

非线性 Gilson-Pickering 方程的移动最小二乘近似无网格法^{*}

谭 渝, 李小林

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】利用适定移动最小二乘近似和预测校正迭代算法等技术,建立数值分析 Gilson-Pickering 方程的移动最小二乘近似无网格方法。【方法】首先采用差分格式离散时间导数,然后利用适定移动最小二乘近似离散空间导数,最后使用配点技术得到了非线性代数方程组。【结果】数值算例表明该方法能有效地求解具有三阶偏导数且依赖于时间变量的非线性 Gilson-Pickering 方程。【结论】该方法比有限元方法的精度更高。

关键词:无网格方法;适定移动最小二乘近似;非线性 Gilson-Pickering 方程;孤立子

中图分类号:O241.82

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)02-0084-05

Gilson-Pickering 方程由 Gilson 等人^[1]在 1995 年提出,是一类重要的描述孤立子波传播过程的非线性三阶偏微分方程^[2-3]。著名的 Rosenau-Hyman 方程、Fornberg-Whitham 方程和 Fuchssteiner-Fokas-Camassa-Holm 方程均是该方程的特殊形式。在一些特殊情况下,该方程的解析解可由 tanh-coth 等方法^[4-5]推导出来。由于 Gilson-Pickering 方程的解析解不容易得到,近些年来,有限元方法^[6]和径向基函数方法^[7]被用来分析该方程在一般情形下的数值解。2018 年,Zabihi 等人^[7]采用径向基函数方法求解了 Gilson-Pickering 方程。2019 年,Turgut^[6]采用有限元方法研究了 Gilson-Pickering 方程的数值解。

无网格方法在近 30 年得到了迅速发展,以克服传统数值方法的缺点,如有限差分法和有限元法中与网格划分相关的问题,移动最小二乘近似无网格方法^[8]是一类重要且常用的无网格方法。无网格方法的另一个突出优点是无网格形状函数和无网格解的生成精度高。在过去 20 多年,移动最小二乘近似无网格方法分析了大量不依赖于时间变量的椭圆型边值问题^[8-10],取得了重要进展。近些年来,移动最小二乘近似无网格方法求解了一些依赖于时间变量的二阶偏微分方程^[11-12]。

本文将用移动最小二乘近似无网格方法数值分析依赖于时间变量的非线性 Gilson-Pickering 方程。在该方法中,首先采用差分格式离散时间导数,然后利用适定移动最小二乘近似^[11]对空间导数进行离散,最后使用配点技术得到了可以用预测校正迭代算法数值求解的非线性代数方程组。理论分析了迭代过程的收敛性,最后数值算例验证了该方法的有效性。

1 非线性 Gilson-Pickering 方程的移动最小二乘近似无网格法

1.1 时间离散

考虑以下 Gilson-Pickering 方程:

$$u_t - \varepsilon u_{xxt} + 2\kappa u_x - uu_{xx} - \alpha uu_x - \beta u_x u_{xx} = 0, x \in \Omega = (a, b), 0 < t \leq T, \quad (1)$$

初始条件为:

$$u(x, 0) = f(x), a \leq x \leq b. \quad (2)$$

边界条件为:

$$u(x, t) = u_0(x, t), x \in \Gamma = \{a, b\}, 0 < t \leq T. \quad (3)$$

^{*} 收稿日期:2020-05-29 修回日期:2021-04-14 网络出版时间:2022-03-30 13:03

资助项目:国家自然科学基金(No. 11971085);重庆市高校创新研究群体(No. CXQT19018);重庆市教育委员会科学技术研究重大项目(No. KJZD-M201800501)

第一作者简介:谭渝,女,研究方向为微分方程的数值解法,E-mail:1478813841@qq.com;通信作者:李小林,男,教授,博士,E-mail:lxlmath@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220328.1342.017.html

其中: u 是未知函数, $\epsilon, \kappa, \alpha, \beta$ 是参数, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$, $u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $u_{xxx} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}$, $u_{xxt} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$ 。

