2022 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2022
第 39 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 39 No. 2

DOI:10.11721/cqnuj20220202

亚正定四元数矩阵方程的 NPSS 迭代及外推*

张姗姗，黄敬频，熊 昊
(广西民族大学 数学与物理学院，南宁 530006)

摘要:【目的】研究四元数体上亚正定矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的分裂迭代求解问题。【方法】利用四元数正规矩阵和亚正定矩阵的自共轭分支与斜自共轭分支，建立两种新的 NPSS 分裂迭代，并引入参数对它们统一加速处理。【结果】获得外推 NPSS 迭代(简称 ENPSS)，证明了 ENPSS 迭代收敛于原方程组的唯一解，同时给出迭代收敛因子的一个上界及拟最优参数估计式。【结论】把复矩阵方程的分裂求解问题推广到四元数体讨论，并构建出新的 ENPSS 迭代，数值算例验证了所给迭代的有效及可行性。

关键词:四元数体;亚正定矩阵;交替迭代;NPSS 迭代;ENPSS 迭代

中图分类号:O241.6 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2022)02-0096-07

在量子物理、彩色图像恢复、核滤波、信号统计、神经网络等领域的研究中常常涉及矩阵方程的求解，尤其是随着四元数在上述领域的应用，关于四元数矩阵方程的一般解与结构解研究已成为当前矩阵代数的热点课题[1]。

本文在四元数体上讨论大型稀疏矩阵方程:

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B} \tag{1}$$

的一类新迭代求解方法，其中:$\boldsymbol{A}\in P_n^{\geq}(Q)$ 是亚正定矩阵，$\boldsymbol{B}\in Q^{n\times n}$ 是已知矩阵，$\boldsymbol{X}\in Q^{n\times n}$ 是未知矩阵。

关于方程(1)的研究已有较为丰富的成果，例如文献[2]提出了求方程(1)近似解的同伦摄动法(HPM);文献[3]利用 M-P 广义逆给出了方程(1)关于广义反射矩阵的 Hermite 自反解和 Hermite 反自反解，以及非负定自反解存在的条件和显式表达式;文献[4]给出了主理想环上方程(1)存在对称解的条件及通解表达式。在复数域上，文献[5-6]利用共轭梯度法和参数迭代法对方程(1)的求解进行了讨论;文献[7]讨论了非 Hermite 正定线性系统(1)的 Hermite 和 Skew-Hermite 分裂方法，得到了一些收敛性条件;文献[8]通过将系数矩阵分裂为对称矩阵和反对称矩阵的方法，给出了(1)的分裂迭代算法;文献[9]基于并行多分裂算法思想及 SOR 迭代格式，提出一种求解 H-矩阵线性方程组(1)的并行多分裂 SOR 迭代方法。然而在四元数体上，缺少对方程(1)的分裂参数迭代研究。本文针对四元数矩阵方程(1)，提出新的带参数分裂迭代方法。

用 $\mathbf{C}^{n\times n}$,$Q^{n\times n}$ 分别表示全体 $n\times n$ 复矩阵和四元数矩阵集合;$SC_n(Q)$,$SC_n^{-}(Q)$,$SC_n^{>}(Q)$,$P_n^{\geq}(Q)$,$U^{n\times n}$ 分别表示全体 $n\times n$ 自共轭、斜自共轭、正定、亚正定和酉矩阵集合;$\overline{\boldsymbol{A}}$,$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}^{*}$ 分别表示 $\boldsymbol{A}$ 的共轭、转置和共轭转置矩阵;$\mathrm{Re}(\boldsymbol{A})$,$\mathrm{Im}(\boldsymbol{A})$ 分别表示复矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的实部和虚部;称 $\|A\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A})}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的谱范数;设 $\boldsymbol{A}\in Q^{n\times n}$，如果 $\boldsymbol{A}^{*}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵。

定义 1[10] 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\mathrm{j}\in Q^{n\times n}$($\boldsymbol{A}_1$,$\boldsymbol{A}_2\in\mathbf{C}^{n\times n}$)，则称

$$\boldsymbol{A}^{\sigma}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ -\overline{\boldsymbol{A}}_2 & \overline{\boldsymbol{A}}_1\end{pmatrix}\in\mathbf{C}^{2n\times 2n}$$

是 $\boldsymbol{A}$ 的复表示。

* 收稿日期:2021-07-05 修回日期:2021-10-22 网络出版时间:2022-03-28 17:27
资助项目:国家自然科学基金(No. 11661011);广西民族大学研究生创新项目(No. gxun-chxps202071)
第一作者简介:张姗姗，女，研究方向为数值代数及应用，E-mail:1209608397@qq.com;通信作者:黄敬频，男，教授，E-mail:hjp2990@126.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220328.1158.013.html

