

加权最小包容球问题的对偶光滑逼近算法*

胡平, 蒋毅

(四川师范大学 数学科学学院 可视化计算与虚拟现实四川省重点实验室, 成都 610068)

摘要:【目的】研究加权最小包容球问题,并给出一类求解该问题的算法。【方法】加权最小包容球问题是一个极大极小化的非光滑问题。首先利用对偶方法将该问题转化为极小化非光滑问题,然后利用光滑逼近思想,将该问题转化为极小化的光滑问题进行求解。【结果】根据数据实例表明该算法有效。【结论】得到求解加权最小包容球问题的一类对偶光滑逼近算法。

关键词: 加权最小包容球;极大极小问题;非光滑优化;光滑逼近;有限内存 L-BFGS 方法

中图分类号:O221.1

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)05-0007-07

在 \mathbf{R}^n 空间中,给定一组不同点的集合 $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$,对于每个点 $c_i \in C$ 有相对应的权重 $r_i > 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 。加权最小包容球(WMEB)问题是求解以 $x \in \mathbf{R}^n$ 为中心,使得 C 中各点到中心 x 的加权欧式距离的最大值达到最小。WMEB 问题定义如下:

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) = \min_{x \in \mathbf{R}^n} \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(x)\}, \quad (1)$$

其中:

$$f_i(x) = r_i \|x - c_i\|, i = 1, 2, \dots, m. \quad (2)$$

当 $r_i = 1$ 时,该问题是最小包容球(MEB)问题。MEB 问题定义为 $\min_{x \in \mathbf{R}^n} \max_{1 \leq i \leq m} \|x - c_i\|$ 。该问题是为了找到能包容 C 中所有的点并且半径最小的球。学者们对最小包容球问题进行了广泛研究^[1-8],然而关于加权最小包容球问题,目前的研究还较少。在 \mathbf{R}^2 空间中,Hearn 等人^[9]提出一种几何对偶算法。在 \mathbf{R}^n 空间中,Dearing 等人^[10]提出沿着给定点的最远点 Voronoi 图进行搜索的原始算法。

由于 WMEB 问题是极大极小化的非光滑凸优化问题,因此本文首先利用对偶方法将该问题转化为极小化非光滑问题。然后利用光滑逼近的思想,将该问题转化为极小化的光滑问题进行求解。此外,给出对偶光滑逼近算法求解 WMEB 问题,证明了该算法的收敛性,并且利用文献[11]中的数据进行验算,验证了本文提出的算法是有效的。最后,采用随机生成的数据实验表明,该算法能解决空间维数 n 达到 200,点的个数 m 达到 10 000,以及空间维数 n 达到 900,点的个数 m 达到 1 000 的情况。因为 MEB 问题是 WMEB 问题的特殊情况,所以本文的算法同样适用于求解 MEB 问题。

在本文中,除非另有说明,否则所有向量都是列向量。设 I_d 表示 $d \times d$ 单位矩阵, $\text{co}(S)$ 是集合 $S \subseteq \mathbf{R}^n$ 的凸包。对于凸函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, $\partial f(x)$ 表示 f 在 x 处的次微分。注意,当且仅当 $0 \in \partial f(x)$ 时, f 在 x 处取得最小值。

1 问题(1)的光滑逼近

由 $\max\{a, b\} = \max_{\lambda} \{\lambda a + (1-\lambda)b\}$,其中 $0 \leq \lambda \leq 1$,可推出问题(1)的目标函数 $f(x)$ 的等价公式为:

$$\begin{aligned} f(x) &\equiv \max_{\lambda \in \mathbf{R}^m} \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i(x), \\ \text{s. t. } &\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1, 0 \leq \lambda_i \leq 1, i = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (3)$$

* 收稿日期:2021-06-02 修回日期:2021-12-13 网络出版时间:2022-09-19 11:36

资助项目:国家自然科学基金(No. 11201324);教育部霍英东基金(No. 141114);四川省自然科学基金(No. 2022NSFSC1852)

第一作者简介:胡平,女,研究方向为运筹学与控制论,E-mail:Phu1174@163.com;通信作者:蒋毅,女,教授,E-mail:yijiang103@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220916.1859.031.html

