

阶跃折射率波导上多频逆源问题的因式分解法^{*}

陈 容, 刘立汉, 郑秋燕

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究阶跃折射率波导上的多频逆源问题。【方法】通过远场数据可以唯一确定在观测方向具有法线的凸多边形的并集,它近似于源的位置和形状。【结果】在未知源满足强制假设条件下,利用因式分解法的思想来反演未知源的位置和形状。【结论】提出的方法对重构过程的数值实现进行了严格论证,并提供了数值例子说明这一方法的有效性与可行性。

关键词:多频逆源问题;因式分解法;凸多边形

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)02-0089-07

在各种数学物理反问题中,电磁波反问题近些年来引起了学者们的广泛关注。电磁波反问题在生物医学成像、无损检测、遥感、地球勘测以及工程技术中的系统识别等方面都有着广泛的应用^[1-9],该问题主要是利用近场数据或远场数据来重构物体的位置、形状及物理性质^[2,10-11]。关于逆源问题,在文献[12]中,Kusiak 和 Sylvester 提出了远场的凸散射支集的概念,并证明了该集合是任何产生它的源支集的凸包的子集,并且将这个结果扩展到了非均匀介质中^[13];当远场数据在有限对观测方向上测量时,Sylvester 和 Kelly^[14]提出了 Θ -凸多边形的概念(Θ 表示所有观测方向的集合),使得这个多边形必须包含在包含源的任意 Θ -凸多边形中,并证实了确实存在源,它能准确产生这些测量值,并且在问题的求解中进行了一个强制假设,即源的实部大于0,使得源支集的 Θ -凸包与对应的 Θ -凸散射支集一致。

反散射问题的非迭代重构方法近年来被广泛关注。Colton 和 Kirsh^[15-16]提出线性采样方法,但是该方法需要大量的入射波场和散射波场数据;为了减少入射波场和散射波场数据,Kirsh^[17]提出了因式分解方法,但这一方法计算较慢;Devaney^[18]提出了多重信号分类 MUSIC 算法,该方法是因式分解法的离散形式,不仅计算快,而且重构效果好;还有 Potthast^[19]提出的奇异源算法等。但这些方法大多使用单个频率的散射场测量来确定物体的位置或形状,对于多频数据的研究则相对较少,目前有 Griesmaier 和 Hanke^[20]提出的多频采样方法和 Luke^[21]提出的点源法等。

本文利用因式分解法来研究阶跃折射率波导上的多频逆源问题,来恢复单个或多个 Θ -凸多边形的并集,它们近似于源的支集,既包含在源集合的 Θ -凸包中,又包含在单个源支集的 Θ -凸包中。本文将分别考虑单对观测方向、多对观测方向及它们对应的卷积算子进行因式分解。数值实现则使用了文献[22]中提出的 MUSIC 重构算法的推广,利用给定离散远场数据来定位源的位置。

本文结构如下:第1节阐述问题相关的数学模型;第2节对于单对观测方向的多频测量,提出了因式分解法并加以分析;第3节对单对观测方向问题进行方法的数值实现;第4节将重构方法和数值实现扩展到有限对观测方向。

^{*} 收稿日期:2021-05-22 修回日期:2021-06-21 网络出版时间:2022-03-29 10:44

资助项目:国家自然科学基金青年项目(No. 12001075);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0167);重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJZD-K202100503;No. KJQN201900544);重庆市留学人员回国创新类项目(No. cx2021061;No. cx2019022);重庆师范大学青年拔尖人才培养计划(No. 02030307/0052);重庆市巴渝学者计划(No. BYQNCS2020002);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014)

第一作者简介:陈容,女,研究方向为数学物理反问题,E-mail: 1191432738@qq.com; **通信作者:**刘立汉,男,教授,博士,E-mail: mathsedu2013@163.com

网络出版地址:<https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220328.1400.025.html>

1 阶跃折射率波导上多频逆源问题

设 $D = \bigcup_{m=1}^M D_m \subseteq \mathbf{R}^3$, 其中 $\overline{D_i} \cap \overline{D_j} = \emptyset (i \neq j)$, $f \in L^\infty(D)$ 表示具有紧支集的电磁波源。在阶跃折射率波导中, 由源 f 在频带 $(0, K) \subseteq \mathbf{R}$ 上辐射的时谐波 $u \in H_{\text{loc}}^1(\mathbf{R}^3)$ 是如下 Helmholtz 方程的解:

$$\Delta u(\mathbf{x}) + k^2 n(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3, \quad (1)$$

其中: $k \in (0, K)$ 表示波数, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $n(\mathbf{x})$ 表示折射率, 且 $n(\mathbf{x}) = \begin{cases} n_{c_0}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < T \\ n_{c_1}, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \geq T \end{cases}$, 这里 n_{c_0}, n_{c_1}, T 是正

常数。假设仅在有限对观测方向对远场进行观测 $\{\pm \boldsymbol{\beta}_1, \pm \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \pm \boldsymbol{\beta}_i\} = \omega \subseteq S^2$, 其中 $S^2 = \{\boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}^3 \mid |\boldsymbol{\beta}| = 1\}$ 。

