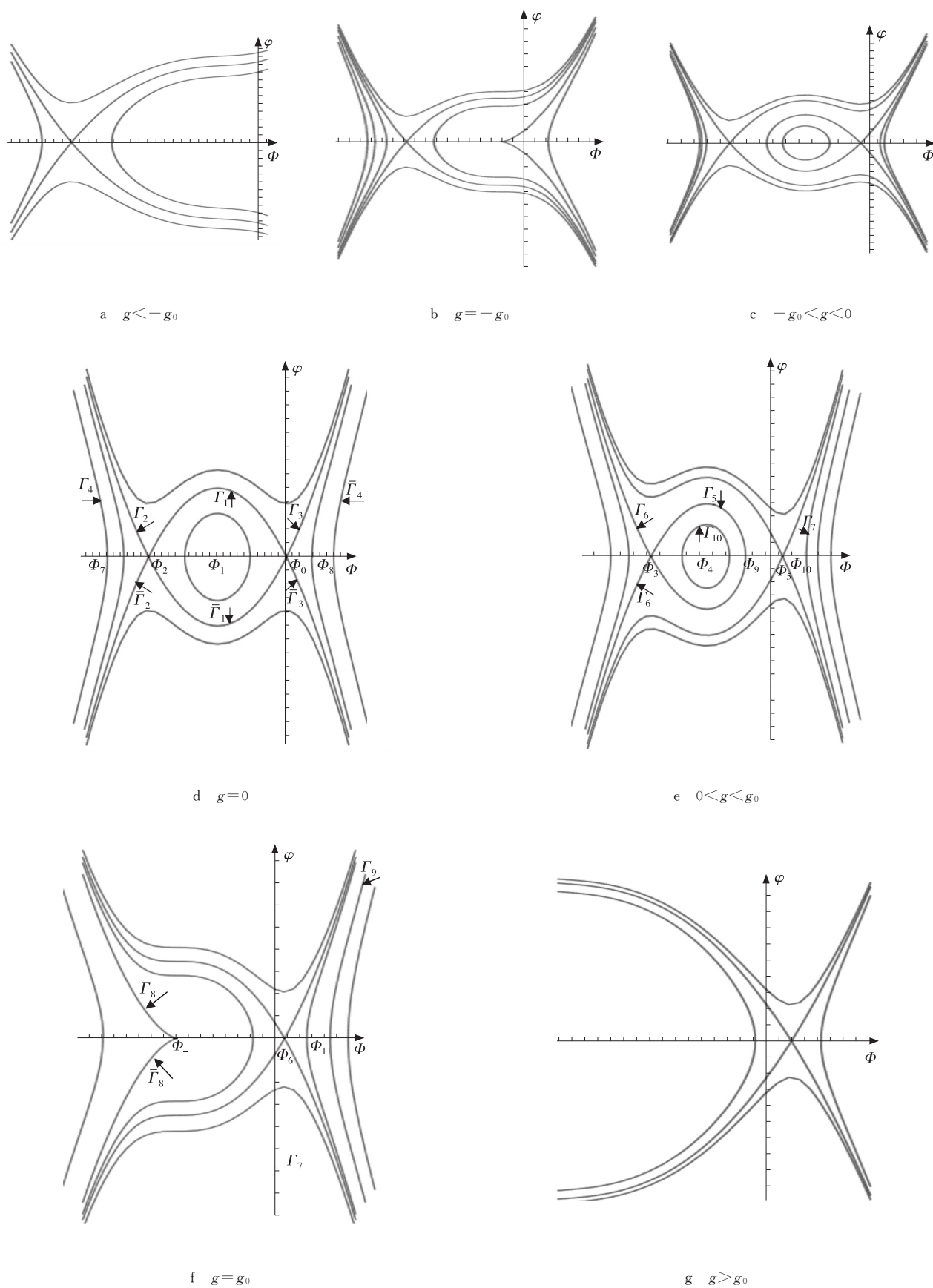


图 1 系统(8)的分支相图

Fig. 1 The phase portraits of system (8)