线性规划问题(3)有可行点 $\bar{\lambda} = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)^T$, 因此问题(3)的解非空。由强对偶定理可得, 对于任意 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, 问题(3)的最优值与对偶线性规划的最优值相同。即:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) &\equiv \min_{\omega \in \mathbf{R}, \mu_i \in \mathbf{R}^m} -\omega + \sum_{i=1}^m \mu_i, \\ \text{s. t. } &\mu_i \geq f_i(\mathbf{x}) + \omega, \mu_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (4)$$

其中: ω 和 μ_i 是与约束 $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$ 和 $\lambda_i \leq 1 (i=1, 2, \dots, m)$ 相关的拉格朗日乘子。注意到 $\mu_i \geq f_i(\mathbf{x}) + \omega$ 且 $\mu_i \geq 0$ 。因此令 $\varphi(f_i(\mathbf{x}) + \omega) := \max\{0, f_i(\mathbf{x}) + \omega\}, i=1, 2, \dots, m$ 。再代入(4)式的目标函数, 消除变量 μ , 得到:

$$f(\mathbf{x}) \equiv \min_{\omega \in \mathbf{R}} \left\{ -\omega + \sum_{i=1}^m \varphi(f_i(\mathbf{x}) + \omega) \right\}. \quad (5)$$

因此, 问题(1)转化为极小化非光滑优化问题:

$$\min_{\omega \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} -\omega + \sum_{i=1}^m \varphi(f_i(\mathbf{x}) + \omega). \quad (6)$$

因为 $\varphi(f_i(\mathbf{x}) + \omega)$ 是不可微的, 所以利用光滑函数 $\delta(t; p) = p \ln(1 + e^{\frac{t}{p}}) (\forall p > 0)$ 对它进行光滑逼近。

文献[12-13]证明了函数 $\delta(t; p)$ 具有以下性质。

引理 1 对任意 $p \in (0, 1]$, 函数 $\delta(t; p): \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^+$ 满足: 1) $\delta(t; p)$ 是严格凸的可微函数; 2) $\lim_{p \rightarrow 0^+} \delta(t; p) = \max\{0, t\} = \varphi(t)$ 。

根据光滑函数 $\delta(t; p)$, 定义函数: $\delta(f_i(\mathbf{x}; p) + \omega; p) := p \ln(1 + e^{\frac{f_i(\mathbf{x}; p) + \omega}{p}}), \forall p > 0$, 其中:

$$f_i(\mathbf{x}; p) = r_i \sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2}, \omega \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n, i=1, 2, \dots, m. \quad (7)$$

因此, 在问题(6)的基础上, 问题(1)可以转化为下列光滑无约束优化问题:

$$\min_{\omega, \mathbf{x}} \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) := -\omega + \sum_{i=1}^m \delta(f_i(\mathbf{x}; p) + \omega; p). \quad (8)$$

引理 2 问题(8)中定义的函数 $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p)$ 具有以下性质: 1) 对任意 $\omega \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 和 $0 < p^1 < p^2$, 则有 $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p^1) < \Phi(\omega, \mathbf{x}; p^2)$ 。2) 对任意 $\omega \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 和 $p > 0$, 则有:

$$f(\mathbf{x}) \leq \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) \leq f(\mathbf{x}) + p \left(\sum_{i=1}^m r_i + m \ln 2 \right). \quad (9)$$

3) 对任意 $p > 0, \Phi(\omega, \mathbf{x}; p)$ 是连续可微且严格凸的。

证明 1) 对任意 $p > 0$ 和 $t \in \mathbf{R}$, 有:

$$\frac{\partial \delta(t; p)}{\partial t} = \frac{e^{\frac{t}{p}}}{1 + e^{\frac{t}{p}}} > 0,$$

$$\frac{\partial \delta(t; p)}{\partial p} = \ln(1 + e^{\frac{t}{p}}) - \frac{t}{p} \frac{e^{\frac{t}{p}}}{1 + e^{\frac{t}{p}}} = \ln(1 + e^{\frac{t}{p}}) - \ln e^{\frac{t}{p}} \cdot \frac{e^{\frac{t}{p}}}{1 + e^{\frac{t}{p}}} > \ln(1 + e^{\frac{t}{p}}) - \ln e^{\frac{t}{p}} > 0.$$