根据文献[7], (1)式的时间离散形式为:

$$\frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} - \epsilon \frac{u_{xx}^{k+1} - u_{xx}^k}{\tau} + \frac{1}{2} [2\kappa(u_x^{k+1} + u_x^k) - (u^{k+1}u_{xxx}^{k+1} + u^k u_{xxx}^k) - \alpha(u^{k+1}u_x^{k+1} + u^k u_x^k) - \beta(u_x^{k+1}u_{xx}^{k+1} + u_x^k u_{xx}^k)] = 0. \quad (4)$$

其中: τ 是时间步长, $u^k(x) = u(x, k\tau)$ 。整理(4)式可得:

$$u^{k+1} + \kappa\tau u_x^{k+1} - \epsilon u_{xx}^{k+1} - 0.5\tau(\alpha u^{k+1}u_x^{k+1} + u^{k+1}u_{xxx}^{k+1} + \beta u_x^{k+1}u_{xx}^{k+1}) = u^k - \kappa\tau u_x^k - \epsilon u_{xx}^k + 0.5\tau(\alpha u^k u_x^k + u^k u_{xxx}^k + \beta u_x^k u_{xx}^k), k=0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

(5)式在迭代计算时需要 u^0 。当 $k=0$ 时, 由(2)式有:

$$u^0(x) = f(x), x \in \Omega. \quad (6)$$

在(5)式中令 $k=0$, 再结合(6)式, 有:

$$u^1 + \kappa\tau u_x^1 - \epsilon u_{xx}^1 - 0.5\tau(\alpha u^1 u_x^1 + u^1 u_{xxx}^1 + \beta u_x^1 u_{xx}^1) = f - \kappa\tau f_x - \epsilon f_{xx} + 0.5\tau(\alpha f f_x + f f_{xxx} + \beta f_x f_{xx}). \quad (7)$$

由(6), (7)式, 依赖于时间的 Gilson-Pickering 方程(1)~(3)可转化为如下与时间无关的微分方程:

$$u^1 + \kappa\tau u_x^1 - \epsilon u_{xx}^1 - 0.5\tau(\alpha u^1 u_x^1 + u^1 u_{xxx}^1 + \beta u_x^1 u_{xx}^1) = f - \kappa\tau f_x - \epsilon f_{xx} + 0.5\tau(\alpha f f_x + f f_{xxx} + \beta f_x f_{xx}), \quad (8)$$

$$u^{k+1} + \kappa\tau u_x^{k+1} - \epsilon u_{xx}^{k+1} - 0.5\tau(\alpha u^{k+1}u_x^{k+1} + u^{k+1}u_{xxx}^{k+1} + \beta u_x^{k+1}u_{xx}^{k+1}) = u^k - \kappa\tau u_x^k - \epsilon u_{xx}^k + 0.5\tau(\alpha u^k u_x^k + u^k u_{xxx}^k + \beta u_x^k u_{xx}^k), k=1, 2, \dots. \quad (9)$$

根据(3)式, (8)和(9)式对应的边界条件为:

$$u^{k+1}(x) = u_0^{k+1}(x) \triangleq u_0(x, (k+1)\tau), x \in \Gamma, k=0, 1, 2, \dots. \quad (10)$$

1.2 空间离散

将 $[a, b]$ 用 N 个节点 $\{x_j\}_{j=1}^N$ 离散, 基于这些节点可构造适定移动最小二乘近似形函数 $\Phi(x)^{[11]}$, 从而未知函数 $u^k(x)$, $u_x^k(x)$, $u_{xx}^k(x)$ 和 $u_{xxx}^k(x)$ 可分别近似为:

$$u^k(x) = \Phi(x)u^k, u_x^k(x) = \Phi_x(x)u^k, u_{xx}^k(x) = \Phi_{xx}(x)u^k, u_{xxx}^k(x) = \Phi_{xxx}(x)u^k. \quad (11)$$

其中: $k=0, 1, 2, \dots$, $u^k = [u_1^k, u_2^k, \dots, u_N^k]^T$, $\Phi(x) = [\Phi_1(x), \Phi_2(x), \dots, \Phi_N(x)]$ 。

