运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20220407

关于半无限优化问题稳定性的注记*

曾　悦，彭再云，彭健益，文　铭
(重庆交通大学 数学与统计学院，重庆 400074)

摘要:【目的】对半无限向量优化问题约束集映射的稳定性进行研究。【方法】首先，举例说明 Peng 等人在 2018 年的一篇文献中的相关结论是有缺陷的。然后借助函数的自然拟 C-凸性，分别获得了约束集映射的 Berge-下半连续性和约束集的 Painlevé-Kuratowski 收敛性。【结果】基于函数的自然拟 C-凸性，获得了约束集映射的稳定性结果。【结论】克服了原文献中相关定理的缺陷，并举例说明所得的新结论改进了相应结果。

关键词:半无限向量优化;Berge-下半连续;Painlevé-Kuratowski 收敛

中图分类号:O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2022)05-0001-06

半无限问题作为向量优化理论中的重要内容，可追溯到 Haar[1] 关于线性无限系统的论文。事实上，关于"半无限规划"的概念最早是由 Charnes 等人[2] 提出，研究线性半无限问题中的对偶性。此后，越来越多的学者对半无限向量优化问题进行了研究，并将它广泛地运用于实际生活中的各个领域，如:空气污染控制问题、机器人轨迹设计问题、交通网络运输问题等。目前，关于半无限优化的理论、应用及推广已有大量的研究成果，如解的稳定性、连通性以及稠密性等[3-10]。

众所周知，解映射在可行集或目标函数具有扰动情形下的稳定性研究一直是向量优化和相关领域的研究热点。近些年来，解映射的 Berge 连续性和解集的 Painlevé-Kuratowski 收敛性受到了众多学者的广泛关注。2009 年，Chuong 等人[6] 研究了目标函数和约束集均具有扰动下，参数半无限向量优化问题 Pareto 解映射的 Berge-上、下半连续性。2011 年，Fan 等人[7] 对非紧约束下半无限向量优化问题的稳定性进行了研究，分别获得了解映射的 Berge-上、下半连续性结果。2015 年，Gong 等人[8] 使用标量化方法，得到了扰动半无限向量优化问题有效解映射的 Berge-下半连续性。2018 年，Peng 等人[3] 在较弱假设下，获得了半无限优化问题在目标函数和约束集均具有扰动的情形下，弱有效解的 Berge-下半连续性和下 Painlevé-Kuratowski 收敛性(简称 l. P. K.)。值得注意的是，文献[3]在讨论约束集映射的 Berge-下半连续性和约束集的 Painlevé-Kuratowski 收敛性时，相关的定理 3.2 和推论 3.3 的证明过程有缺陷。故本文将克服文献[3]中上述两个结论的缺陷，并举例说明新结果是可行的。

1 预备知识

设 X 是 Hausdorff 拓扑向量空间，Y 和 Z 是实 Banach 空间。$\|\cdot\|$ 为 Banach 空间中的范数。C 和 K 分别为空间 Y 和 Z 中具有非空内部的闭凸点锥。空间 Y 中与锥 C 相关的序关系定义为:$\boldsymbol{x} \leqq_C \boldsymbol{y} \Leftrightarrow \boldsymbol{y}-\boldsymbol{x} \in C$，$\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in Y$。$A$ 为 X 中的非空紧凸子集。$\mathcal{C}[A,Z]$ 表示从 A 到 Z 的所有连续向量值函数全体。T 是 Hausdorff 拓扑空间中的非空紧子集，$\mathcal{C}[T,Y]$ 表示从 T 到 Y 的所有连续向量值函数全体。$\mathcal{WC}[A\times T,Y]$ 表示从 $A\times T$ 到 Y 的关于第一变量 C-半连续的向量值函数全体。定义元素 $g_1, g_2 \in \mathcal{WC}[A\times T,Y]$ 间的度量如下:

$$\rho(g_1,g_2) := \min\left\{\sup_{x\in A,t\in T}\|g_1(\boldsymbol{x},t)-\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x},t)\|,\ \frac{1}{2}\right\}。$$