用 $\boldsymbol{\beta} \in S^2$ 表示入射方向, 时谐平面波的入射场则表示为 $u^i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}; k) = e^{ik\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta}} (\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3)$, $u = u^i + u^s$ 是总场, $u^s = u^s(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}; k)$ 表示散射场且满足 Sommerfeld 辐射条件:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left(\frac{\partial u^s}{\partial r} - iku^s \right) = 0, r = |\mathbf{x}|.$$

根据 u 是 Helmholtz 方程的解, 则 u 的渐近性为^[23]:

$$u(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}; k) = C_k \frac{e^{ik|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} u^\infty(\boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta}; k) + O(r^{-2}), \boldsymbol{\beta}_x = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \in S^2,$$

其中: $C_k = \frac{k^2}{4\pi}$, 因此可以得到 $u(\cdot, \boldsymbol{\beta}; k)$ 的远场为 $u^\infty(\cdot, \boldsymbol{\beta}; k)$ 。由(1)式可得:

$$\begin{cases} -\Delta u(\mathbf{x}) = k^2 n(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \\ -\Delta u(\mathbf{x}) - k^2 u(\mathbf{x}) = k^2 (n(\mathbf{x}) - 1) u(\mathbf{x}) \\ -\Delta u(\mathbf{x}) - k^2 u(\mathbf{x}) = k^2 (n(\mathbf{x}) - 1) (u^i(\mathbf{x}) + u^s(\mathbf{x})) \end{cases}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

在 Born 近似中用 u^i 来代替 u , 则:

$$-\Delta u_B^s(\mathbf{x}) - k^2 u_B^s(\mathbf{x}) = k^2 (n(\mathbf{x}) - 1) u^i(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3.$$

令电磁波源 $f(\mathbf{x}) = k^2 (n(\mathbf{x}) - 1) e^{ik\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta}}$, 则 $u_B^s(\cdot, \boldsymbol{\beta}; k)$ 的远场 $u_B^\infty(\cdot, \boldsymbol{\beta}; k)$ 为:

$$u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta}; k) = k^2 \int_D e^{-ik(\boldsymbol{\beta}_x - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} (n(\mathbf{y}) - 1) d\mathbf{y} = k^2 \hat{f}(k(\boldsymbol{\beta}_x - \boldsymbol{\beta})), \quad (2)$$

其中: $\boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta} \in S^2$, 得到 $u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta}; k)$ 是源 f 的傅立叶变换。由于(2)式的右边具有对称关系:

$$k^2 \hat{f}(k(\boldsymbol{\beta}_x - \boldsymbol{\beta})) = k^2 \hat{f}((-k)(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\beta}_x)).$$

因此可以将远场 u_B^∞ 的定义扩展的负波数上:

$$u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\beta}_x; k) = u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta}; -k), \boldsymbol{\beta}_x, \boldsymbol{\beta} \in S^2, k > 0. \quad (3)$$

远场测量数据集为:

$$\{u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; k) \mid j=1, 2, \dots, i, k \in (-K, K) \setminus \{0\}\}. \quad (4)$$

设 $\boldsymbol{\beta}_j^\perp$ 表示垂直于观测方向 $\boldsymbol{\beta}_j$ 的单位向量, $\nabla_{\boldsymbol{\beta}_j^\perp}$ 表示沿 $\boldsymbol{\beta}_j^\perp$ 的方向导数, 根据文献[14], 源 $f = \nabla_{\boldsymbol{\beta}_1^\perp} \cdots \nabla_{\boldsymbol{\beta}_i^\perp} v$, $v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ 在方向 $\boldsymbol{\beta}_j (j=1, 2, \dots, i)$ 上, 所有通过原点的直线上的辐射波的远场等于 0, 这个特定的源不能从给出的远场数据集(4)中确定。因此 Sylvester 和 Kelly^[24] 提出了远场数据集的 Θ -凸散射支集的概念。

具体而言, 将根据远场观测方向集合 ω 来定义 ω -凸散射支集的概念。设 $B \subseteq \mathbf{R}^3$, B 的凸包 $\text{ch}(B)$ 定义为半空间 $H_{a, \boldsymbol{\beta}}$ 的交集:

$$\begin{aligned} H_{a, \boldsymbol{\beta}} &= \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta} \leq a\}, \boldsymbol{\beta} \in S^2, a \in \mathbf{R}, \\ \text{ch}(B) &= \bigcap_{\boldsymbol{\beta} \in S^2} \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta} \leq S_B(\boldsymbol{\beta})\}, \end{aligned}$$

其中: $S_B(\boldsymbol{\beta}) = \sup_{\mathbf{x} \in B} \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta}$ 表示的是 B 的支撑函数。由于本文的远场观测方向仅有有限对, 则 B 的 ω -凸包定义为:

$$K_{S_B}(\omega) = \bigcap_{\boldsymbol{\beta} \in \omega} \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta} \leq S_B(\boldsymbol{\beta})\},$$

同样对于单对观测方向 $\pm \boldsymbol{\beta}_j$ 的凸包定义为:

$$K_{S_B}(\{\pm \boldsymbol{\beta}_j\}) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid S_B(-\boldsymbol{\beta}) \leq \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta} \leq S_B(\boldsymbol{\beta})\}.$$