又因为 $f_i(\mathbf{x}; p)$ 随 p 严格增加, 所以对于任何 $0 < p^1 < p^2$, 都有:

$$\delta(f_i(\mathbf{x}; p^1); p^1) < \delta(f_i(\mathbf{x}; p^2); p^1) < \delta(f_i(\mathbf{x}; p^2); p^2), i=1, 2, \dots, m.$$

故由 $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p)$ 的定义, 可得 $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p^1) < \Phi(\omega, \mathbf{x}; p^2)$ 。

2) 经过简单计算, 可得 $\delta(t; p) - \varphi(t) = p \ln(1 + e^{\frac{t}{p}}) - \frac{t + |t|}{2}$ 。对任何 $\omega \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 和 $p > 0$, 由前式可以推出不等式:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \delta(f_i(\mathbf{x}; p) + \omega; p) - \varphi(f_i(\mathbf{x}; p) + \omega) \leq p \ln 2, \\ 0 &\leq \varphi(f_i(\mathbf{x}; p) + \omega) - \varphi(f_i(\mathbf{x}) + \omega) \leq r_i p. \end{aligned}$$

上述两个不等式相加, 可得:

$$0 \leq \delta(f_i(\mathbf{x}; p) + \omega; p) - \varphi(f_i(\mathbf{x}) + \omega) \leq p(r_i + \ln 2).$$

因此,根据 $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p)$ 的定义、(5)式和上式可得:

$$0 \leq \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) - \left(-\omega + \sum_{i=1}^m \varphi(f_i(\mathbf{x}) + \omega)\right) \leq p \left(\sum_{i=1}^m r_i + m \ln 2\right).$$

故有 $f(\mathbf{x}) \leq \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) \leq f(\mathbf{x}) + p \left(\sum_{i=1}^m r_i + m \ln 2\right)$ 。

3) 对于任意 $p > 0$, 显然 $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p)$ 是连续可微的。下面证明 $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p)$ 是严格凸的, 根据(8)式可得:

$$\nabla_{\omega} \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) = -1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p), \quad (10)$$

且有:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) \nabla f_i(\mathbf{x}; p) = \sum_{i=1}^m \frac{r_i \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) (\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)}{\sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2}}, \quad (11)$$

其中: $\nabla f_i(\mathbf{x}; p) = \frac{r_i (\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)}{\sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2}}$, $\lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) = 1 - \frac{1}{1 + e^{\frac{f_i(\mathbf{x}; p) + \omega}{p}}}$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。

$$\text{令 } \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) := \frac{\frac{1}{p} e^{\frac{f_i(\mathbf{x}; p) + \omega}{p}}}{\left(1 + e^{\frac{f_i(\mathbf{x}; p) + \omega}{p}}\right)^2}, i = 1, 2, \dots, m, \text{ 且:}$$

$$H := \sum_{i=1}^m (\tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) \nabla f_i(\mathbf{x}; p) \nabla f_i(\mathbf{x}; p)^T + \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) \nabla^2 f_i(\mathbf{x}; p)) \in \mathbf{R}^{n \times n}.$$

其中: $\nabla^2 f_i(\mathbf{x}; p) = r_i \frac{(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2) \mathbf{I}_n - (\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)^T}{(\sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2})^3}$, $i = 1, 2, \dots, m$ 。故根据(10), (11)式, 则有:

$$\nabla^2 \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) & \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) \nabla f_i(\mathbf{x}; p)^T \\ \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) \nabla f_i(\mathbf{x}; p) & H \end{pmatrix}.$$