* 收稿日期:2022-04-21　　修回日期:2022-05-18　　网络出版时间:2022-07-01　09:41

资助项目:国家自然科学基金(11301571);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT21021);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2021jcyjmsxmX0080);重庆市研究生联合培养基地建设项目(No. JDLHPYJD2021016);重庆交通大学校级研究生科研创新项目(No. 2021S0061)

第一作者简介:曾悦，女，研究方向为向量优化理论与应用，E-mail: zengyueylmn@163.com;通信作者:彭再云，男，教授，博士生导师，E-mail: pengzaiyun@126.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220630.1251.004.html

半无限向量优化问题的参数空间为 $P_0:=\mathcal{C}[A,Z]\times\mathcal{WC}[A\times T,Y]\times\mathcal{C}[T,Y]$。定义元素 $p_1=(f_1,g_1,b_1),p_2=(f_2,g_2,b_2)\in P_0$ 间的距离为:$d_{P_0}(p_1,p_2):=\sup\limits_{x\in A}\|f_1(\boldsymbol{x})-f_2(\boldsymbol{x})\|+\rho(g_1,g_2)+\sup\limits_{t\in T}\|b_1(t),b_2(t)\|$。

显然,若 $d_{P_0}(p_n,p)\to 0$,则有 $p_n\xrightarrow{d_{P_0}}p$。

Peng 等人[3]利用弱假设,对如下问题的稳定性进行了研究:

$$(\mathrm{SVO})\begin{cases}K-\min f(\boldsymbol{x})\\ \text{s.t. } \boldsymbol{x}\in H(g,b)\end{cases},$$

其中:$H(g,b)=\{\boldsymbol{x}\in A:g(\boldsymbol{x},t)-b(t)\leqq_C 0,\ \forall t\in T\}$。

下面是后续将使用的定义及相关性质。

定义1[11] 设 X 为拓扑向量空间,E 是 X 中的非空凸子集,f 是 E 到 Y 的一个向量值映射。称 f 在 E 上是自然拟 C-凸的,如果对于任意的 $\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2\in E$,$\lambda\in[0,1]$,存在 $\mu\in[0,1]$,使得:

$$f(\lambda\boldsymbol{x}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{x}_2)\in\mu f(\boldsymbol{x}_1)+(1-\mu)f(\boldsymbol{x}_2)-C。$$

定义2[12] 设 X 和 Y 为拓扑向量空间,E 是 X 中的非空子集,f 是 E 到 Y 的一个向量值映射。

1) 若对于任意 Y 中的零邻域 W,都存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U,使得对于任意 $\boldsymbol{x}\in U\cap E$,有 $f(\boldsymbol{x})\in f(\boldsymbol{x}_0)+W+C$,则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处是 C-下半连续的;

2) 若 $-f$ 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处是 C-下半连续的,则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处是 C-上半连续的;

3) 若 f 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处既是 C-上半连续又是 C-下半连续的,则称 f 在 $\boldsymbol{x}_0\in E$ 处是 C-连续的。

定义3[13-14] X 和 Y 均为拓扑向量空间,$F:X\to 2^Y$ 是一个集值映射。

1) 称 F 在 $\boldsymbol{x}_0\in X$ 处是 Berge-下半连续的(简称 B-l.s.c),当且仅当对于任意满足 $F(\boldsymbol{x}_0)\cap V\neq\varnothing$ 的开集 V,存在 X 中 $\boldsymbol{x}_0$ 的邻域 U,使得对任意 $\boldsymbol{x}\in U$,均有 $F(\boldsymbol{x})\cap V\neq\varnothing$ 成立;

2) 称 F 在 X 上是 B-l.s.c,当且仅当 F 在 X 中的任意 $\boldsymbol{x}_0$ 处是 B-l.s.c 的。

一个集合序列 $\{A_n\subset X:n\in\mathbf{N}\}$ 称为 Painlevé-Kuratowski 收敛(简称 P.K. 收敛)到 A 的,记为 $A_n\xrightarrow{\text{P.K.}}A$,如果 $\limsup\limits_{n\to\infty}A_n\subset A\subset\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$,其中:

$$\liminf_{n\to\infty}A_n:=\{\boldsymbol{x}\in X\mid\exists(\boldsymbol{x}_n),\boldsymbol{x}_n\in A_n,\forall n\in\mathbf{N},\boldsymbol{x}_n\to\boldsymbol{x}\},$$

$$\limsup_{n\to\infty}A_n:=\{\boldsymbol{x}\in X\mid\exists(n_k),\exists\boldsymbol{x}_{n_k},\boldsymbol{x}_{n_k}\in A_{n_k},\forall k\in\mathbf{N},\boldsymbol{x}_{n_k}\to\boldsymbol{x}\}。$$