由 $D = \bigcup_{m=1}^M D_m \subseteq \mathbf{R}^3$, 根据 B 的 ω -凸包定义可得:

$$\bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\omega) \subseteq \bigcap_{j=1}^i \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm \boldsymbol{\beta}_j\}) \subseteq K_{S_D}(\omega).$$

如果 $f \in L^\infty(D)$, 存在 $\tau \in \mathbf{R}, c_0 > 0$, 满足强制假设 $\operatorname{Re}(e^{i\tau} f(\mathbf{x})) \geq c_0 > 0, \mathbf{x} \in D$, 则源的支集 D 的 ω -凸包与它对应的 ω -凸散射支集一致, 由上述关系可以利用数据集(4)恢复在单个源分量的支集的 ω -凸包上的信息和集合。

根据中心切片定理^[25]表明, 可以将 n 维傅立叶变换转化成 Radon 变换的一维傅立叶变换, 则有:

$$\hat{f}(k(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})) = \int_D e^{-ik(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} (n(\mathbf{y}) - 1) d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}} e^{-ika} \int_{\mathbf{y} \cdot (\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) = a} (n(\mathbf{y}) - 1) d\mathbf{y} da = \int_{\mathbf{R}} e^{-ika} (Rf)(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; a) da.$$

可得到单对观测方向的凸包与对应 Radon 变换之间的关系:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \in \operatorname{supp}((Rf)(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; \cdot))\} = \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})\}).$$

同样的对于多对观测方向有:

$$\bigcap_{j=1}^i \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} \cdot (\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \in \operatorname{supp}((Rf)(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; \cdot))\} = \bigcap_{j=1}^i \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})\}).$$

本文的主要目的是提出重构算法, 利用稀疏远场数据集(4)来恢复上述集合。

2 单对观测方向的因式分解法

单对观测方向 $\pm \boldsymbol{\beta}_j (1 \leq j \leq i)$ 上的远场数据为 $u_B^\infty(\pm \boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; k) (k \in (0, K))$, 根据(3)式可以将远场数据扩展到负波数上。定义卷积算子 $F^{\boldsymbol{\beta}_j}: L^2(0, K) \rightarrow L^2(0, K)$, 有:

$$(F^{\boldsymbol{\beta}_j} \varphi)(t) = \int_0^K u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; t-s) \varphi(s) \frac{1}{(t-s)^2} ds. \quad (5)$$

对这个算子进行因式分解, 有算子 $L_D^{\boldsymbol{\beta}_j}: L^2(D) \rightarrow L^2(0, K)$, 且:

$$(L_D^{\boldsymbol{\beta}_j} \psi)(t) = \int_D e^{-i\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} \psi(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, t \in (0, K). \quad (6)$$

则 $L_D^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 的伴随算子为 $(L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^*: L^2(0, K) \rightarrow L^2(D)$, 且:

$$((L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^* \varphi)(\mathbf{y}) = \int_0^K e^{i\mathbf{s}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} \varphi(s) ds, \mathbf{y} \in D. \quad (7)$$

定理 1 设 $F^{\boldsymbol{\beta}_j}: L^2(0, K) \rightarrow L^2(0, K)$ 定义为(5)式, 则对算子 $F^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 进行合适的因式分解, $F^{\boldsymbol{\beta}_j} = L_D^{\boldsymbol{\beta}_j} T_D (L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^*$, 其中 $L_D^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 和 $(L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^*$ 分别为(6)式和(7)式。算子 $T_D: L^2(D) \rightarrow L^2(D)$ 表示为乘积算子, 定义为 $T_D g = (n_{\epsilon_0} - 1)g$ 。

证明 设 $\varphi \in L^2(0, K)$, 对任意 $t \in (0, K)$, 有:

$$\begin{aligned} (L_D^{\boldsymbol{\beta}_j} T_D (L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^* \varphi)(t) &= \int_D e^{-i\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} (T_D (L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^* \varphi)(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_D e^{-i\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} (n_{\epsilon_0} - 1) \int_0^K e^{i\mathbf{s}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} \varphi(s) ds d\mathbf{y} = \\ &= \int_0^K \varphi(s) \int_D e^{-i(\mathbf{t}-\mathbf{s})(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} (n_{\epsilon_0} - 1) d\mathbf{y} ds = \int_0^K u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; t-s) \varphi(s) \frac{1}{(t-s)^2} ds = (F^{\boldsymbol{\beta}_j} \varphi)(t). \end{aligned} \quad \text{证毕}$$

引理 1 设 $B_1, B_2 \in \mathbf{R}^3$ 且为有界区域, $L_{B_\ell}^{\boldsymbol{\beta}_j}: L^2(B_\ell) \rightarrow L^2(0, K), \ell=1, 2$, 定义为(6)式(将区域 D 换成 B_ℓ)。如果 $\boldsymbol{\beta}_j \cdot B_1 \cap \boldsymbol{\beta}_j \cdot B_2 = \emptyset$, 可以得到 $L_{B_1}^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 和 $L_{B_2}^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 的值域的交集为平凡集, 即 $\mathcal{R}(L_{B_1}^{\boldsymbol{\beta}_j}) \cap \mathcal{R}(L_{B_2}^{\boldsymbol{\beta}_j}) = \{0\}$ 。