因此, 对于任何 $\bar{\boldsymbol{\eta}} = \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \boldsymbol{\eta} \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{n+1}$, $\bar{\boldsymbol{\eta}} \neq 0$ 和 $\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{R}^n$, 可以得到:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\eta}}^T \nabla^2 \Phi(\omega, \mathbf{x}; p) \bar{\boldsymbol{\eta}} &= \eta_0^2 \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) + 2\eta_0 \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) \boldsymbol{\eta}^T \nabla f_i(\mathbf{x}; p) + \boldsymbol{\eta}^T H \boldsymbol{\eta} = \\ &= \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) (\eta_0^2 + 2\eta_0 \boldsymbol{\eta}^T \nabla f_i(\mathbf{x}; p) + (\boldsymbol{\eta}^T \nabla f_i(\mathbf{x}; p))^2) + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) \boldsymbol{\eta}^T \nabla^2 f_i(\mathbf{x}; p) \boldsymbol{\eta} = \\ &= \sum_{i=1}^m \tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p) (\eta_0 + \boldsymbol{\eta}^T \nabla f_i(\mathbf{x}; p))^2 + \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) \boldsymbol{\eta}^T \nabla^2 f_i(\mathbf{x}; p) \boldsymbol{\eta} \geq \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) r_i [(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2) \|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \boldsymbol{\eta}^T (\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)(\mathbf{x} - \mathbf{c}_i)^T \boldsymbol{\eta}] (\sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2})^{-3} \geq \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i(\omega, \mathbf{x}; p) r_i [(\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2) \|\boldsymbol{\eta}\|^2 - \|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 \|\boldsymbol{\eta}\|^2] (\sqrt{\|\mathbf{x} - \mathbf{c}_i\|^2 + p^2})^{-3} > 0. \end{aligned}$$

其中: 第 1 个不等式是由 $\tilde{\lambda}_i(\omega, \mathbf{x}; p)$ 的非负性和 $\nabla^2 f_i(\mathbf{x}; p)$ 的表达式得到的, 第 2 个不等式是 Cauchy-Schwartz 不等式得到的。这表明对任意 $p > 0$, $\Phi(\omega, \mathbf{x}; p)$ 是 ω 和 \mathbf{x} 的联合严格凸函数。证毕

2 对偶光滑逼近算法

由引理 2 可以看出, 无约束优化问题(8)是问题(1)的光滑逼近。故在此基础上给出了一种算法, 并进行了全局收敛性分析。

算法 A 步骤 1, 初始值为 $\sigma \in (0, 1)$, $(\omega^0, \mathbf{x}^0) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$, $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 > 0$, $p^0 > 0$ 且 $k = 0$;

步骤 2, 使用有限内存 L-BFGS 算法求解光滑无约束优化问题:

$$\min_{\omega \in \mathbf{R}, \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n} \Phi(\omega, \mathbf{x}; p^k), \quad (12)$$

更新 $k := k + 1$, 且 $p^k = \sigma p^{k-1}$ 。得到(12)式相应的最优解记为 (ω^k, \mathbf{x}^k) , 且满足 $\|\Phi(\omega^k, \mathbf{x}^k; p^k)\| \leq \varepsilon_2$;

步骤 3, 若 $p^k \leq \varepsilon_1$, 则停止计算, 并输出 (ω^k, \mathbf{x}^k) 。否则, 转步骤 2;

下面给出算法 A 的收敛性证明。

引理 3 设 $\{\omega^k, \mathbf{x}^k\}_{k \geq 1}$ 为算法 A 产生的点序列, 则 $\{\mathbf{x}^k\}_{k \geq 1}$ 的极限点为问题(1)的最优解。

证明 设 $\{\omega^*, \mathbf{x}^*\}$ 为 (ω^k, \mathbf{x}^k) 的一个极限点, 即 $k \rightarrow +\infty$ 时, 有 $(\omega^k, \mathbf{x}^k) \rightarrow (\omega^*, \mathbf{x}^*)$ 。从 (ω^k, \mathbf{x}^k) 是问题(12)的解, 可以得到:

$$\nabla_{\omega} \Phi(\omega^k, \mathbf{x}^k; p^k) = -1 + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k = 0, \quad (13)$$

$$\nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\omega^k, \mathbf{x}^k; p^k) = \sum_{i=1}^m r_i \frac{\lambda_i^k (\mathbf{x}^k - \mathbf{c}_i)}{\sqrt{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{c}_i\|^2 + (p^k)^2}} = 0, \quad (14)$$

$$\text{其中: } \lambda_i^k = \lambda_i(\omega^k, \mathbf{x}^k; p^k) = \frac{e^{\frac{[r_i \sqrt{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{c}_i\|^2 + (p^k)^2} + \omega^k]}{p^k}}}{1 + e^{\frac{[r_i \sqrt{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{c}_i\|^2 + (p^k)^2} + \omega^k]}{p^k}}} = 1 - \frac{1}{e^{\frac{[r_i \sqrt{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{c}_i\|^2 + (p^k)^2} + \omega^k]}{p^k}}}, i = 1, 2, \dots, m。$$