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \frac{c \bar{\varphi} \left(1 - \tanh \frac{c\zeta}{2}\right)}{c + (c + 2\bar{\varphi}) \tanh \frac{c\zeta}{2}} \\ v(x, y, t) = -\frac{2\bar{\varphi}(c + \bar{\varphi}) \sinh \frac{c\zeta}{2}}{(c + 2\bar{\varphi}) \sinh \frac{c\zeta}{2} + c \cosh \frac{c\zeta}{2}} \end{cases}, \quad (13)$$

及两组奇异波解:

$$\begin{cases} u_{\pm}(x, y, t) = -\frac{c}{2} \left(1 \pm \coth \frac{c\zeta}{2}\right) \\ v(x, y, t) = \frac{c}{2} \coth \frac{c\zeta}{2} \end{cases}, \quad (14)$$

同样,在图 1d 中,存在两个由 $H(\varphi, \rho) = H(\varphi_1, 0)$ 定义的特殊轨道 Γ_4 和 $\bar{\Gamma}_4$, 即

$$\rho = \pm(\varphi + \varphi_1) \sqrt{(\varphi - \varphi_7)(\varphi - \varphi_8)}, \quad (15)$$

其中: $\varphi_7 = \frac{-c - \sqrt{2c}}{2}$, $\varphi_8 = \frac{-c + \sqrt{2c}}{2}$ 。

把(15)式代入系统(8)中第 1 个式子并沿着上述轨道积分可得:

$$\pm \int_{\varphi_7}^{\varphi} \frac{1}{(\varphi - \varphi_1) \sqrt{(\varphi - \varphi_7)(\varphi - \varphi_8)}} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta, \quad (16)$$

$$\pm \int_{\varphi}^{\infty} \frac{1}{(\varphi - \varphi_1) \sqrt{(\varphi - \varphi_7)(\varphi - \varphi_8)}} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta. \quad (17)$$

完成上述积分并利用(3)式和(5)式,得到了方程(2)的 4 组周期波解:

$$\begin{cases} u_{\pm}(x, y, t) = -\frac{c}{2} \left(1 \pm \sqrt{2} \sec \frac{\sqrt{2}c\zeta}{2}\right) \\ v(x, y, t) = \frac{c}{4} \left(c\zeta - 2\sqrt{2} \tan \frac{\sqrt{2}c\zeta}{2}\right) \end{cases}, \quad (18)$$

$$\begin{cases} u_{\pm}(x, y, t) = -\frac{c}{2} \left(1 \pm \sqrt{2} \csc \frac{\sqrt{2}c\zeta}{2}\right) \\ v(x, y, t) = \frac{c}{4} \left(c\zeta + 2\sqrt{2} \cot \frac{\sqrt{2}c\zeta}{2}\right) \end{cases}. \quad (19)$$

注 1 取 $c=2, \bar{\varphi}=-1.5$, 绘制方程(2)的扭波解(12)的图像(图 2), 方程(2)的奇异波解(14)的图像(图 3)和系统(1)的周期波解(18)的图像(图 4)。