证明 假设 $\boldsymbol{\beta}_j \cdot B_1 \cap \boldsymbol{\beta}_j \cdot B_2 = \emptyset$, 设 $\varphi_\ell \in L^2(B_\ell), \ell=1, 2, t \in (0, K)$, 利用中心切片定理得:

$$\begin{aligned} (L_{B_\ell}^{\boldsymbol{\beta}_j} \varphi_\ell)(t) &= \int_{B_\ell} e^{-i\mathbf{t}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} \varphi_\ell(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbf{R}} e^{-ika} \int_{\mathbf{y} \cdot (\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) = a} \varphi_\ell(\mathbf{y}) d\mathbf{y} da = \\ &= \int_{\mathbf{R}} e^{-ika} (R_{B_\ell}^{\boldsymbol{\beta}_j} \varphi_\ell)(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; a) da = \overline{R_{B_\ell}^{\boldsymbol{\beta}_j} \varphi_\ell}(t). \end{aligned}$$

则可以得到: $\mathcal{R}(R_{B_1}^{\boldsymbol{\beta}_j}) \cap \mathcal{R}(R_{B_2}^{\boldsymbol{\beta}_j}) = \{0\}, \mathcal{R}(L_{B_1}^{\boldsymbol{\beta}_j}) \cap \mathcal{R}(L_{B_2}^{\boldsymbol{\beta}_j}) = \{0\}$ 。

证毕

引理 2 算子 $L_D^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 是紧算子并有稠密值域。

证明 设 $\varphi \in L^2(0, K)$, 将 φ 的定义域扩展到 $\mathbf{R}$, 使得 φ 在 $(0, K)$ 外的区域, 即 $(-\infty, 0) \cup (K, +\infty)$ 上为 0, 表示为 $\tilde{\varphi} \in L^2(\mathbf{R}), \mathbf{y} \in D$, 则 $((L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^* \varphi)(\mathbf{y}) = \int_0^K e^{i\mathbf{s}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} \varphi(s) ds = \int_{\mathbf{R}} e^{i\mathbf{s}(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta}) \cdot \mathbf{y}} \tilde{\varphi}(s) ds$ 。

由于 $\tilde{\varphi}$ 是紧支撑函数, 所以函数解析。如果在 D 上, $(L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^* \varphi = 0$, 根据上述式子得到在 $\mathbf{R}$ 上 $\tilde{\varphi} = 0$, 于是由解析延拓定理, 在 $(0, K)$ 上 $\varphi = 0$ 。由此 $(L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^*$ 是一一对应的, 且根据 $\mathcal{R}(L_D^{\boldsymbol{\beta}_j}) = \mathcal{N}((L_D^{\boldsymbol{\beta}_j})^*)^\perp$, 得到 $L_D^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 有稠密值域。

且根据定义显然可得 $L_D^{\beta_j}$ 是紧算子。

证毕

引理 3 对任意 $z \in \mathbf{R}^3, \epsilon > 0$, 将测试函数 $\varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \in L^2(0, K)$ 定义为: $\varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} = \frac{1}{|B_\epsilon(z)|} \int_{B_\epsilon(z)} e^{-i(\beta_j - \beta) \cdot y} dy, t \in (0, K)$,

其中 $B_\epsilon(z)$ 表示以 z 为圆心, ϵ 为半径的球, $|B_\epsilon(z)|$ 表示球的体积, 有:

- 1) 如果 $\beta_j \cdot z \in \beta_j \cdot D$, 则存在 $\epsilon > 0, \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \in \mathcal{R}(L_D^{\beta_j})$ 。
- 2) 如果对任意 $\epsilon > 0, \beta_j \cdot B_\epsilon(z) \cap \beta_j \cdot D = \emptyset$, 则 $\varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \notin \mathcal{R}(L_D^{\beta_j})$ 。

证明 1) 由于 $\beta_j \cdot z \in \beta_j \cdot D$, 则存在 $x \in D$, 使得 $\beta_j \cdot z = \beta_j \cdot x$ 。 $D \in \mathbf{R}^3$ 是开集, 则存在 $\epsilon > 0$, 使得 $B_\epsilon(x) \subseteq D$, 所以 $\beta_j \cdot B_\epsilon(z) = \beta_j \cdot B_\epsilon(x)$ 。对任意的 $y \in D$, 令 $B_\epsilon(x)$ 的特征函数为 $\chi_{B_\epsilon(x)}$, 且 $\chi_{B_\epsilon(x)}(y) = \begin{cases} 1, & y \in B_\epsilon(x) \\ 0, & y \notin B_\epsilon(x) \end{cases}$ 。

因此有:

$$\frac{1}{|B_\epsilon(x)|} (L_D^{\beta_j} \chi_{B_\epsilon(x)})(t) = \frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \int_D e^{-i(\beta_j - \beta) \cdot y} \chi_{B_\epsilon(x)}(y) dy = \frac{1}{|B_\epsilon(x)|} \int_{B_\epsilon(x)} e^{-i(\beta_j - \beta) \cdot y} dy = \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j}(t)。$$