为了得到未知系数向量 u^k 并且简化表示, 假设 $\{x_j\}_{j=1}^{N-2} \subset \Omega$ 和 $\{x_j\}_{j=N-1}^N \subset \Gamma$ 。(8)~(10)式组成的边值问题可以迭代求解。将(11)式代入(9)式并使之在所有内部节点 $\{x_j\}_{j=1}^{N-2} \subset \Omega$ 满足可得:

$$\begin{aligned} & \{\Phi(x_j) + \kappa\tau\Phi_x(x_j) - \epsilon\Phi_{xx}(x_j)\}u^{k+1} - 0.5\tau\{\alpha\Phi(x_j)u^{k+1}\Phi_x(x_j)u^{k+1} + \\ & \quad \Phi(x_j)u^{k+1}\Phi_{xxx}(x_j)u^{k+1} + \beta\Phi_x(x_j)u^{k+1}\Phi_{xx}(x_j)u^{k+1}\} = \\ & \Phi(x_j)u^k - \kappa\tau\Phi_x(x_j)u^k - \epsilon\Phi_{xx}(x_j)u^k + 0.5\tau\{\alpha\Phi(x_j)u^k\Phi_x(x_j)u^k + \\ & \quad \Phi(x_j)u^k\Phi_{xxx}(x_j)u^k + \beta\Phi_x(x_j)u^k\Phi_{xx}(x_j)u^k\}, k=1, 2, \dots. \end{aligned} \quad (12)$$

由(10), (11)式, 边界节点 $x_j \in \Gamma$ 处的边界条件为:

$$u^{k+1}(x_j) = \Phi(x_j)u^{k+1} = u_0^{k+1}(x_j). \quad (13)$$

联立(12), (13)式可得如下非线性代数方程组:

$$Au^{k+1} - 0.5\tau f(u^{k+1}) = b^k + 0.5\tau f(u^k), k=1, 2, \dots, \quad (14)$$

其中:

$$[A]_{ij} = \begin{cases} \Phi(x_j) + \kappa\tau\Phi_x(x_j) - \epsilon\Phi_{xx}(x_j), j=1, 2, \dots, N-2 \\ \Phi(x_j), j=N-1, N \end{cases}, \quad (15)$$

$$[f(u^{k+1})]_j = \begin{cases} \alpha\Phi(x_j)u^{k+1}\Phi_x(x_j)u^{k+1} + \Phi(x_j)u^{k+1}\Phi_{xxx}(x_j)u^{k+1} + \beta\Phi_x(x_j)u^{k+1}\Phi_{xx}(x_j)u^{k+1}, j=1, 2, \dots, N-2 \\ 0, j=N-1, N \end{cases},$$

$$[b^k]_j = \begin{cases} [\Phi(x_j) - \kappa\tau\Phi_x(x_j) - \epsilon\Phi_{xx}(x_j)]u^k, j=1, 2, \dots, N-2 \\ u_0^{k+1}(x_j), j=N-1, N \end{cases}.$$

类似地, 在初始阶段 $k=0$, (8)式可以离散化为:

$$Au^1 - 0.5\tau f(u^1) = b^0, \quad (16)$$

其中:

$$[b^0]_j = \begin{cases} f(x_j) - \kappa \tau f_x(x_j) - \epsilon f_{xx}(x_j) + 0.5\tau [\alpha f(x_j)f_x(x_j) + f(x_j)f_{xx}(x_j) + \beta f_x(x_j)f_{xx}(x_j)], & j=1,2,\dots,N-2 \\ u_0^{(k+1)}(x_j), & j=N-1,N \end{cases}.$$

1.3 算法及其收敛性分析

(14)式是非线性方程组,不能直接求解。本文对非线性代数方程组(14)给出了以下预测校正迭代算法将非线性系统转化为线性系统进行迭代求解。显然,该算法可以直接用于非线性代数方程组(16)。

算法 1 取容忍误差 $\epsilon > 0$;

步骤 1, 令 $l=0, u^{k+1,l} = u^k$;

步骤 2, 令 $f(u^{k+1}) = f(u^{k+1,l})$, 然后将(14)式转化为线性系统:

$$Au^{k+1,l+1} = 0.5\tau f(u^{k+1,l}) + b^k + 0.5\tau f(u^k), \quad (17)$$

求解(17)式可得 $u^{k+1,l+1}$;