当有 $A\subset\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ 时,称 $\{A_n\}$ 满足 l.P.K.,记:$A_n\xrightarrow{\text{l.P.K.}}A$。

定义4[15] 设 $p_0:=(f_0,g_0,b_0)\in P_0$。如果满足:1) p_0 满足弱 Slater 条件,即存在 $\boldsymbol{x}_0\in A$ 使得:$b_0(t)-g_0(\boldsymbol{x}_0,t)\in C\setminus\{0_Y\},\forall t\in T$;2) p_0 满足 Slater 条件,即存在 $\boldsymbol{x}_0\in A$ 使得:$b_0(t)-g_0(\boldsymbol{x}_0,t)\in\operatorname{int}C,\forall t\in T$。

2 (SVO)约束集映射的稳定性

本节讨论(SVO)约束集映射的 Berge-下半连续性和约束集的 Painlevé-Kuratowski 收敛性。下面,首先回顾文献[3]中将被修正的结果(即文献[3]中定理3.2)。

定理1[3] 设 $p_0:=(f_0,g_0,b_0)\in P_0$。若满足下列条件:1) 对于任意 $t\in T$,$g_0(\cdot,t)$ 在 A 上是自然拟 C-凸的;2) p_0 满足弱 Slater 条件。那么约束集映射 H 在 (g_0,b_0) 处是 B-l.s.c 的。

注1 事实上,上述定理的证明过程是有缺陷的,从而导致定理1是一个不充分的结论。下面举例说明。

例1 令 $X=\mathbf{R},Y=Z=\mathbf{R}^2,A=T=[0,1],C=\mathbf{R}_+^2$。定义 $f_0,f_n:A\to\mathbf{R}^2,g_0,g_n:A\times T\to\mathbf{R}^2,b_0,b_n:T\to\mathbf{R}^2$ 如下:

$$f(x)=f_n(x)=(x,x),\forall x\in A;g_0(x,t)=\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),x=0\\(0,0),x\in(0,1]\end{cases},\forall(x,t)\in A\times T;$$

$$g_n(x,t)=\begin{cases}\left(-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2}\right),x=0\\\left(\dfrac{1}{n},\dfrac{1}{n}\right),x\in(0,1]\end{cases},\forall(x,t)\in A\times T;b_0(t)=(t,0),\forall t\in T;$$

$$b_n(t)=\begin{cases}(0,0),t\in\left[0,\dfrac{1}{n+1}\right)\\ \left(\left(1+\dfrac{1}{n}\right)t,0\right),t\in\left[\dfrac{1}{n+1},1\right]\end{cases},\forall t\in T。$$

令 $p_0:=(f_0,g_0,b_0)\in P_0$。显然，$g_0$ 关于第一变量是 C-下半连续的。可以验证：

1) g_0 满足定理 1 中的条件 1)，即对于任意 $t\in T$，$g_0(\cdot,t)$ 在 A 上是自然拟 C-凸的。这是因为对于任意的 $x_1,x_2\in A,\lambda\in[0,1]$，都存在 $\mu=0$ 或者 $\mu=1$，使得：

$$g_0(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,t)\in\mu g_0(x_1,t)+(1-\mu)g_0(x_2,t)-C。$$

2) p_0 满足定理 1 中的条件 2)，即 p_0 满足弱 Slater 条件。这是因为存在 $x_0=0$，使得 $b_0(t)-g_0(x_0,t)\in C\backslash\{0_Y\}$ 对于任意 $t\in T$ 成立。