定义 2[10]　设 $\boldsymbol{A}\in Q^{n\times n}$，若对任意 $\boldsymbol{0}\neq\boldsymbol{x}\in Q^{n\times 1}$，有 $\mathrm{Re}(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{Ax})>0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 Q 上的亚正定矩阵，简称亚正定矩阵。

定义 3[10]　设 $\boldsymbol{A}\in Q^{n\times n}$，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 个右特征值主值，即 $\lambda_s=a_s+b_s\mathrm{i}\in\mathbf{C}$，$b_s\geqslant 0(s=1,2,\cdots,n)$ 是 $\boldsymbol{A}^\sigma$ 的 n 个虚部非负特征值，则称 $\psi(\boldsymbol{A})=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\lambda_i|$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的谱值半径。

1 NPSS 迭代及它的外推

本小节先建立四元数矩阵方程(1)的 NPSS 迭代，为此先给出如下引理。

引理 1[11]　矩阵 $\boldsymbol{A}\in Q^{n\times n}$ 的谱值半径 $\psi(\boldsymbol{A})$ 不超过它的任意一种相容范数。特别地，当 $\boldsymbol{A}$ 是正规矩阵时，有 $\psi(\boldsymbol{A})=\|\boldsymbol{A}\|_2$。

引理 2　设 $\boldsymbol{S}\in SC_n^-(Q)$，则对任意的 $\alpha>0$，有 $(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}$ 是酉矩阵。

证明　由 $\boldsymbol{S}\in SC_n^-(Q)$ 有 $\boldsymbol{S}^*=-\boldsymbol{S}$，令 $\boldsymbol{Q}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}$，则：

$$\boldsymbol{Q}(\alpha)^*\boldsymbol{Q}(\alpha)=[(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}]^*(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}=$$
$$[(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}]^*(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^*(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}=[(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^*]^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S}^*)(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}=$$
$$(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}=I,$$

故 $\boldsymbol{Q}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{S})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{S})^{-1}(\alpha>0)$ 是酉矩阵。　　证毕

设 $\boldsymbol{A}\in P_n^{>}(Q)$，$R(\boldsymbol{A})$ 和 $S(\boldsymbol{A})$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的自共轭与斜自共轭分支，选取正定矩阵 $\boldsymbol{P}\in SC_n^{>}(Q)$，给定一个正数 $\alpha>0$ 及初始矩阵 $\boldsymbol{X}^{(0)}\in Q^{n\times n}$，构建两种求解(1)的 NPSS 迭代格式如下：

$$\text{NPSS}(0):\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{B}\\(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(\alpha\boldsymbol{P}-R(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{B}\end{cases},k=0,1,\cdots,\tag{2}$$

$$\text{NPSS}(1):\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{B}\\(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}+S(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{(k)}\end{cases},k=0,1,\cdots。\tag{3}$$

为建立外推 NPSS 迭代，对(2)式进行等价变形可得：

$$R(\boldsymbol{A})\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k)}-\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}+\boldsymbol{B},\tag{4}$$

将(4)式代入(3)式可得 $(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+1)}=2\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}+(S(\boldsymbol{A})-\alpha\boldsymbol{P})\boldsymbol{X}^{(k)}$，因此迭代(2)等价于：

$$\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{B}\\(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+1)}=2\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}+(S(\boldsymbol{A})-\alpha\boldsymbol{P})\boldsymbol{X}^{(k)}\end{cases},k=0,1,\cdots,\tag{5}$$

现引入参数 $\omega\geqslant 0$，将(5)式中第 2 个方程中的两项 $2\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}$ 和 $-\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k)}$ 作加权处理得：

$$(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(2-\omega)\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}+[S(\boldsymbol{A})-(1-\omega)\alpha\boldsymbol{P}]\boldsymbol{X}^{(k)}。\tag{6}$$

把(5)式中第 1 个方程与(6)式联立，即可建立如下新的外推 NPSS 迭代，记作 ENPSS。

$$\text{ENPSS}:\begin{cases}(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}=(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{B}\\(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{X}^{(k+1)}=(2-\omega)\alpha\boldsymbol{P}\boldsymbol{X}^{(k+\frac{1}{2})}+[S(\boldsymbol{A})-(1-\omega)\alpha\boldsymbol{P}]\boldsymbol{X}^{(k)}\end{cases},k=0,1,\cdots。\tag{7}$$