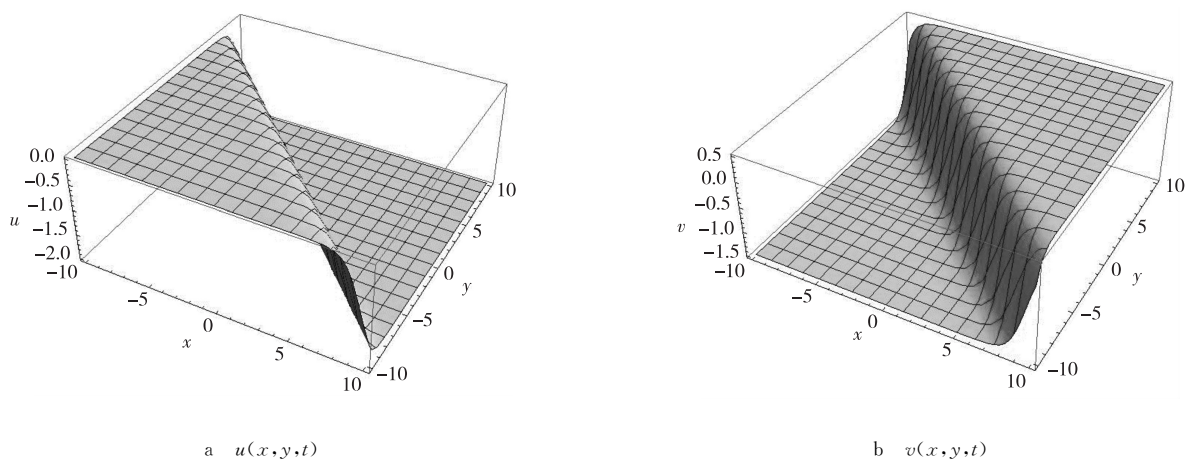
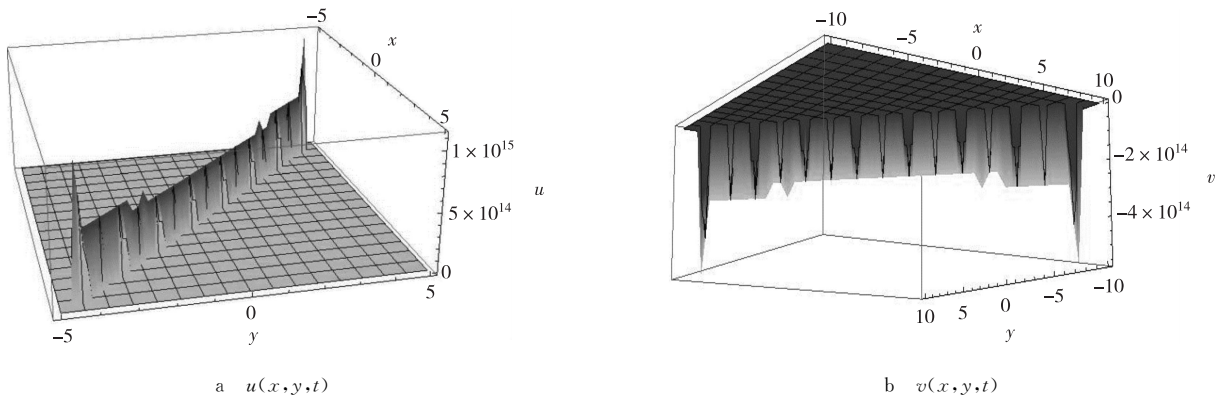
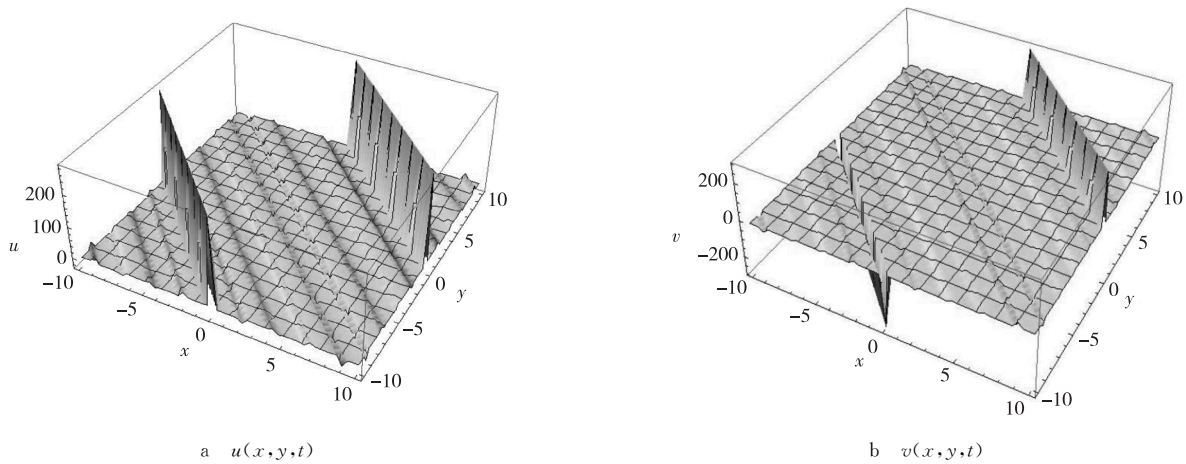