则 $\varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \in \mathcal{R}(L_D^{\beta_j})$ 。

2) 因为 $\beta_j \cdot B_\epsilon(z) \cap \beta_j \cdot D = \emptyset$, 由引理 1 可得 $\mathcal{R}(L_{B_\epsilon(z)}^{\beta_j}) \cap \mathcal{R}(L_D^{\beta_j}) = \{0\}$, 非零向量 $\varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} = \frac{1}{|B_\epsilon(z)|} L_D^{\beta_j} \chi_{B_\epsilon(z)} \in \mathcal{R}(L_{B_\epsilon(z)}^{\beta_j})$, 则 $\varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \notin \mathcal{R}(L_D^{\beta_j})$ 。

证毕

定理 2 存在常数 $c_0 > 0, \tau \in \mathbf{R}$, 使得 $\text{Re}(e^{i\tau}(n_{c_0} - 1)) \geq c_0$ 。定义自伴随算子 $F_{\#}^{\beta_j}$ 为:

$$F_{\#}^{\beta_j} = \text{Re}(e^{i\tau} F^{\beta_j}) = \frac{1}{2} (e^{i\tau} F^{\beta_j} + e^{-i\tau} (F^{\beta_j})^*),$$

它是正的, 并且 $\mathcal{R}((F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{R}(L_D^{\beta_j})$ 。

证明 由于 $L_D^{\beta_j}$ 是紧算子且有稠密值域, 则伴随算子 $(L_D^{\beta_j})^*$ 也是紧算子且一一对应。由 $\text{Re}(e^{i\tau}(n_{c_0} - 1)) \geq c_0$, 可得:

$$F_{\#}^{\beta_j} = \text{Re}(e^{i\tau} F^{\beta_j}) = L_D^{\beta_j} \text{Re}(e^{i\tau} T_D) (L_D^{\beta_j})^*,$$

$$\langle F_{\#}^{\beta_j} \varphi, \varphi \rangle = \langle \text{Re}(e^{i\tau} T_D) (L_D^{\beta_j})^* \varphi, (L_D^{\beta_j})^* \varphi \rangle \geq c_0 \| (L_D^{\beta_j})^* \varphi \|^2 > 0。$$

因此 $F_{\#}^{\beta_j}$ 是正的, 即 $\text{Re}(e^{i\tau} \langle T_D g, g \rangle_{L^2(D)}) = \int_D \text{Re}(e^{i\tau}(n_{c_0} - 1)) |g(x)|^2 dx \geq c_0 \|g\|_{L^2(D)}^2 > 0$, 算子 $\text{Re}(e^{i\tau} T_D)$ 满足强制假设, 且有平方根 $(\text{Re}(e^{i\tau} T_D))^{\frac{1}{2}}$, 则 $F_{\#}^{\beta_j}$ 有平方根 $(F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}}$ 。由文献[24]可得 $\mathcal{R}((F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}}) = \mathcal{R}(L_D^{\beta_j})$ 。证毕

定理 3 由定理 2 知, 对任意 $z \in \mathbf{R}^3$, 有以下结论成立:

- 1) 如果 $z \in \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\beta_j - \beta)\})$, 存在 $\epsilon > 0, \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \in \mathcal{R}((F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}})$ 。
- 2) 如果 $z \notin \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\beta_j - \beta)\})$, 任意 $\epsilon > 0, \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \notin \mathcal{R}((F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}})$ 。

证明 1) 如果 $z \in \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\beta_j - \beta)\})$, 则 $\beta_j \cdot z \in \beta_j \cdot D$, 根据引理 3 的结论 1) 和定理 2 可得, $\varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \in \mathcal{R}((F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}})$ 。

2) 同理, 根据引理 3 的结论 2) 和定理 2 可得, 任意 $\epsilon > 0, \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \notin \mathcal{R}((F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}})$ 。

证毕

3 单对观测方向的数值实现

令 $\{(\lambda_n^{\beta_j}, \psi_n^{\beta_j}) | n \in \mathbf{N}\}$ 表示自伴随算子 $F_{\#}^{\beta_j}$ 的特征系统, 其中 $\lambda_n^{\beta_j}$ 表示特征值, $\psi_n^{\beta_j}$ 表示特征向量。根据 Picard's 定理^[23], 对任意 $\epsilon > 0, \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j} \in \mathcal{R}((F_{\#}^{\beta_j})^{\frac{1}{2}}) \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j}, \psi_n^{\beta_j} \rangle_{L^2(0,K)}|^2}{\lambda_n^{\beta_j}} < \infty$ 。

定义指标函数 $W_{\epsilon}^{\beta_j}(z) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\langle \varphi_{z,\epsilon}^{\beta_j}, \psi_n^{\beta_j} \rangle_{L^2(0,K)}|^2}{\lambda_n^{\beta_j}} \right)^{-1}$, 将定理 3 改写为如下推论。

推论 1 对任意 $z \in \mathbf{R}^3$, 有以下结论:

- 1) 如果 $z \in \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\beta_j - \beta)\})$, 存在 $\epsilon > 0, W_{\epsilon}^{\beta_j}(z) > 0$ 。