显然，当 $\omega=0$ 时，根据(2)式与(5)式的等价性，迭代(7)就退化为 NPSS(0)；当 $\omega=1$ 时，迭代(7)就退化为 NPSS(1)，为进一步讨论 ENPSS 的收敛性，将迭代(7)等价地写成如下单步格式：

$$\boldsymbol{X}^{(k+1)}=\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)\boldsymbol{X}^{(k)}+\boldsymbol{N}(\alpha,\omega)\boldsymbol{B},\tag{8}$$

其中：

$$\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)=(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))^{-1}[S(\boldsymbol{A})-(1-\omega)\alpha\boldsymbol{P}+(2-\omega)\alpha\boldsymbol{P}(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))],$$
$$\boldsymbol{N}(\alpha,\omega)=(2-\omega)\alpha(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))^{-1}\boldsymbol{P}(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))^{-1},$$

这里 $\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)$ 是 ENPSS 迭代(7)的迭代矩阵。

2 收敛性分析

本小节主要分析 ENPSS 迭代的收敛性，并给出迭代收敛因子 α 的一个上界及拟最优参数估计式。

定理 1　设 $\boldsymbol{A}\in P_n^{>}(Q)$ 是给定亚正定矩阵，$R(\boldsymbol{A})$，$S(\boldsymbol{A})$ 分别是 $\boldsymbol{A}$ 的自共轭与斜自共轭分支，$\boldsymbol{P}\in SC_n^{>}(Q)$ 是给定的正定矩阵，α 是给定的正数，则求解方程(1)的 NPSS(0)迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha)$ 的谱值半径满足：

$$\psi(\boldsymbol{M}(\alpha))\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{\alpha-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|<1,$$

其中:$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 是正定矩阵$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}R(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}$的特征值,从而 NPSS(0)迭代收敛。

证明 显然 $\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A})$和 $\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A})$是非奇异的。由(8)式令 $\omega=0$ 可得:

$$\boldsymbol{M}(\alpha)=(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))^{-1}[S(\boldsymbol{A})-\alpha\boldsymbol{P}+2\alpha\boldsymbol{P}(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))]=$$
$$(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-R(\boldsymbol{A}))(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A})),$$

作与 $\boldsymbol{M}(\alpha)$相似的矩阵$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\alpha)$,并记$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}R(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}$,$\widetilde{\boldsymbol{S}}=\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}S(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}$得:

$$\widetilde{\boldsymbol{M}}(\alpha)=\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))\boldsymbol{M}(\alpha)(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))^{-1}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}=$$
$$\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}(\alpha\boldsymbol{P}-R(\boldsymbol{A}))(\alpha\boldsymbol{P}+R(\boldsymbol{A}))^{-1}(\alpha\boldsymbol{P}-S(\boldsymbol{A}))(\alpha\boldsymbol{P}+S(\boldsymbol{A}))^{-1}\boldsymbol{P}^{\frac{1}{2}}=$$
$$(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}R(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}R(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}S(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}})(\alpha\boldsymbol{I}+\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}S(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}})^{-1}=$$
$$(\alpha\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{R}})(\alpha\boldsymbol{I}+\widetilde{\boldsymbol{R}})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{S}})(\alpha\boldsymbol{I}+\widetilde{\boldsymbol{S}})^{-1}。$$

由于 $\boldsymbol{P}\in SC_n^{>}(Q)$,所以$\widetilde{\boldsymbol{S}}^*=(\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}S(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}})^*=\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}(S(\boldsymbol{A}))^*\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}=-\widetilde{\boldsymbol{S}}$,即$\widetilde{\boldsymbol{S}}\in SC_n^{-}(Q)$,则根据引理 2 知,$(\alpha\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{S}})(\alpha\boldsymbol{I}+\widetilde{\boldsymbol{S}})^{-1}$是酉矩阵。又因为$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}R(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}\in SC_n^{>}(Q)$,所以存在酉矩阵 $\boldsymbol{U}$ 使得$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{U}^*\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)\boldsymbol{U}$,其中 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n>0$。于是:

$$(\alpha\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{R}})(\alpha\boldsymbol{I}+\widetilde{\boldsymbol{R}})^{-1}=\boldsymbol{U}^*\mathrm{diag}\left(\frac{\alpha-\lambda_1}{\alpha+\lambda_1},\cdots,\frac{\alpha-\lambda_n}{\alpha+\lambda_n}\right)\boldsymbol{U},$$