图 2 当 $t=0$ 时, 方程(2)的扭波解(12)的图像

Fig. 2 The graphs of the kink wave solutions(12) of equation (2) when $t=0$

图 3 当 $t=0$ 时, 方程(2)的奇异波解(14)的图像Fig. 3 The graphs of the singular wave solutions (14) of equation (2) when $t=0$ 图 4 当 $t=0$ 时, 方程(2)的周期波解(18)的图像Fig. 4 The graphs of the periodic wave solutions (18) of equation (2) when $t=0$

II) 当 $0 < g < g_0$ 时, 在图 1e 中, 存在一个过鞍点 $(\varphi_3, 0)$ 的同宿轨道 Γ_7 以及 3 个特殊轨道 $\Gamma_8, \bar{\Gamma}_8$ 和 Γ_9 , 它们的代数表达式为 $H(\varphi, \rho) = H(\varphi_3, 0)$, 即:

$$\rho = \pm (\varphi - \varphi_3) \sqrt{(\varphi - \varphi_9)(\varphi - \varphi_{10})}, \quad (20)$$

其中: $\varphi_3 \in (\varphi_2, \varphi_-)$ 是初始值, $\varphi_9 = -c - \varphi_3 - \sqrt{-2\varphi_3(c + \varphi_3)}$, $\varphi_{10} = -c - \varphi_3 + \sqrt{-2\varphi_3(c + \varphi_3)}$ 。

把(20)式代入系统(8)中第 1 个方程并沿着上述轨道积分可得:

$$\pm \int_{\varphi_9}^{\varphi} \frac{1}{(\varphi - \varphi_3) \sqrt{(\varphi - \varphi_9)(\varphi - \varphi_{10})}} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta, \quad (21)$$

$$\pm \int_{\varphi_{10}}^{\varphi} \frac{1}{(\varphi - \varphi_3) \sqrt{(\varphi - \varphi_9)(\varphi - \varphi_{10})}} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta, \quad (22)$$

$$\pm \int_{\varphi}^{+\infty} \frac{1}{(\varphi - \varphi_3) \sqrt{(\varphi - \varphi_9)(\varphi - \varphi_{10})}} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta. \quad (23)$$

完成上述积分, 利用(3)式和(5)式, 得到了方程(2)的一组孤立波解:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \varphi_3 - \frac{\alpha^2}{c + 2\varphi_3 - \sqrt{2}\beta \cosh(\alpha\zeta)} \\ v(x, y, t) = \frac{-\alpha\beta^4 \zeta \cosh(2\alpha\zeta) - \sqrt{2}\beta\gamma \sinh(\alpha\zeta) + \alpha\beta^2 (\delta\zeta - \alpha \sinh(2\alpha\zeta))}{\alpha(\delta - \beta^2 \cosh(2\alpha\zeta))} \end{cases}, \quad (24)$$