步骤 3, 如果 $\frac{\|u^{k+1,l+1} - u^{k+1,l}\|}{\|u^{k+1,l+1}\|} \leq \epsilon$, 算法停止, 输出 $u^{k+1} = u^{k+1,l+1}$, 否则将 l 更新为 $l+1$ 然后转到步骤 2。

定理 1 假设 $u \in C^3[a, b]$ 且如下矩阵 A_0 可逆:

$$[A_0]_{ij} = \begin{cases} \Phi(x_j) - \epsilon \Phi_{xx}(x_j), & j=1,2,\dots,N-2 \\ \Phi(x_j), & j=N-1,N \end{cases}, \quad (18)$$

则存一个正常数 δ , 当 $\tau < \delta$ 时, 算法 1 生成的序列 $\{u^{k+1,l}\}_{l=0}^\infty$ 收敛, 即 $\lim_{l \rightarrow \infty} u^{k+1,l} = u^{k+1}$ 。

证明 由(17)式可得:

$$Au^{k+1,l+2} = 0.5\tau f(u^{k+1,l+1}) + b^k + 0.5\tau f(u^k). \quad (19)$$

(19)式减去(17)式得到 $Au^{k+1,l+2} - Au^{k+1,l+1} = 0.5\tau [f(u^{k+1,l+1}) - f(u^{k+1,l})]$ 。从而有:

$$u^{k+1,l+2} - u^{k+1,l+1} = 0.5\tau A^{-1} [f(u^{k+1,l+1}) - f(u^{k+1,l})]。$$

因此有:

$$\|u^{k+1,l+2} - u^{k+1,l+1}\|_\infty \leq 0.5\tau \|A^{-1}\|_\infty \|f(u^{k+1,l+1}) - f(u^{k+1,l})\|_\infty. \quad (20)$$

由(15),(18)式得出 $\lim_{\tau \rightarrow 0} A = A_0$ 。此外, 矩阵 A_0 可逆导致范数 $\|A_0\|_\infty$ 存在。因此, 当 τ 足够小时 $\|A^{-1}\|_\infty$ 存在, 即存在一个正常数 C_A 使得:

$$\|A^{-1}\|_\infty \leq C_A. \quad (21)$$

当 $u \in C^3[a, b]$ 时, 存在 $L > 0$ 使得 $g(u) = uu_{xx} + \alpha uu_x + \beta u_x u_{xx}$ 满足 $|g(u_1) - g(u_2)| \leq L|u_1 - u_2|$, 从而有:

$$\|f(u^{k+1,l+1}) - f(u^{k+1,l})\|_\infty \leq LC_\varphi \|u^{k+1,l+1} - u^{k+1,l}\|_\infty, \quad (22)$$

其中: $C_\varphi = \max_{1 \leq j \leq N-1} \|\Phi_j\|_\infty$ 。

将(21),(22)式代入(20)式得到 $\|u^{k+1,l+2} - u^{k+1,l+1}\|_\infty \leq 0.5\tau LC_\varphi C_A \|u^{k+1,l+1} - u^{k+1,l}\|_\infty$, 取 τ 使得 $0.5\tau LC_\varphi C_A < 1$, 即 $\tau < \delta$, 其中 $\delta = \frac{2}{LC_\varphi C_A} > 0$, 则 $\|u^{k+1,l+2} - u^{k+1,l+1}\|_\infty < \|u^{k+1,l+1} - u^{k+1,l}\|_\infty$ 。该式表明误差是下降的, 所以 $\lim_{l \rightarrow \infty} \|u^{k+1,l+1} - u^{k+1,l}\|_\infty = 0$, 因此 $\{u^{k+1,l}\}_{l=0}^\infty$ 收敛于 u^{k+1} 。证毕