由此可见，定理 1 中的所有条件均满足。

通过计算可以得到：$b_0(t)-g_0(x,t)=\begin{cases}\left(t+\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right),x=0\\ (t,0),x\in(0,1]\end{cases}$。令：

$$L_1=\left\{(a,b)\mid a=t+\frac{1}{2},b=\frac{1}{2},\forall t\in[0,1]\right\},L_2=\{(a,b)\mid a=t,b=0,\forall t\in[0,1]\}。$$

那么可得 $H(g_0,b_0)=A=[0,1]$（图 1）。

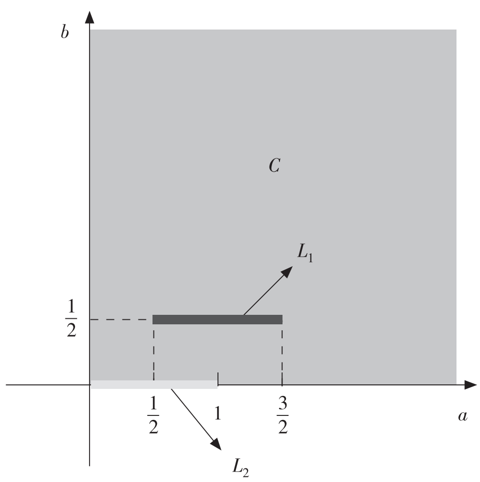

图 1　当任意 $x,t\in[0,1]$ 时，$b_0(t)-g_0(x,t)$ 的求值情况

Fig. 1　The numerical results for $b_0(t)-g_0(x,t)$ with $x,t\in[0,1]$

类似地，可以求出 $H(g_n,b_n)=\{0\}$。不难发现约束集映射 H 在 (g_0,b_0) 处并不是 B-l. s. c 的。由此看出，定理 1 在此处是不充分的，是有缺陷的。

下面给出定理 1 修正后的结果。

定理 2　设 $p_0:=(f_0,g_0,b_0)\in P_0$。若满足下列条件：1) 对于任意 $t\in T$，$g_0(\cdot,t)$ 在 A 上是自然拟 C-凸的；2) p_0 满足 Slater 条件；3) 对于任意 $\boldsymbol{x}\in A$，$g_0(\boldsymbol{x},\cdot)$ 在 T 上关于第二变量连续。那么约束集映射 H 在 (g_0,b_0) 处是 B-l. s. c 的。

证明　设开集 V 满足 $V\cap H(g_0,b_0)\neq\varnothing$。由 p_0 满足 Slater 条件可知，存在 $\bar{\boldsymbol{x}}\in A$ 满足：

$$b_0(t)-g_0(\bar{\boldsymbol{x}},t)\in\operatorname{int}C,\forall t\in T。\tag{1}$$

取 $\boldsymbol{x}_0\in V\cap H(g_0,b_0)$，那么由约束集的定义有：

$$g_0(\boldsymbol{x}_0,t)-b_0(t)\in-C。\tag{2}$$

因为 V 是开的，故存在 $s\in(0,1)$ 使得 $\boldsymbol{x}_s=\boldsymbol{x}_0+s(\bar{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0)\in V$。由 C 是凸集，那么结合(1)，(2)式可知，对于任意 $u\in[0,1]$，有：

$$\mu(g_0(\boldsymbol{x}_0,t)-b_0(t))+(1-\mu)(g_0(\bar{\boldsymbol{x}},t)-b_0(t))\in-C,\forall t\in T。\tag{3}$$

下证 $g_0(\boldsymbol{x}_s,t)-b_0(t)\leqq_C 0,\forall t\in T$。若结论不成立，则存在 $\bar{t}\in T$ 使得：

$$g_0(\boldsymbol{x}_s,\bar{t})-b_0(\bar{t})\nleqq_C 0。\tag{4}$$

因为对于任意 $t\in T$,$g_0(\cdot,t)$在 A 上是自然拟 C-凸的。故对于上述的 $\bar{t}$,存在 $\bar{u}\in[0,1]$,使得:

$$g_0(\boldsymbol{x}_s,\bar{t})\leqq_C\bar{u}g_0(x_0,\bar{t})+(1-\bar{u})g_0(\bar{x},\bar{t})。\tag{5}$$