从而:

$$\psi(\boldsymbol{M}(\alpha))=\psi(\widetilde{M}(\alpha))\leqslant\|(\alpha\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{R}})(\alpha\boldsymbol{I}+\widetilde{\boldsymbol{R}})^{-1}(\alpha\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{S}})(\alpha\boldsymbol{I}+\widetilde{\boldsymbol{S}})^{-1}\|_2=\|(\alpha\boldsymbol{I}-\widetilde{\boldsymbol{R}})(\alpha\boldsymbol{I}+\widetilde{\boldsymbol{R}})^{-1}\|_2=$$
$$\left\|\boldsymbol{U}^*\mathrm{diag}\left(\frac{\alpha-\lambda_1}{\alpha+\lambda_1},\cdots,\frac{\alpha-\lambda_n}{\alpha+\lambda_n}\right)\boldsymbol{U}\right\|_2=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{\alpha-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|=\sigma(\alpha)。$$

又由 $\alpha>0$ 可知,$\psi(\boldsymbol{M}(\alpha))\leqslant\sigma(\alpha)<1$,即 NPSS(0)迭代收敛。 证毕

推论 1 设 $\boldsymbol{A}\in P_n^{>}(Q)$是给定亚正定矩阵,$R(\boldsymbol{A})$和 $S(\boldsymbol{A})$分别是 $\boldsymbol{A}$ 的自共轭与斜自共轭分支,$\boldsymbol{P}\in SC_n^{>}(Q)$是给定的正定矩阵,则 NPSS(0)迭代的拟最优参数 $\alpha^*=\sqrt{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}$,此时

$$\sigma(\alpha^*)=\frac{\sqrt{\lambda_{\max}}-\sqrt{\lambda_{\min}}}{\sqrt{\lambda_{\max}}+\sqrt{\lambda_{\min}}},$$

其中:$\lambda_{\max}$和 $\lambda_{\min}$分别表示$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的最大和最小特征值。

证明 因 $\boldsymbol{A}\in P_n^{>}(Q)$是亚正定矩阵,则$\widetilde{\boldsymbol{R}}=\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}R(\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}^{-\frac{1}{2}}$正定,于是$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的特征值 λ_i 均为大于 0 的实数,不妨设 $\lambda_{\max}=\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n=\lambda_{\min}>0$ 是$\widetilde{\boldsymbol{R}}$的全体特征值。对于固定的 $\alpha>0$,实值函数 $f(t)=\dfrac{\alpha-t}{\alpha+t}(t>0)$单调递减,因此:

$$\sigma(\alpha)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\frac{\alpha-\lambda_i}{\alpha+\lambda_i}\right|=\max\left\{\left|\frac{\alpha-\lambda_{\max}}{\alpha+\lambda_{\max}}\right|,\left|\frac{\alpha-\lambda_{\min}}{\alpha+\lambda_{\min}}\right|\right\}。$$

根据非负函数 $g(\alpha)=\left|\dfrac{\alpha-\tau}{\alpha+\tau}\right|$在区间$[0,\tau]$上单调递减,在区间$[\tau,+\infty)$上单调递增,则 $\sigma(\alpha)$的最小值在 $g_1(\alpha)=\left|\dfrac{\alpha-\lambda_{\max}}{\alpha+\lambda_{\max}}\right|$ 和 $g_2(\alpha)=\left|\dfrac{\alpha-\lambda_{\min}}{\alpha+\lambda_{\min}}\right|$的交点处取得,令 $g_1(\alpha)=g_2(\alpha)$,可求得 $\alpha^*=\sqrt{\lambda_{\max}\lambda_{\min}}$,此时 $\sigma(\alpha^*)=\dfrac{\sqrt{\lambda_{\max}}-\sqrt{\lambda_{\min}}}{\sqrt{\lambda_{\max}}+\sqrt{\lambda_{\min}}}$。 证毕

引理 3 设 $\boldsymbol{A}\in P_n^{>}(Q)$是亚正定矩阵,$R(\boldsymbol{A})$和 $S(\boldsymbol{A})$分别是 $\boldsymbol{A}$ 的自共轭与斜自共轭分支,$\boldsymbol{P}\in SC_n^{>}(Q)$是给定的正定矩阵,$\alpha>0$,$\omega\geqslant0$ 是给定的非负实数,$\boldsymbol{M}(\alpha)$是 NPSS(0)的迭代矩阵,则 ENPSS 的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)$满足:

$$\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)=\frac{1}{2}[\omega\boldsymbol{I}+(2-\omega)\boldsymbol{M}(\alpha)]。\tag{9}$$

证明 显然 $\boldsymbol{P}\in SC_n^{>}(Q)$是非奇异的,则 NPSS(0)的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha)$和 ENPSS 的迭代矩阵 $\boldsymbol{M}(\alpha,\omega)$可改