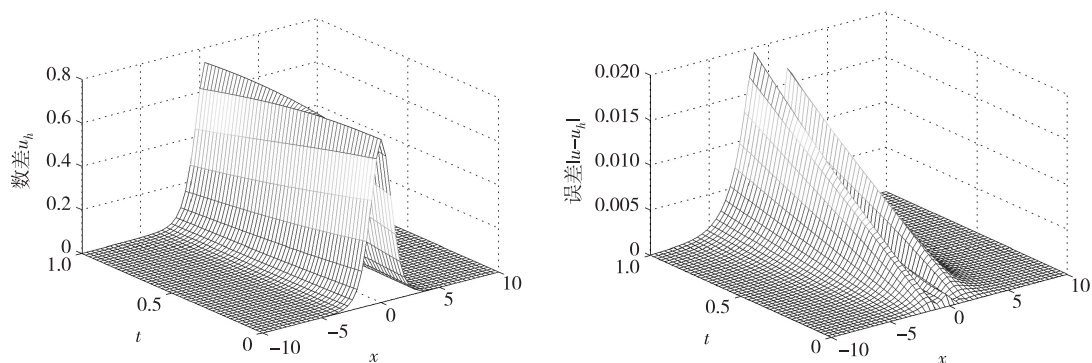
2 数值算例

考虑以下 Gilson-Pickering 方程^[6]:

$$u_t - u_{xxt} - u_x - uu_{xxx} + 3uu_x + 1.5u_x u_{xx} = 0, x \in \Omega = (-10, 10), 0 < t \leq 1。$$

初始条件和边界条件的选取使得该方程的解析解为: $u(x, t) = -0.75\{\tanh^2[\sqrt{3}(0.5x - 0.25t)] - 1\}$ 。

当时间步长 $\tau = 0.01$ 和空间步长 $h = 0.1$ 时, 图 1 给出了 u 的数值解 u_h 和相应误差 $|u - u_h|$, 图 2 给出了 $t = 0, 0.5, 1$ 时的解析解、数值解和误差, 图 3 给出了本文方法和文献[6]中的有限元法的 $L_\infty = \|u - u_h\|_\infty$ 误差。从图 1 和图 2 可以发现数值解和解析解吻合得很好, 本文方法有效地刻画了孤粒子波的传播, 从图 3 可以看出本文方法比有限元法的误差更小。



注: t 为相对时间, 无单位, 下同

图 1 算例的数值解和误差

Fig. 1 Numerical solution and the associated error for example

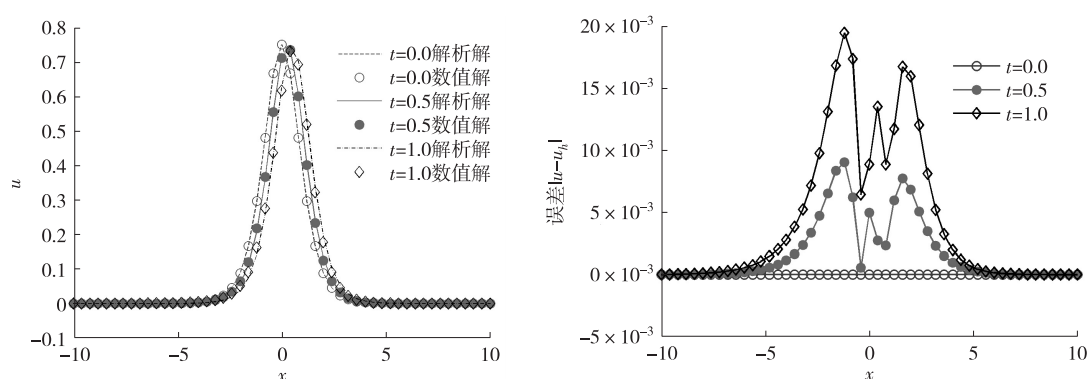


图 2 算例在 $t=0, 0.5$ 和 1 时的解析解、数值解和误差

Fig. 2 Analytical solution, numerical solution and error at $t=0, 0.5$ and 1 for example

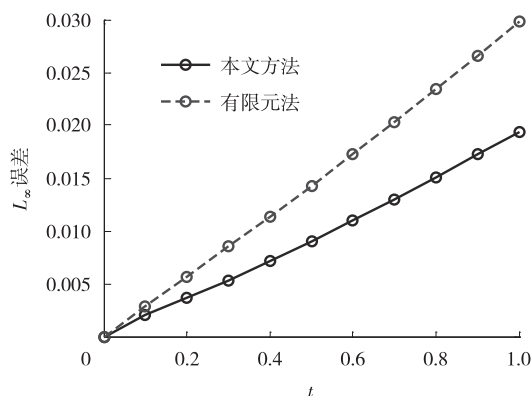


图 3 本文方法和有限元法的误差

Fig. 3 Results of error obtained using the presented method and the finite element method