结合(3),(5)式可得:$g_0(\boldsymbol{x}_s,\bar{t})-b_0(\bar{t})\leqq_C\bar{u}(g_0(\boldsymbol{x}_0,\bar{t})-b_0(\bar{t}))+(1-\bar{u})(g_0(\bar{\boldsymbol{x}},\bar{t})-b_0(\bar{t}))\leqq_C 0$,这与(4)式矛盾。因此 $g_0(\boldsymbol{x}_s,t)-b_0(t)\leqq_C 0$, $\forall t\in T$,即 $\boldsymbol{x}_s\in H(g_0,b_0)$。

另一方面,结合(1),(2)式以及 $g_0(\cdot,t)$在 A 上的自然拟 C-凸性,有 $b_0(t)-g_0(\boldsymbol{x}_s,t)\in\operatorname{int}C$,$\forall t\in T$。因此可以选取 $\varepsilon>0$,使得:

$$N_\varepsilon[b_0(t)-g_0(\boldsymbol{x}_s,t)]\subset C,\forall t\in T。\tag{6}$$

对于每一个满足 $d(p,p_0)<\dfrac{\varepsilon}{2}$的 $p:=(f,g,b)\in P_0$,有:

$$\|b_0(t)-b(t)\|<\frac{\varepsilon}{2},\forall t\in T。\tag{7}$$

同样地,存在 $\delta>0$,使得对任意满足 $\rho(g,g_0)<\delta$ 的 g,有:

$$\|g(\boldsymbol{x}_s,t)-g_0(\boldsymbol{x}_s,t)\|<\frac{\varepsilon}{2},\forall t\in T。\tag{8}$$

结合(6)~(8)式,对于 $\eta=\min\left\{\delta,\dfrac{\varepsilon}{2}\right\}$,有 $b(t)-g(\boldsymbol{x}_s,t)\in C$,$\forall t\in T$。所以,对于任意满足 $d(p,p_0)<\eta$ 的 $p\in P_0$,有 $\boldsymbol{x}_s\in H(g,b)$和 $V\cap H(g,b)\neq\varnothing$。因此,$H$ 在 p_0 处是 B-l.s.c 的。 证毕

注 2 通过定理 2 克服了定理 1 中的缺陷,给出了约束集映射 H 的 B-l.s.c 的结果。

下面,通过例 2 说明定理 2 是可行的。

例 2 令 $X=\mathbf{R}$,$Y=Z=\mathbf{R}^2$,$A=[-1,1]$,$T=[0,1]$,$C=\mathbf{R}^2_+$。定义 $f_0,f_n:A\to\mathbf{R}^2$,$g_0,g_n:A\times T\to\mathbf{R}^2$,$b_0$,$b_n:T\to\mathbf{R}^2$ 如下:

$$f_0(x)=(-2x-3,-x-1),\forall x\in A;f_n(x)=\left(-2x-3-\frac{1}{n},-x-1\right),\forall x\in A;$$

$$g_0(x,t)=(-3t-2,(2t+1)x-2),\forall(x,t)\in A\times T;$$

$$g_n(x,t)=\left(-3t-2-\frac{1}{n},(2t+1)\left(x+\frac{1}{n}\right)-2\right),\forall(x,t)\in A\times T;$$

$$b_0(t)=(-1-t,-1+t),\forall t\in T;b_n(t)=\left(-1-t-\frac{1}{n},-1+t-\frac{1}{n}\right),\forall t\in T。$$

令 $p_0:=(f_0,g_0,b_0)\in P_0$。显然,$g_0$ 关于第一变量是 C-半连续的。很容易验证:

1) g_0 满足定理 2 中条件 1),即对于任意 $t\in T$,$g_0(\cdot,t)$在 A 上是自然拟 C-凸的。

2) p_0 满足定理 2 中条件 2),即 p_0 满足 Slater 条件。这是因为对于任意 $x\in\left[-1,\dfrac{2}{3}\right)$,有 $b_0(t)-g_0(x_0,t)\in\operatorname{int}C$ 对于任意 $t\in T$ 成立。