和两组奇异波解:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \varphi_3 - \frac{\alpha^2}{c + 2\varphi_3 + \sqrt{2}\beta \cosh(\alpha\zeta)} \\ v(x, y, t) = \frac{-\alpha\beta^4 \zeta \cosh(2\alpha\zeta) + \sqrt{2}\beta\gamma \sinh(\alpha\zeta) + \alpha\beta^2(\delta\zeta - \alpha \sinh(2\alpha\zeta))}{\alpha(\delta - \beta^2 \cosh(2\alpha\zeta))} \end{cases}, \quad (25)$$

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \varphi_3 + \frac{\alpha^2 \operatorname{csch}(\alpha\zeta)}{a + (c + 2\varphi_3) \tanh\left(\frac{\alpha\zeta}{2}\right)} \\ v(x, y, t) = \frac{\eta - 2\beta^4 \zeta \cosh(\alpha\zeta) + \alpha^3 \coth\left(\frac{\alpha\zeta}{2}\right) - 2\alpha\beta^2 \sinh\left(\frac{\alpha\zeta}{2}\right)}{2(\delta - \beta^2 \cosh(\alpha\zeta))} \end{cases} \quad (26)$$

其中: $\alpha = \sqrt{c^2 + 6c\varphi_3 + 6\varphi_3^2}$, $\beta = \sqrt{-\varphi_3(c + \varphi_3)}$, $\gamma = c^3 + 8c^2\varphi_3 + 18c\varphi_3^2 + 12\varphi_3^3$, $\delta = c^2 + 5c\varphi_3 + 5\varphi_3^2$, $\eta = c^3 - 2c^2\varphi_3(c\zeta - 4) + 6c\varphi_3^2(3 - 2c\zeta) + 4\varphi_3^3(3 - 5c) - 10\varphi_3^4\zeta$.