此外, 根据(1), (5), (8), (12)式, 可以推断:

$$f(\mathbf{x}^k) = \max_{1 \leq i \leq m} \{f_i(\mathbf{x}^k)\} = -\omega^k + \sum_{i=1}^m \max\{0, f_i(\mathbf{x}^k) + \omega^k\}. \quad (15)$$

定义指标集:

$$I(\mathbf{x}^*) = \{i : f_i(\mathbf{x}^*) = f(\mathbf{x}^*), i = 1, 2, \dots, m\}. \quad (16)$$

根据(15)式、 $f_i(\mathbf{x})$ 和 $\max\{0, t\}$ 的连续性, 可得:

$$f(\mathbf{x}^*) = -\omega^* + \sum_{i \in I(\mathbf{x}^*)} \max\{0, f_i(\mathbf{x}^*) + \omega^*\} + \sum_{i \notin I(\mathbf{x}^*)} \max\{0, f_i(\mathbf{x}^*) + \omega^*\}. \quad (17)$$

由(13)式和 λ_i^k 的定义可知, $\sum_{i=1}^m \lambda_i^k = 1$ 和 $0 < \lambda_i^k < 1$ 。因此, 序列 $\{\lambda_i^k\}$ 有一个收敛的子序列。在不失一般性的情况下, 令 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_i^k = \lambda_i^*$ 。又对任意 $i \in 1, 2, \dots, m$, 有:

$$t_i^* := \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{r_i (\mathbf{x}^k - \mathbf{c}_i)}{\sqrt{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{c}_i\|^2 + (p^k)^2}} \in \partial f_i(\mathbf{x}^*). \quad (18)$$

根据(14)式可得:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \nabla_{\mathbf{x}} \Phi(\omega^k, \mathbf{x}^k; p^k) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* t_i^* = \sum_{i \in I(\mathbf{x}^*)} \lambda_i^* t_i^* + \sum_{i \notin I(\mathbf{x}^*)} \lambda_i^* t_i^* = 0. \quad (19)$$

如果:

$$\sum_{i \in I(\mathbf{x}^*)} \lambda_i^* = 1, 0 \leq \lambda_i^* \leq 1, i \in I(\mathbf{x}^*) \text{ 且 } \sum_{i \notin I(\mathbf{x}^*)} \lambda_i^* = 0, \quad (20)$$

则由(18), (19)式可知 $0 \in \text{co}\{\partial f_i(\mathbf{x}^*), i \in I(\mathbf{x}^*)\} = \partial f(\mathbf{x}^*)$ 。

因此, \mathbf{x}^* 是问题(1)的最优解。

若要完成引理 3 的证明, 只需要证明(20)式成立。首先, 从(17)式很容易推出:

$$f_i(\mathbf{x}^*) + \omega^* \leq 0, i \notin I(\mathbf{x}^*), \quad (21)$$

否则:

$$f(\mathbf{x}^*) > f_i(\mathbf{x}^*), i \in I(\mathbf{x}^*). \quad (22)$$

现在, 分别考虑 $|I(\mathbf{x}^*)| = 1$ 和 $|I(\mathbf{x}^*)| > 1$ 的情况, 其中 $|I(\mathbf{x}^*)|$ 表示集合 $I(\mathbf{x}^*)$ 中的元素个数。

情形 1, 如果 $|I(\mathbf{x}^*)| = 1$, 则假设 $f(\mathbf{x}^*) = f_{i_0}(\mathbf{x}^*)$, 其中 $i_0 \in I(\mathbf{x}^*)$ 。根据(21)式可得, 对于足够大的 k , 有 $f_{i_0}(\mathbf{x}^k) + \omega^k > 0$ 。结合 $\lambda_i(\omega^k, \mathbf{x}^k; p^k)$ 的定义, 得到:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_{i_0}^k = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^{\frac{[f_{i_0}(\mathbf{x}^k; p^k) + \omega^k]}{p^k}}} = 1 = \lambda_{i_0}^*, \quad (23)$$