3) g_0 满足定理 2 中条件 3),即对于任意 $x\in A$,$g_0(x,\cdot)$在 T 上关于第二变量连续。

由此可见,定理 2 中所有条件均满足。

计算可得 $b_0(t)-g_0(x,t)=(-1-t,-1+t)-(-3t-2,(2t+1)x-2)=(2t+1,t-2tx-x+1)$。故:

$$H(g_0,b_0)=\{x\in A\mid(2t+1,t-2tx-x+1)\in C,\ \forall t\in T\}。$$

又因为 $C=\mathbf{R}^2_+$ 且 $2t+1\geqslant 0$ 对于任意 $t\in T=[0,1]$成立,那么有 $H(g_0,b_0)=\{x\in A\mid t-2tx-x+1\geqslant 0,\forall t\in T\}$。因此,可以得到 $H(g_0,b_0)=\left[-1,\dfrac{2}{3}\right]$(图 2)。

类似地,可以求出 $H(g_n,b_n)=\left[-1,\dfrac{2}{3}-\dfrac{4}{3n}\right]$。显然,$H$ 在 p_0 处是 B-l.s.c 的。因此,定理 2 是可行的。

下面,给出第二个将修正的定理(见文献[3]中推论 3.3)。

定理 3[3] 设 $p_0:=(f_0,g_0,b_0)\in P_0$,$P_0\ni p_n=(f_n,g_n,b_n)\xrightarrow{d}p_0$。若满足:1) 对于任意 $t\in T$,$g_0(\cdot,t)$在 A 上是自然拟 C-凸的;2) p_0 满足弱 Slater 条件。那么 $H(g_n,b_n)\xrightarrow{\text{P.K.}}H(g_0,b_0)$。

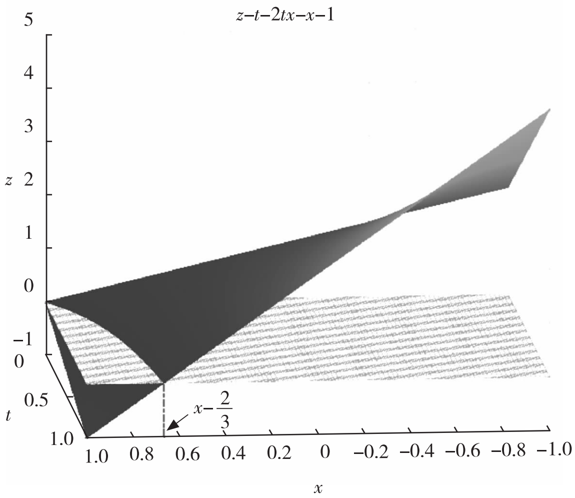

图 2　当任意 $t\in[0,1]$，$x\in[-1,1]$时，$z=t-2tx-x+1=0$ 的求值情况

Fig. 2　The numerical results for $z=t-2tx-x+1=0$ with $t\in[0,1]$ and $x\in[-1,1]$

注 3　事实上，通过例 1 可以进一步得到定理 3 是不充分的。在例 1 中定理 3 的所有条件均成立，但可以发现 $H(g_n,b_n)\overset{\text{P. K.}}{\not\longrightarrow}H(g_0,b_0)$。

最后给出定理 3 相应的修正结果如下。

定理 4　设 $p_0:=(f_0,g_0,b_0)\in P_0$，$P_0\ni p_n=(f_n,g_n,b_n)\xrightarrow{d}p_0$。若满足：1）对于任意 $t\in T$，$g_0(\cdot,t)$在 A 上是自然拟 C-凸的；2）p_0 满足 Slater 条件；3）对于任意 $\boldsymbol{x}\in A$，$g_0(\boldsymbol{x},\cdot)$在 T 上关于第二变量连续。那么 $H(g_n,b_n)\xrightarrow{\text{P. K.}}H(g_0,b_0)$。

定理 4 的证明由定理 2 约束集映射的 B-l. s. c 以及约束集的 Painlevé-Kuratowski 收敛性的定义易得。

注 4　通过定理 4 克服了定理 3 中的缺陷，给出了约束集的 Painlevé-Kuratowski 收敛性结果。

注 5　同理，可以验证例 2 满足定理 4 中所有假设，且容易得到 $H(g_n,b_n)\xrightarrow{\text{P. K.}}H(g_0,b_0)$。因此定理 4 是可行的。

参考文献：

[1] HAAR A. Über lineare ungleichungen[J]. Acta Mathematica，1924，2：1-14.