注2 取 $c=2$, $\varphi_3=-1.99$, 可以得到方程(2)的孤立波解(24)的图像(图5)和方程(2)的奇异波解(25)的图像(图6)。

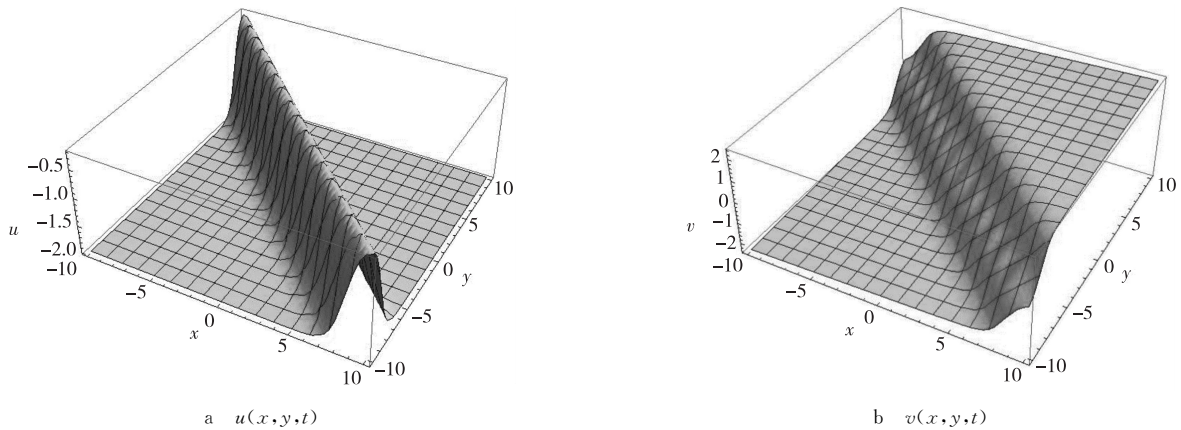


图5 当 $t=0$ 时, 方程(2)的孤立波解(24)的图像

Fig. 5 The graphs of the solitary wave solutions (24) of equation (2) when $t=0$

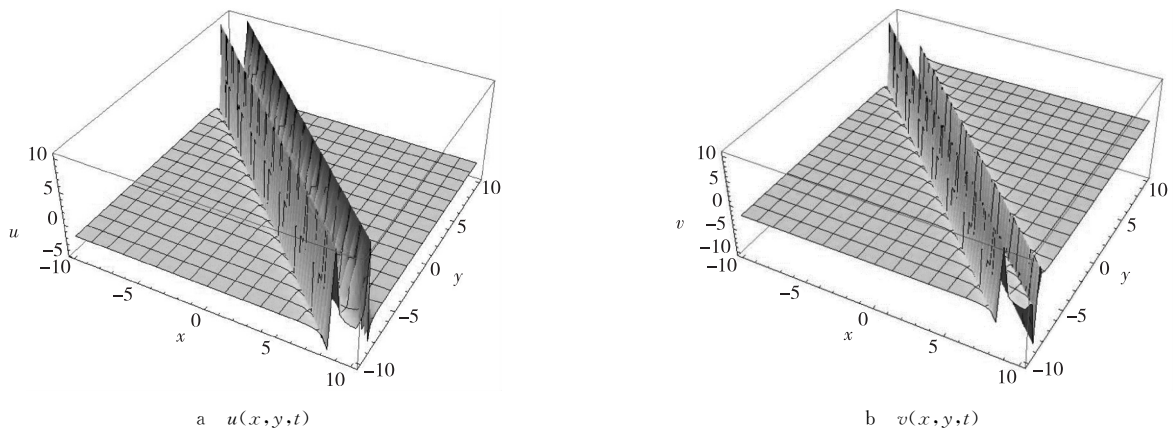


图6 当 $t=0$ 时, 方程(2)的奇异波解(25)的图像

Fig. 6 The graphs of the singular wave solutions (25) of equation (2) when $t=0$

Ⅲ) 当 $g=g_0$, 在图 1f 中, 可以看到通过退化鞍点 $(\varphi_-, 0)$ 的两个特殊轨道 Γ_8 和 $\bar{\Gamma}_8$ 以及特殊轨道 Γ_9 , 它们的代数表达式为 $H(\varphi, z) = H(\varphi_-, 0)$, 即:

$$\rho = \pm \frac{a}{2} (\varphi - \varphi_-) \sqrt{(\varphi - \varphi_-)(\varphi - \varphi_{11})}, \quad (27)$$

其中: $\varphi_{11} = \frac{-c + \sqrt{3}c}{2}$ 。

把(27)式代入系统(8)中第 1 个方程并沿着上述轨道积分可得:

$$\pm \int_{\varphi_{11}}^{\varphi} \frac{1}{(\varphi - \varphi_-) \sqrt{(\varphi - \varphi_-)(\varphi - \varphi_{11})}} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta, \quad (28)$$

$$\pm \int_{\varphi}^{+\infty} \frac{1}{(\varphi - \varphi_-) \sqrt{(\varphi - \varphi_-)(\varphi - \varphi_{11})}} d\varphi = \int_0^{\zeta} d\zeta. \quad (29)$$

完成上述积分并利用(3)式和(5)式,得到了方程(2)的 3 组奇异波解:

$$\begin{cases} u(x, y, t) = \frac{9(1-\sqrt{3})c - (3+\sqrt{3})c^3 \zeta^2}{6(c^2 \zeta^3 - 3)} \\ v(x, y, t) = \frac{c^2}{6} \left(\zeta + \frac{12\zeta}{c^2 \zeta^2 - 3} \right) \end{cases}, \quad (30)$$

$$\begin{cases} u(x, y, t) = -\frac{12\sqrt{3} + 6(1+\sqrt{3})c\zeta + (3+\sqrt{3})c^2 \zeta^2}{6\zeta(c\zeta + 2\sqrt{3})} \\ v(x, y, t) = \frac{1}{6} \left(\frac{6}{\zeta} + c^2 \zeta + \frac{6c}{c\zeta + 2\sqrt{3}} \right) \end{cases}, \quad (31)$$

$$\begin{cases} u(x, y, t) = -\frac{12\sqrt{3} - 6(1+\sqrt{3})c\zeta + (3+\sqrt{3})c^2 \zeta^2}{6\zeta(c\zeta - 2\sqrt{3})} \\ v(x, y, t) = \frac{1}{6} \left(\frac{6}{\zeta} + c^2 \zeta + \frac{6c}{c\zeta - 2\sqrt{3}} \right) \end{cases}. \quad (32)$$