又根据(13)式,可得:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \lambda_{i_0}^k + \sum_{i \neq i_0} \lambda_i^k = 1. \tag{24}$$

则结合(23)和(24)式,可推出(20)式成立。

情形 2,如果 $|I(\mathbf{x}^*)| > 1$,则容易证明(21)式严格成立,即:

$$f_i(\mathbf{x}^*) + \omega^* < 0, i \notin I(\mathbf{x}^*). \tag{25}$$

否则,存在 $i_1 \notin I(\mathbf{x}^*)$,有 $\omega^* = -f_{i_1}(\mathbf{x}^*)$ 。

又根据 $|I(\mathbf{x}^*)| > 1$ 和(17)式,可得 $\omega^* = -f(\mathbf{x}^*)$,这与 $I(\mathbf{x}^*)$ 定义矛盾。因此,根据(25)式和 λ_i^k 的定义,

有 $\lambda_i^* = \lim_{k \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{e^{\frac{[f_i(\mathbf{x}^k; p^k) + \omega^k]}{p^k}}} = 0, i_1 \notin I(\mathbf{x}^*)$ 。即(20)式成立。 证毕

定理 1 设 $\{\mathbf{x}^k\}$ 为算法 A 产生的点序列,如果 \mathbf{x}^* 是问题(1)的唯一最优解,则 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*$ 。

证明 对于任何 $k \geq 1$,通过引理 2 和算法 A,可得:

$$\Phi(\omega^1, \mathbf{x}^1; p^1) > \Phi(\omega^1, \mathbf{x}^1; p^k) \geq \Phi(\omega^k, \mathbf{x}^k; p^k) \geq \Phi(\omega^{k+1}, \mathbf{x}^{k+1}; p^{k+1}) \geq f(\mathbf{x}^{k+1}) > 0. \tag{26}$$

由于 $f(\mathbf{x})$ 是强制在水平集 $L = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : f(\mathbf{x}) \leq \Phi(\omega^1, \mathbf{x}^1; p^1)\}$ 上,故 $f(\mathbf{x})$ 是有界的。结合(26)式,则有序列 $\{\mathbf{x}^k\} \subset L$ 。因此,序列 $\{\mathbf{x}^k\}$ 在 \mathbf{R}^n 中有界。

如果 \mathbf{x}^* 是问题(1)的唯一最优解,则由引理 3 表明 $\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{x}^k = \mathbf{x}^*$ 。 证毕

3 数据实例

本文根据文献[11]中给出的实例应用算法 A 进行运算,证明算法 A 的有效性。

例 1 令 $C = \{\mathbf{c}_1^T = [0, 0, 0], \mathbf{c}_2^T = [10, 0, 0]\}$,相应的权重分别为 $r_1 = 1.5, r_2 = 2.5$ 。应用算法 A 去求解问题(12),得到最优解为 9.37,其中 $\mathbf{x}^T = [6.25, 0, 0]$ 。

例 2 令 $C = \{\mathbf{c}_1^T = [0, 0, 0], \mathbf{c}_2^T = [10, 0, 0], \mathbf{c}_3^T = [7, 8, 0]\}$,相应的权重分别为 $r_1 = 1.5, r_2 = 2.5, r_3 = 2.5$ 。应用算法 A 去求解问题(12),得到最优解为 11.52,其中 $\mathbf{x}^T = [6.89, 3.39, 0]$ 。