写为：

$$M(\alpha)=P^{-\frac{1}{2}}(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}(\alpha I-\widetilde{R})(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}(\alpha I-\widetilde{S})P^{\frac{1}{2}},$$

$$M(\alpha,\omega)=P^{-\frac{1}{2}}(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}\,[\widetilde{S}-(1-\omega)\alpha I+(2-\omega)\alpha(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}(\alpha I-\widetilde{S})]\,P^{\frac{1}{2}},$$

其中：$\widetilde{R}=P^{-\frac{1}{2}}R(A)P^{-\frac{1}{2}}$，$\widetilde{S}=P^{-\frac{1}{2}}S(A)P^{-\frac{1}{2}}$，对 $M(\alpha,\omega)$ 化简可得：

$$M(\alpha,\omega)=P^{-\frac{1}{2}}(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}[\widetilde{S}-(1-\omega)\alpha I+(2-\omega)\alpha(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}(\alpha I-\widetilde{S})]P^{\frac{1}{2}}=$$

$$P^{-\frac{1}{2}}(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}[(\alpha I+\widetilde{R})(\widetilde{S}-(1-\omega)\alpha I)+(2-\omega)\alpha(\alpha I-\widetilde{S})]P^{\frac{1}{2}}=$$

$$P^{-\frac{1}{2}}(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}[\alpha^2 I+\widetilde{R}\widetilde{S}-(1-\omega)\alpha(\widetilde{R}+\widetilde{S})]P^{\frac{1}{2}},$$

又因为：

$$\omega I+(2-\omega)M(\alpha)=\omega I+(2-\omega)P^{-\frac{1}{2}}(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}(\alpha I-\widetilde{R})(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}(\alpha I-\widetilde{S})P^{\frac{1}{2}}=$$

$$P^{-\frac{1}{2}}\,[\omega I+(2-\omega)(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}(\alpha I-\widetilde{R})(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}(\alpha I-\widetilde{S})]\,P^{\frac{1}{2}}=$$

$$P^{-\frac{1}{2}}(\alpha I+\widetilde{S})^{-1}(\alpha I+\widetilde{R})^{-1}\,[2\alpha^2 I+2\,\widetilde{R}\widetilde{S}-2(1-\omega)\alpha(\widetilde{R}+\widetilde{S})]\,P^{\frac{1}{2}},$$

故 $M(\alpha,\omega)=\dfrac{1}{2}[\omega I+(2-\omega)M(\alpha)]$。　证毕

定理 2　设 $A\in P_n^{>}(Q)$ 是亚正定矩阵，$M(\alpha)$ 和 $M(\alpha,\omega)$ 分别是 NPSS(0) 迭代与 ENPSS 迭代的迭代矩阵，则当 $\alpha>0$，$0\leqslant\omega<2$ 时，ENPSS 迭代收敛。

证明　不妨设 θ_i，γ_i 分别为矩阵 $M(\alpha,\omega)$，$M(\alpha)$ 的任一右特征主值。则由(9)式有 $M(\alpha,\omega)=\dfrac{1}{2}[\omega I+(2-\omega)M(\alpha)]$，从而 $\theta_i=\dfrac{1}{2}[\omega+(2-\omega)\gamma_i]$。当 γ_i 为实数时，有 $|\theta_i|=\dfrac{1}{2}(\omega+|2-\omega|\,|\gamma_i|)$；当 γ_i 为复数时，设 $\gamma_i=\mu_i+\mathrm{i}\eta_i$，则有

$$|\theta_i|=\left|\frac{1}{2}[\omega+(2-\omega)\gamma_i]\right|=\frac{1}{2}\sqrt{[\omega+(2-\omega)\mu_i]^2+[(2-\omega)\eta_i]^2}=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+2\omega(2-\omega)\mu_i+(2-\omega)^2(\mu_i+\eta_i)^2}\leqslant\frac{1}{2}\sqrt{\omega^2+2\omega(2-\omega)\sqrt{\mu_i^2+\eta_i^2}+(2-\omega)^2(\mu_i+\eta_i)^2}=$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{(\omega+(2-\omega)\sqrt{\mu_i^2+\eta_i^2})^2}=\frac{1}{2}(\omega+|2-\omega|\sqrt{\mu_i^2+\eta_i^2})=\frac{1}{2}(\omega+|2-\omega|\,|\gamma_i|)。$$

于是，$\psi(M(\alpha,\omega))\leqslant\dfrac{1}{2}(\omega+|2-\omega|\,|\gamma_i|)\leqslant\dfrac{1}{2}(\omega+|2-\omega|\psi(M(\alpha)))$，根据定理 1 的证明可知 $\psi(M(\alpha,\omega))\leqslant\dfrac{1}{2}(\omega+|2-\omega|\sigma(\alpha))$，又因为 $0<\sigma(\alpha)<1$，所以：

$$\frac{\omega}{2}<\frac{\omega+|2-\omega|\sigma(\alpha)}{2}<\frac{|2-\omega|}{2}+\frac{\omega}{2}。$$