注 3 取 $c=2$, 可得方程(2)的奇异波解(30)的图像(图 7)和方程(2)的奇异波解(31)的图像(图 8)。

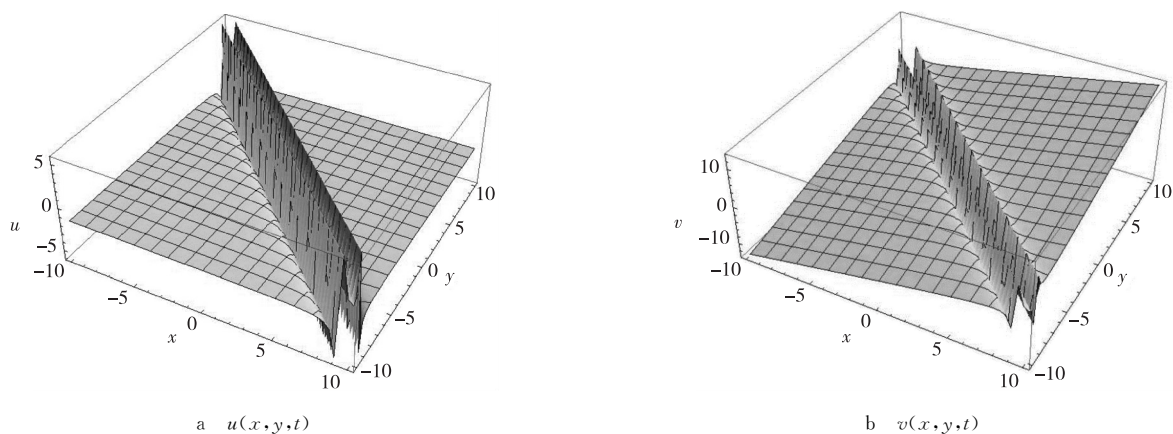


图 7 当 $t=0$ 时, 方程(2)的奇异波解(30)的图像

Fig. 7 The graphs of the singular wave solutions (30) of equation (2) when $t=0$

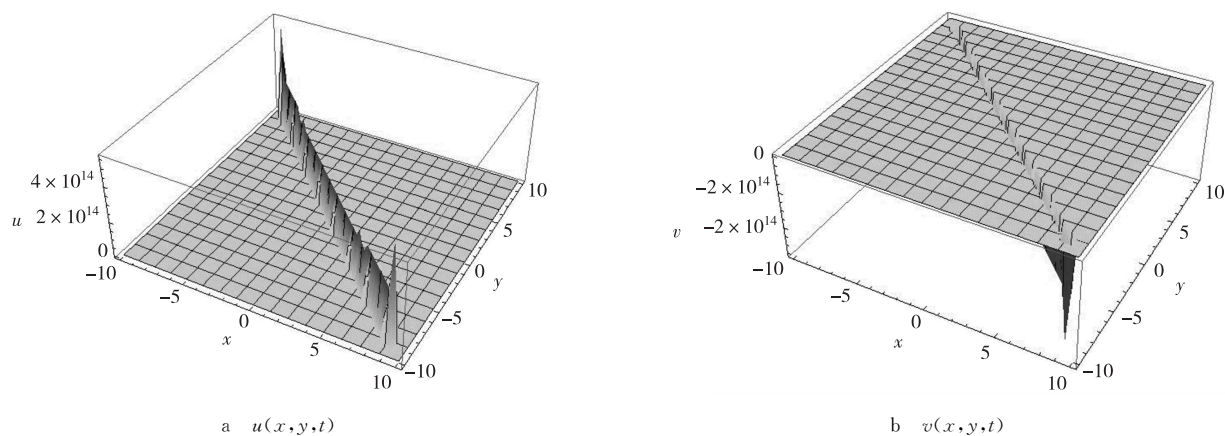


图 8 当 $t=0$ 时, 方程(2)的奇异波解(31)的图像

Fig. 8 The graphs of the singular wave solutions (31) of equation (2) when $t=0$

3 结束语

本文利用平面动力系统分支方法,得到了平面系统的分支相图和方程(2)的14组精确行波解。通过与文献[1]中的单扭波解(14)比较,本文得到的扭波解(12)是全新的扭波解。通过与文献[3]中的单孤子解比较,本文得到的孤立波解(24)也是新的孤立波解。其余的奇异波解和周期波解都是文献[1,3]中没有求出的。分支方法是求解非线性波方程精确解的一种有效方法,相信该方法也可以应用于其他偏微分方程,并可以得到更多新的结果。

参考文献:

- [1] WAZWAZ A M. Multiple kink solutions for two coupled integrable $(2+1)$ -dimensional systems[J]. Applied Mathematics Letters, 2016, 58: 1-6.
- [2] WANG J Y, LIANG Z F, TANG X Y. Infinitely many generalized symmetries and Painlevé analysis of a $(2+1)$ -dimensional Burgers system[J]. Physica Scripta, 2014, 89: 025201.
- [3] UNSAL O, TASCAN F. Soliton solutions, Bäcklund transformation and Lax pair for coupled Burgers system via Bell polynomials[J]. Zeitschrift für Naturforschung A, 2015, 70: 359-363.
- [4] LI J B. Bifurcations and exact solutions in invariant manifolds for nonlinear wave equation[M]. Beijing: Science Press, 2019.
- [5] LIU Z R, YANG C X. The application of bifurcation method to a higher-order KDV equation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 275: 1-12.
- [6] SONG M, LIU Z R, ESSAID Z, et al. Singular soliton solution and bifurcation analysis of the Klein-Gordon equation with power law nonlinearity[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2013, 8: 191-201.
- [7] SONG M, LIU Z R. Periodic wave solutions and their limits for the ZK-BBM equation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2014, 232: 9-26.