[2] CHARNES A，COOPER W W，KORTANEK K. Duality，Haar programs，and finite sequence spaces[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America，1962，48(5)：783-786.

[3] PENG Z Y，PENG J W，LONG X J，et al. On the stability of solutions for semi-infinite vector optimization problems[J]. Journal of Global Optimization，2018，70(1)：55-69.

[4] PENG Z Y，LI X B，LONG X J，et al. Painlevé-Kuratowski stability of approximate efficient solutions for perturbed semi-infinite vector optimization problems[J]. Optimization Letters，2018，12(6)：1339-1356.

[5] PENG Z Y，WANG X F，YANG X M. Connectedness of approximate efficient solutions for generalized semi-infinite vector optimization problems[J]. Set-Valued Variational Analysis，2019，27(1)：103-118.

[6] CHUONG T D，HUY N Q，YAO J C. Stability of semi-infinite vector optimization problems under functional perturbations[J]. Journal of Global Optimization，2009，45(4)：583-595.

[7] FAN X D，CHENG C Z，WANG H J. Stability of semi-infinite vector optimization problems without compact constraints[J]. Nonlinear Analysis：Theory，Methods and Applications，2011，74(6)：2087-2093.

[8] GONG X H. Lower semicontinuity of the efficient solution mapping in semi-infinite vector optimization[J]. Journal of Systems Science and Complexity，2015，28(6)：1312-1325.

[9] 彭再云，熊勤，王泾晶，等. 近似平衡约束向量优化问题解集的上 Painlevé-Kuratowski 收敛性[J]. 系统科学与数学，2018，38(8)：960-970.

PENG Z Y，XIONG Q，WANG J J，et al. On upper Painlevé-Kuratowski convergence of the solutions set to vector optimization problems under approximate equilibrium constraints[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, 2018, 38(8): 960-970.

[10] PENG Z Y, CHEN X J, ZHAO Y B, et al. Painlevé-Kuratowski convergence of minimal solutions for set-valued optimization problems via improvement sets[J/OL]. Journal of Global Optimization. (2022-05-03)[2022-05-18]. https://doi.org/10.1007/s10898-022-01166-8.

[11] TANAKA T. Generalized quasiconvexities, cone saddle points and minimax theorems for vector valued functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 81(2): 355-377.

[12] LUC D T. Theory of vector optimization[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.

[13] AUBIN J P, EKELAND I. Applied nonlinear analysis[M]. New York: John Wiley and Sons, 1984.

[14] BERGE C, PATTERSON E M. Topological spaces: including a treatment of multi-valued functions, vector spaces and convexity [M]. Edinburgh: Oliver and Boyd, 1963.

[15] HUY N Q, YAO J C. Semi-infinite optimization under convex function perturbations: Lipschitz stability[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 148(2): 237-256.

Operations Research and Cybernetics

Notes on Stability of Semi-Infinite Vector Optimization Problems

ZENG Yue, PENG Zaiyun, PENG Jianyi, WEN Ming

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: [**Purposes**] The stability for the constraint set mapping of semi-infinite vector optimization problems is discussed. [**Methods**] Firstly, examples are given to illustrate that the relevant conclusions of Peng' paper in 2018 are defective. Then, by using the naturally quasi$C$-convexity of functions, Berge-lower semicontinuity of constraint set mappings and the Painlevé-Kuratowski convergence of constraint sets were obtained respectively. [**Findings**] Based on the naturally quasi$C$-convexity of functions, the stability of the constraint set mapping are obtained. [**Conclusions**] It overcomes the defect of the relevant theorems in former paper. Some examples illustrate that the new results improve the corresponding results.

Keywords: semi-infinite vector optimization; Berge-lower semicontinuity; Painlevé-Kuratowski convergence

(责任编辑　黄　颖)