要使 $\psi(M(\alpha,\omega))<1$，只需 $0\leqslant\dfrac{\omega}{2}<1$ 与 $\dfrac{|2-\omega|}{2}+\dfrac{\omega}{2}\leqslant1$ 同时成立，由此可得 $0\leqslant\omega<2$，因此

$$\psi(M(\alpha,\omega))\leqslant\frac{1}{2}(\omega+|2-\omega|\sigma(\alpha))<1,$$

故当 $0\leqslant\omega<2$ 时，ENPSS 迭代收敛。　证毕

根据四元数矩阵的复表示运算性质，对四元数体上的迭代(2)和迭代(8)均可形成与复数域 **C** 上等价的迭代：

$$(2-c):\begin{cases}(\alpha P^\sigma+(R(A))^\sigma)(X^{(k+\frac{1}{2})})^\sigma=(\alpha P^\sigma-(S(A))^\sigma)(X^{(k)})^\sigma+B^\sigma\\(\alpha P^\sigma+(S(A))^\sigma)(X^{(k+1)})^\sigma=(\alpha P^\sigma-(R(A))^\sigma)(X^{(k+\frac{1}{2})})^\sigma+B^\sigma\end{cases},$$

$$(8-c):\begin{cases}(\alpha P^\sigma+(R(A))^\sigma)(X^{(k+\frac{1}{2})})^\sigma=(\alpha P^\sigma-(S(A))^\sigma)(X^{(k)})^\sigma+B^\sigma\\(\alpha P^\sigma+(S(A))^\sigma)(X^{(k+1)})^\sigma=(2-\omega)\alpha P^\sigma(X^{(k+\frac{1}{2})})^\sigma+[(S(A))^\sigma-(1-\omega)\alpha P^\sigma](X^{(k)})^\sigma\end{cases},$$

其中：$(\cdot)^\sigma$ 表示四元数矩阵$(\cdot)$的复表示矩阵。

实际计算时，因四元数乘法不可交换，故在 Matlab 软件运行时只需按上述$(2-c)$，$(8-c)$格式来计算，最后

将第 k 次近似解 $(\boldsymbol{X}^{(k)})^{\sigma}$ 还原回 $\boldsymbol{X}^{(k)}=\boldsymbol{X}_{k1}+\boldsymbol{X}_{k2}\mathrm{j}$,即可得方程(1)的近似解。根据四元数矩阵与它复表示矩阵的 Frobenius 范数的关系,方程(1)的第 k 次近似解余项范数为:

$$R_k=\|\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}^{(k)}\|_F=\frac{1}{\sqrt{2}}\|\boldsymbol{B}^{\sigma}-\boldsymbol{A}^{\sigma}(\boldsymbol{X}^{(k)})^{\sigma}\|_F。$$

3 数值算例

算例 1 给定下列 n 阶亚正定矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}15+6\mathrm{i} & -1+2\mathrm{j} & & \\ -1-2\mathrm{i}-2\mathrm{k} & 15+6\mathrm{i} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1+2\mathrm{j} \\ & & -1-2\mathrm{i}-2\mathrm{k} & 15+6\mathrm{i}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}5.2 & -2+\mathrm{k} & & \\ -4-\mathrm{i} & 5.2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -2+\mathrm{k} \\ & & -4-\mathrm{i} & 5.2\end{bmatrix},$$

用 ENPSS 迭代求解矩阵方程(1)。

解 先计算系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的自共轭分支 $R(\boldsymbol{A})$ 和斜自共轭分支 $S(\boldsymbol{A})$,然后分别利用迭代格式$(2-c)$和$(8-c)$求解此方程组。令 $R(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{R}_1+\boldsymbol{R}_2\mathrm{j}$,$S(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{S}_1+\boldsymbol{S}_2\mathrm{j}$,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_1+\boldsymbol{B}_2\mathrm{j}$,其中:

$$\boldsymbol{R}_1=\begin{bmatrix}15 & -1+\mathrm{i} & & \\ -1-\mathrm{i} & 15 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1+\mathrm{i} \\ & & -1-\mathrm{i} & 15\end{bmatrix},\ \boldsymbol{R}_2=\begin{bmatrix}0 & 1+\mathrm{i} & & \\ -1-\mathrm{i} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+\mathrm{i} \\ & & -1-\mathrm{i} & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_1=\begin{bmatrix}6\mathrm{i} & -\mathrm{i} & & \\ -\mathrm{i} & 6\mathrm{i} & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -\mathrm{i} \\ & & -\mathrm{i} & 6\mathrm{i}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{S}_2=\begin{bmatrix}0 & 1-\mathrm{i} & & \\ 1-\mathrm{i} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1-\mathrm{i} \\ & & 1-\mathrm{i} & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}_1=\begin{bmatrix}5.2 & -2 & & \\ -4-\mathrm{i} & 5.2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -2 \\ & & -4-\mathrm{i} & 5.2\end{bmatrix},\ \boldsymbol{B}_2=\begin{bmatrix}0 & \mathrm{i} & & \\ 0 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & \mathrm{i} \\ & & 0 & 0\end{bmatrix}。$$