- [8] SONG M, LIU Z R, YANG C X. Periodic wave solutions and their limits for the modified KdV-KP equations[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2015, 31: 1043-1056.
- [9] LI J B, CHEN G R, SONG J. Bifurcations of traveling wave solutions for fully nonlinear water waves with surface tension in the generalized Serre-Green-Naghdi equations[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2020, 30(1): 2050019.
- [10] WEN Z S. The generalized bifurcation method for deriving exact solutions of nonlinear space-time fractional partial differential equations[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 366: 124735.
- [11] SONG M, WANG B D, CAO J. Bifurcation analysis and exact traveling wave solutions for $(2+1)$ -dimensional generalized modified dispersive water wave equation[J]. Chinese Physics B, 2020, 29(10): 100206.

Various Exact Traveling Wave Solutions for a $(2+1)$ -Dimensional Nonlinear Coupled Burgers Equation

SONG Ming, WU Shenhui

(Department of Mathematics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang 312000, China)

Abstract: [Purposes] Various exact traveling wave solutions of $(2+1)$ dimensional nonlinear coupled Burgers equation are studied.

[Methods] The dynamical system bifurcation method. [Findings] The bifurcation phase portraits of $(2+1)$ dimensional nonlinear coupled Burgers equation corresponding to the plane system and its various exact traveling wave solutions are obtained.

[Conclusions] The exact traveling wave solutions are new results.

Keywords: Bifurcation method; Burgers equation; Bifurcation phase portraits; traveling wave solutions

(责任编辑 许 甲)