2) 如果 $\mathbf{z} \notin \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})\})$, 任意 $\epsilon > 0$, $W_\epsilon^{\boldsymbol{\beta}_j}(\mathbf{z}) = 0$ 。

考虑 $2N$ 个远场数据 $u_B^\infty(\pm\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; k_n)$, $n=1, \dots, N$, 这里 $k_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\Delta k$ 。根据文献[26]可得 $\text{supp}(R_D^{\boldsymbol{\beta}_j} f) \subseteq [-R, R]$, 其中 $R > 0$ 表示为包含源支集且以原点为中心的最小球的半径, $B_R(0)$ 表示以原点为中心, R 为半径的球。根据 Nyquist 条件, 取 $\Delta k \leq \frac{\pi}{R}$, 对卷积算子进行分割求和:

$$(F^{\boldsymbol{\beta}_j} \varphi)(t_p) = \int_0^K u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; t_p - s) \varphi(s) \frac{1}{(t_p - s)^2} ds \approx \Delta k \sum_{\ell=1}^N u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; t_p - s_\ell) \varphi(s_\ell) \frac{1}{(t_p - s_\ell)^2}。$$

这里 $t_p = p\Delta k$, $p=0, \dots, N-1$, $s_\ell = \left(\ell - \frac{1}{2}\right)\Delta k$, $\ell=1, \dots, N$, 相应地, $F^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 的近似矩阵为:

$$\mathbf{F}^{\boldsymbol{\beta}_j} = \Delta k \begin{bmatrix} \frac{1}{k_1^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; -k_1) & \frac{1}{k_2^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; -k_2) & \cdots & \frac{1}{k_N^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; -k_N) \\ \frac{1}{k_1^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; k_1) & \frac{1}{k_1^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; -k_1) & \cdots & \frac{1}{k_{N-1}^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; -k_{N-1}) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{1}{k_{N-1}^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; k_{N-1}) & \frac{1}{k_{N-2}^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; k_{N-2}) & \cdots & \frac{1}{k_1^2} u_B^\infty(\boldsymbol{\beta}_j, \boldsymbol{\beta}; -k_1) \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{N \times N},$$

则可以得到矩阵 $\mathbf{F}_\#^{\boldsymbol{\beta}_j} = \frac{1}{2}(\mathbf{e}^{i\mathbf{r}} \mathbf{F}^{\boldsymbol{\beta}_j} + \mathbf{e}^{-i\mathbf{r}} (\mathbf{F}^{\boldsymbol{\beta}_j})^*)$, 根据测试函数 $\varphi_{\mathbf{z}, \epsilon}^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 得到测试向量:

$$\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\beta}_j} = [e^{-i\mathbf{z} \cdot (\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})} \cdot \mathbf{z}, \dots, e^{-i\mathbf{z} \cdot (\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})} \cdot \mathbf{z}] \in \mathbb{C}^N, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3。$$

令 $\{(\tilde{\lambda}_n^{\boldsymbol{\beta}_j}, \tilde{\psi}_n^{\boldsymbol{\beta}_j}) \mid n \in \mathbb{N}\}$ 表示矩阵 $\mathbf{F}_\#^{\boldsymbol{\beta}_j}$ 的特征系统, 则指标函数为:

$$W_N^{\boldsymbol{\beta}_j}(\mathbf{z}) = \left(\sum_{n=1}^N \frac{|(\varphi_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\beta}_j})^* \tilde{\psi}_n^{\boldsymbol{\beta}_j}|^2}{\tilde{\lambda}_n^{\boldsymbol{\beta}_j}} \right)^{-1}, \mathbf{z} \in B_R(0)。$$

选择适合的阈值参数 $\delta > 0$, 当 $W_N^{\boldsymbol{\beta}_j}(\mathbf{z}) > \delta$ 时由推论 1 可得 $\bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})\})$ 的近似 $\bigcup_{m=1}^M \tilde{K}_{S_{D_m}}(\{\pm(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})\})$ 。

例 1 考虑单对观测方向 $\pm\boldsymbol{\beta}_j = \pm\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \in S^1$, $\tau = -\frac{\pi}{4}$, 32 个不同的波数, 源 $f = 3 + x$ 在半径为 2 的圆型区域的重构, 如图 1。

4 多对观测方向的重构

将重构方法扩展到多对观测方向 $\{\pm\boldsymbol{\beta}_1, \pm\boldsymbol{\beta}_2, \dots, \pm\boldsymbol{\beta}_i\} = \omega \subseteq S^2$ 上, 则定义指标函数为:

$$W_\epsilon^\omega(\mathbf{z}) = \left(\sum_{j=1}^i \sum_{n=1}^\infty \frac{|\langle \varphi_{\mathbf{z}, \epsilon}^{\boldsymbol{\beta}_j}, \psi_n^{\boldsymbol{\beta}_j} \rangle_{L^2(0, K)}|^2}{\lambda_n^{\boldsymbol{\beta}_j}} \right)^{-1}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3。$$

推论 2 根据引理 3 和定理 2, 对任意 $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, 有以下结论成立:

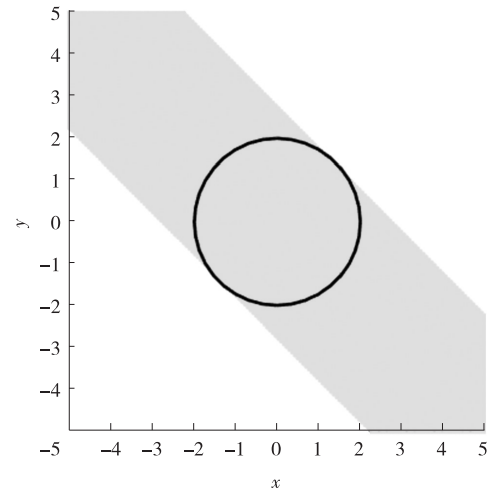
1) 如果 $\mathbf{z} \in \bigcap_{j=1}^i \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})\})$, 存在 $\epsilon > 0$, $W_\epsilon^\omega(\mathbf{z}) > 0$ 。

2) 如果 $\mathbf{z} \notin \bigcap_{j=1}^i \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\boldsymbol{\beta}_j - \boldsymbol{\beta})\})$, 任意 $\epsilon > 0$, $W_\epsilon^\omega(\mathbf{z}) = 0$ 。

对应的矩阵 $\mathbf{F}_\#^\omega$ 的近似指标函数为:

$$W_N^\omega(\mathbf{z}) = \left(\sum_{j=1}^i \sum_{n=1}^N \frac{|(\varphi_{\mathbf{z}}^{\boldsymbol{\beta}_j})^* \tilde{\psi}_n^{\boldsymbol{\beta}_j}|^2}{\tilde{\lambda}_n^{\boldsymbol{\beta}_j}} \right)^{-1}, \mathbf{z} \in B_R(0)。$$

相应地, 选择适合的阈值参数 $\delta > 0$, 当 $W_N^\omega(\mathbf{z}) > \delta$ 时, 可



注: x 轴、 y 轴分别表示测试点的横坐标与纵坐标, 是在以原点为中心, 半径为 5 的区域进行选取的, 下同

图 1 单对观测方向的重构 $W_{16}^{\boldsymbol{\beta}_j}(\mathbf{z}) > 0.01$

(灰色部分), 源的支集(实线)

Fig. 1 Reconstruction $W_{16}^{\boldsymbol{\beta}_j}(\mathbf{z}) > 0.01$ for a single pair of observation directions (grey part), support of the source(solid line)

以得到 $\bigcap_{j=1}^i \bigcup_{m=1}^M K_{S_{D_m}}(\{\pm(\beta_j - \beta)\})$ 的近似 $\bigcap_{j=1}^i \bigcup_{m=1}^M \tilde{K}_{S_{D_m}}(\{\pm(\beta_j - \beta)\})$ 。

例 2 考虑 16 对观测方向 $\pm \beta_j = \pm \left(\cos\left(\frac{(j-1)\pi}{16}\right), \sin\left(\frac{(j-1)\pi}{16}\right) \right) \in \omega \subseteq S^1, j=1, \dots, 16, \tau = -\frac{\pi}{4}$, 32 个不同的波数。源 $f=3+x$ 在椭圆型区域 $3y^2+4xy+8x^2=9$ 的重构, 如图 2a, b:

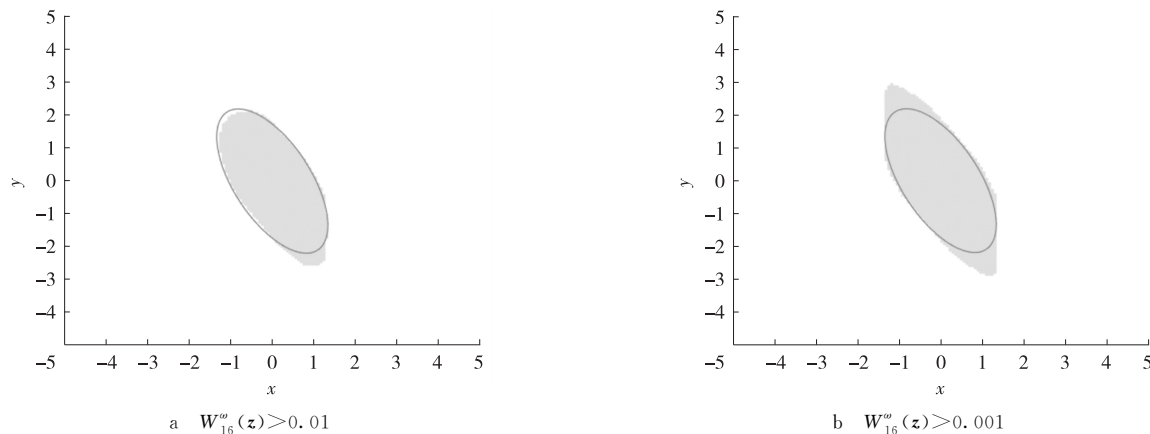


图 2 多对观测方向的重构

Fig. 2 Reconstruction for multiple pairs of observation directions

参考文献:

- [1] AMMARI H, GARNIER J, JUGNON V, et al. Stability and resolution analysis for a topological derivative based imaging functional[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2012, 50(1): 48-76.
- [2] AMMARI H, KANG H. Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements[M]. Berlin: Springer, 2004.
- [3] BONDARENKO O, KIRSCH A, LIU X. The factorization method for inverse acoustic scattering in a layered medium[J]. Inverse Problems, 2013, 29(4): 21-40.
- [4] BONNET M. Fast identification of cracks using higher-order topological sensitivity for 2-D potential problems[J]. Engineering Analysis with Boundary Elements, 2011(35): 223-235.
- [5] LIU L, QIN Y, XU Y, et al. The uniqueness and existence of solutions for the 3-D Helmholtz equation in a step-index waveguide with unbounded perturbation[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2012, 35(7): 857-868.
- [6] LIU L. The uniqueness and existence of solutions for the 3-D Helmholtz equation in a cylindrically symmetric waveguide with unbounded perturbation[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2013, 400(1): 200-210.
- [7] 刘立汉. 三维 Helmholtz 方程在扰动的共轴波导上的解的存在唯一性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2014, 53(3): 35-42.
LIU L H. The uniqueness and existence of solutions for the 3-D Helmholtz equation in a coaxial waveguide with unbounded perturbation[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(3): 35-42.
- [8] 刘立汉, 崔晓英, 蔡静秋. 基于交互间隙法的内部 Neumann 反散射问题[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2019, 58(1): 149-155.
LIU L H, CUI X Y, CAI J Q. Reciprocity gap method for an interior inverse scattering problem with a Neumann boundary condition[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2019, 58(1): 149-155.
- [9] 刘立汉, 蔡静秋, 崔晓英. 基于正则的 Newton 迭代法的内部 Neumann 反散射问题[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2019, 58(2): 135-141.
LIU L H, CAI J Q, CUI X Y. Regularized Newton iteration method for an interior inverse scattering problem with a Neumann boundary condition[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2019, 58(2): 135-141.
- [10] PARK W, LESSELIER D. Reconstruction of thin electromagnetic inclusions by a level-set method[J]. Inverse Problems, 2009, 25(8): 1-24.
- [11] ZHONG Y, CHEN X. MUSIC imaging and electromagnetic inverse scattering of multiple-scattering small anisotropic spheres[J]. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2007, 55(12): 3542-3549.
- [12] KUSIAK S, SYLVESTER J. The scattering support[J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 2003(56): 1525-1548.
- [13] KUSIAK S, SYLVESTER J. The convex scattering support in a background medium[J]. SIAM Journal on Control and

- Optimization 2005,36(4):1142-1158.
- [14] SYLVESTER J, KELLY J. A scattering support for broadband sparse far field measurements[J]. Inverse Problems, 2005(21): 759-771.
- [15] COLTON D, KIRSCH A. A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region[J]. Inverse Problems, 1996(12):383-393.
- [16] KIRSCH A, RITTER S. A linear sampling method for inverse scattering from an open arc[J]. Inverse Problems, 2000,16(5): 89-105.
- [17] KIRSCH A. Factorization of the far field operator for the inhomogeneous medium case and an application in inverse scattering theory[J]. Inverse Problems, 1999(15):413-429.
- [18] DEVANEY A. Super-resolution processing of multi-static data using time reversal and MUSIC[D]. Boston: Northeastern University, 1999.
- [19] POTTHAST R. A new non-iterative singular sources method for the reconstruction of piecewise constant media [J]. Numerische and Mathematik, 2004(98):703-730.
- [20] GRIESMAIER R, HANKE M. Multifrequency impedance imaging with multiple signal classification[J]. Siam Journal on Imaging Sciences, 2015(8):939-967.
- [21] LUKE D. Multifrequency inverse obstacle scattering: the point source method and generalized filtered back projection math[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2004(66):297-314.
- [22] GRIESMAIER R, SCHMIEDECKE C. A multifrequency MUSIC algorithm for locating small inhomogeneities in inverse scattering[J]. Inverse Problems, 2017(33):035015.
- [23] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory[M]. Berlin: Springer, 1998.
- [24] KIRSCH A. The MUSIC algorithm and the factorization method in inverse scattering theory for inhomogeneous media[J]. Inverse Problems, 2002(18):1025-1040.
- [25] NATTERER F. The mathematics of computerized tomography[M]. New York: Wiley, 1986.
- [26] GRIESMAIER R, SCHMIEDECKE C. A factorization method for multifrequency inverse source problems with sparse far field measurements[J]. SIAM Journal on Imaging Sciences, 2017,10(4):2119-2139.

The Factorization Method for an Inverse Source Problem with Multifrequency in Step-Index Waveguides

CHEN Rong, LIU Lihan, ZHENG Qiuyan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [Purposes] The problem of multi-frequency inverse sources on step-index waveguides is studied. [Methods] The union of convex polygons with normals in the observation direction can be uniquely determined by far-field data, which approximates the position and shape of the source. [Findings] Under the assumption that the unknown sources satisfy a certain coercivity, the position and shape of the unknown source is reconstructed by using the idea of the factorization method. [Conclusions] The numerical realization of the reconstruction algorithm is strictly demonstrated and numerical examples are provided to illustrate the effectiveness and feasibility of this method.

Keywords: an inverse source problem with multifrequency; the factorization method; convex polygons

(责任编辑 许 甲)