选取初始迭代矩阵 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{I}$,以及自共轭正定矩阵

$$\boldsymbol{P}=\begin{bmatrix}12 & 1+3\mathrm{i}+3\mathrm{j}+3\mathrm{k} & & \\ 1-3\mathrm{i}-3\mathrm{j}-3\mathrm{k} & 12 & \ddots & \\ & \ddots & & 1+3\mathrm{i}+3\mathrm{j}+3\mathrm{k} \\ & & 1-3\mathrm{i}-3\mathrm{j}-3\mathrm{k} & 12\end{bmatrix},$$

于是 $\boldsymbol{P}$ 可表示为 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\mathrm{j}$,其中:

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{bmatrix}12 & 1+3\mathrm{i} & & \\ 1-3\mathrm{i} & 12 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1+3\mathrm{i} \\ & & 1-3\mathrm{i} & 12\end{bmatrix},\ \boldsymbol{P}_2=\begin{bmatrix}0 & 3+3\mathrm{i} & & \\ -3-3\mathrm{i} & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 3+3\mathrm{i} \\ & & -3-3\mathrm{i} & 0\end{bmatrix},$$

这里选取终止条件为 $\widetilde{R}_k=\|\boldsymbol{B}^{\sigma}-\boldsymbol{A}^{\sigma}(\boldsymbol{X}^{(k)})^{\sigma}\|<10^{-8}$。此时,视 $\boldsymbol{X}^{(k)}$ 是方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的第 k 个近似解。

分别记 t_{Iter} 为迭代次数,t_{CPU} 为迭代时间,r_{Err} 为迭代残差。下面利用本文 NPSS(0)及 ENPSS 的等价形式$(2-c)$和$(8-c)$求解矩阵方程(1),对不同的矩阵阶数 n,计算出结果,并与文献[12]中 PSS 及 EPSS 方法相比较。

从表 1 和表 2 给出的数值实验结果可知,在同一精度条件下,NPSS(0)迭代与 ENPSS 迭代到达截断误差所需的迭代次数及迭代时间均优于 PSS 迭代与 EPSS 迭代,这表明本文所给的 ENPSS 迭代具有更快的收敛速度。

表 1　PSS 与 NPSS(0)方法的迭代时间和迭代次数比较

Tab. 1　Comparison of iteration times and iterations between PSS and NPSS(0)

参数		PSS			NPSS(0)		
n	α	t_{Iter}	t_{CPU}/s	r_{Err}	t_{Iter}	t_{CPU}/s	r_{Err}
100	1.3	151	2.553	9.357 9e−09	32	0.450	7.579 5e−09
200	1.3	154	19.811	8.618 3e−09	33	2.854	6.276 4e−09
500	1.3	157	541.079	8.799 6e−09	34	65.094	5.397 3e−09
800	1.3	158	2 004.347	9.610 8e−09	34	367.210	6.954 8e−09
1 000	1.3	159	2 985.357	9.258 0e−09	34	735.745	7.822 7e−09

表 2　EPSS 与 ENPSS 方法的迭代时间和迭代次数比较

Tab. 2　Comparison of iteration times and iterations between EPSS and ENPSS

参数			EPSS			ENPSS		
n	α	ω	t_{Iter}	t_{CPU}/s	r_{Err}	t_{Iter}	t_{CPU}/s	r_{Err}
100	1.5	0.5	160	0.455	9.815 6e−09	34	0.206	9.572 5e−09
200	1.5	0.5	163	2.541	9.234 5e−09	35	0.582	7.227 4e−09
500	1.5	0.5	166	52.162	9.658 3e−09	36	7.808	5.841 8e−09
800	1.5	0.5	168	342.529	9.240 2e−09	36	34.628	7.448 8e−09
1 000	1.5	0.5	169	526.902	8.981 2e−09	36	88.002	8.350 0e−09

4 结语

本文在四元数体上讨论了亚正定矩阵方程(1)的分裂迭代方法。构建出一种新的 ENPSS 迭代，并运用四元数矩阵特征值理论证明了该迭代的收敛性,同时给出迭代参数的拟最优估计式,所得结果推广了复矩阵方程的分裂求解问题。数值算例表明,本文所给方法更优于已有文献的结果。

参考文献:

[1] STEPHEN L A. Quaternionic quantum mechanics and quantum fields[M]. New York:Oxford University Press,1995.