3 结论

基于适定移动最小二乘近似和预测校正迭代算法, 本文建立了数值求解具有三阶偏导数且依赖于时间变量的非线性 Gilson-Pickering 方程的移动最小二乘近似无网格方法, 给出了详细的数值计算公式, 分析了迭代过程的收敛性。数值算例表明, 该方法能有效地求解 Gilson-Pickering 方程, 并且比有限元方法具有更高的计算精度。

参考文献:

- [1] GILSON C, PICKERING A. Factorization and Painleve analysis of a class of nonlinear third-order partial differential equations

- [J]. Journal of Physics A General Physics, 1999, 28(10): 2871-2888.
- [2] EBADI G, KARA A H, PETKOVIC M D, et al. Soliton solutions and conservation laws of the Gilson-Pickering equation[J]. Waves Random Complex Media, 2011, 21(2): 378-385.
- [3] CLARKSON P A, MANSFIELD E L, PRIESTLEY T J. Symmetries of a class of nonlinear third order partial differential equations[J]. Mathematical & Computer Modelling, 1996, 25(8/9): 195-212.
- [4] IRSHAD A, Mohyud S T. Tanh-Coth method for nonlinear differential equations[J]. Studies in Nonlinear Sciences, 2012, 3(1): 24-48.
- [5] LI C H, TANG S Q, HUANG W T, et al. Peakons, solitary patterns and periodic solutions for generalized Gilson-Pickering equations[J]. Far East Journal of Applied Mathematics, 2009, 35(3): 301-307.
- [6] TURGUT A, ASIT S, SHARANJEET D. Performance of a hybrid computational scheme on traveling waves and its dynamic transition for Gilson-Pickering equation[J]. International Journal of Modern Physics C, 2019, 30(4): 1950028.
- [7] ZABIHI F, SAFFARIAN M. A not-a-knot meshless method with radial basis functions for numerical solutions of Gilson-Pickering equation[J]. Engineering with Computers, 2018, 34(1): 33-44.
- [8] 程玉民. 无网格方法[M]. 北京: 科学出版社, 2015.
- CHENG Y M. Meshless method[M]. Beijing: Science Press, 2015.
- [9] ZHANG T, LI X L. Analysis of the element-free Galerkin method with penalty for general second-order elliptic problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 380: 125306.
- [10] LI X L, DONG H Y. The element-free Galerkin method for the nonlinear p -Laplacian equation[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2018, 75(7): 2549-2560.
- [11] LI X L. Meshless numerical analysis of a class of nonlinear generalized Klein-Gordon equations with a well-posed moving least squares approximation[J]. Applied Mathematical Modelling, 2017, 48(8): 153-182.
- [12] LI X L, ZHANG S G, WANG Y, et al. Analysis and application of the element-free Galerkin method for nonlinear Sine-Gordon and generalized Sinh-Gordon equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2016, 71(8): 1655-1678.

Analysis of Nonlinear Gilson-Pickering Equation by Moving Least Square Approximate Meshless Method

TAN Yu, LI Xiaolin

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] Using the well-posed moving least squares approximation and the predictor-corrector iterative algorithm, a meshless method is established for numerical analysis of the Gilson-Pickering equation using moving least squares approximation. [Methods] The difference formulas are used to discretize the time derivatives, the well-defined moving least squares approximation is used to discretize the space derivatives, and finally the collocation technique is used to obtain the nonlinear algebraic equations. [Findings] Numerical examples show that the method can effectively solve the nonlinear Gilson-Pickering equation with third-order partial derivatives and time-dependent variables. [Conclusions] This method is more accurate than the finite element method.

Keywords: Meshless method; well-posed moving least squares approximation; nonlinear Gilson-Pickering equation; soliton

(责任编辑 黄 颖)