[2] SADEGHI A. A new approximation to the linear matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ by modification of he's homotopy perturbation method [J]. Advances in Linear Algebra & Matrix Theory,2016,6(2):23-30.

[3] LIU X F. Hermitian and nonnegative definite reflexive and anti-reflexive solutions to $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$[J]. International Journal of Computer Mathematics,2018,95(8):1666-1671.

[4] 张四保,邓勇. 主理想环上矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的对称解[J]. 科学技术与工程,2020,20(25):10133-10137.
ZHANG S B,DENG Y. Symmetric solutions of matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ over principal ideal rings[J]. Science Technology and Engineering,2020,20(25):10133-10137.

[5] LIU X F,YUAN Y. Generalized reflexive and anti-reflexive solutions of $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$[J]. Calcolo,2016,53(1):59-66.

[6] 陈林婕,马昌凤. 一种新的求解 Sylvester 矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BXA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}$ 的参数迭代方法[J]. 福建师范大学学报(自然科学版),2019,35(2):6-13.
CHEN L J,MA C F. A new parameter iteration method for solving Sylvester matrix equation $\boldsymbol{AXB}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{BXA}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{F}$[J]. Journal of Fujian Normal University (Natural Science Edition),2019,35(2):6-13.

[7] LI C X,WU S L. Improved convergence theorems for new Hermitian and Skew-Hermitian splitting methods[J]. Linear and Multilinear Algebra,2017,65(3):1-4.

[8] 李英. 连续 Sylvester 矩阵方程求解的分裂迭代算法[J]. 应用数学和力学,2020,41(1):115-124.
LI Y. Split iteration algorithm for solving continuous Sylvester matrix equation[J]. Applied Mathematics and Mechanics,2020,

41(1):115-124.

[9] 温瑞萍,段辉. H-矩阵线性方程组的一类预条件并行多分裂SOR迭代法[J]. 应用数学,2020,33(4):814-825.
WEN R P, DUAN H. A Preconditioned parallel multisplitting SOR iterative method for H-matrix linear equations[J]. Mathematica Applicata,2020,33(4):814-825.

[10] 李文亮. 四元数矩阵[M]. 长沙:国防科技大学出版社,2002.
LI W L. Quaternion matrix[M]. Changsha:University of Defense Science and Technology Press,2002.

[11] 尹月里. 四元数矩阵的范数及应用[J]. 湘潭矿业学院学报,2001(2):93-94.
YIN Y L. Norm of quaternion matrix and its application[J]. Journal of Xiangtan Institute of mining,2001(2):93-94.

[12] ZHANG S S,HUANG J P,XIONG H. Extrapolated PSS iterative method for sub-positive definite quaternion equations[C]// The 33rd Chinese Control and Decision Conference. Kunming:[s. n.],2021:6562-6567.

On NPSS Iteration and Extrapolation Method of the Sub-Positive Definite Quaternion Matrix Equation

ZHANG Shanshan, HUANG Jingpin, XIONG Hao

(School of Mathematics and Physics, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: [**Purposes**]The present work proposed the problem of splitting iteration for the Sub-positive Definite Matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ over the quaternion field. [**Methods**] By using the self-conjugate and skew-self-conjugate splitting of quaternion normal matrix and sub-positive definite matrix, two new NPSS splitting iterations are established, and parameters are introduced to speed them up. [**Findings**] The extrapolation NPSS iteration (ENPSS) is obtained. It is proved that the ENPSS iteration converges to the unique solution of the original equations. At the same time, an upper bound of the iterative convergence factor and the quasi optimal parameter estimation are given. [**Conclusions**] The splitting problem of complex matrix equation is extended to the quaternion field, and a new ENPSS iteration is constructed. Numerical examples show the effectiveness and feasibility of the proposed iteration.

Keywords: quaternion field; sub-positive definite matrix; alternating iteration; NPSS iteration; ENPSS iteration

(责任编辑 许 甲)

勘 误 声 明

刊载于《重庆师范大学学报(自然科学版)》2022年第39卷第1期108～117页,题为《基于拓扑排序方法的预约检查流程优化》的文章,应作者要求作如下修改:

作者“周毓旻,傅春瑜,钟力炜”的单位序号“1”应更正为序号“2”,中英文相同修改,特此声明。

本刊编辑部

2022年3月