这两个实例都与文献[11]的数值结果一样。下面给出例 1 和例 2 的 WMEB 图形情况。

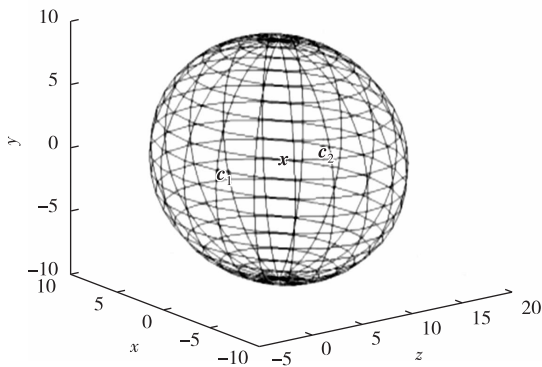


图 1 $n=3$ 和 $m=2$ 时, WMEB 问题的求解结果

Fig. 1 When $n=3$ and $m=2$, the results of WMEB problems

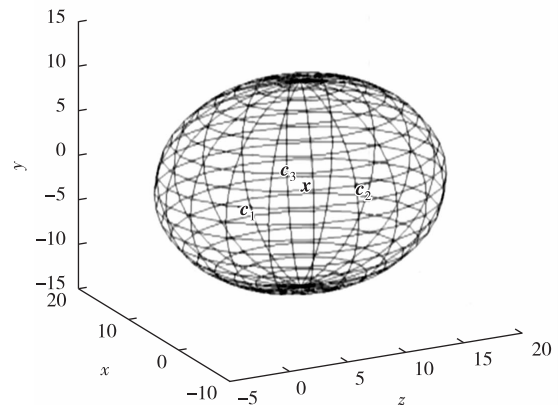


图 2 $n=3$ 和 $m=3$ 时, WMEB 问题的求解结果

Fig. 2 When $n=3$ and $m=3$, the results of WMEB problems

4 数值实验

本节数值实验在 Core i7 2.4 GHz 电脑上完成,使用 Matlab 软件进行求解。算法 A 的参数定义为: $\sigma = 0.1, \epsilon_1 = 1.0e-6, \epsilon_2 = 1.0e-3, p^0 = 1$ 。测试问题的随机序列产生如下:

$$\nu_0 = 7, \nu_{i+1} = (445\nu_i + 1) \bmod 4\,096, \bar{\nu}_i = \frac{\nu_i}{4\,096} (i = 1, 2, \dots).$$

相应的权重 r_i 和 $c_i (i=1, 2, \dots, m)$ 依次设置为 $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots$, 顺序如下:

$$r_1, c_1(1), c_1(2), \dots, c_1(n); r_2, c_2(1), c_2(2), \dots, c_2(n); \dots; r_m, c_m(1), c_m(2), \dots, c_m(n).$$

其中: $r_i = 1 + 0.000\ 05i (i=1, 2, \dots, m)$, 初始点设为 $\omega^0 = 0, x^0 = 0$ 。

运用算法 A 求解问题(1), 数值结果见表 1 和表 2。表中 n 与 m 分别表示 \mathbf{R}^n 空间的维数和点的个数。

表 1 $n=200$ 时的目标值、CPU 时间和迭代次数

Tab. 1 The target value, CPU time and iterations when $n=200$

m /个	n /维	目标值	时间/s	迭代次数	m /个	n /维	目标值	时间/s	迭代次数
1 000	200	4.466 090 06	192.74	107	6 000	200	5.531 640 14	826.14	110
2 000	200	4.673 756 64	300.01	116	7 000	200	5.751 048 54	900.08	101
3 000	200	4.888 278 23	403.10	110	8 000	200	5.953 972 54	1 010.98	98
4 000	200	5.095 779 48	1 451.79	308	9 000	200	6.175 309 03	1 332.39	118
5 000	200	5.316 434 81	664.46	104	10 000	200	6.386 168 19	2 000.08	103

表 2 $m=1\ 000$ 时的目标值、CPU 时间和迭代次数

Tab. 2 The target value, CPU time and iterations when $m=1\ 000$

m /个	n /维	目标值	时间/s	迭代次数	m /个	n /维	目标值	时间/s	迭代次数
1 000	100	3.236 907 98	67.79	102	1 000	600	7.487 317 62	1 045.29	283
1 000	200	4.466 090 06	192.74	107	1 000	700	8.099 552 28	1 193.30	275
1 000	300	5.372 158 19	209.10	106	1 000	800	8.642 628 07	1 060.59	206
1 000	400	6.146 031 70	453.70	177	1 000	900	9.157 794 04	1 145.77	205
1 000	500	6.876 940 36	1 098.25	365					

表 1 给出了当空间维数 $n=200$, 点的个数 m 的取值从 1 000 递增到 10 000 时, 由算法 A 计算所得的目标值、CPU 时间和迭代次数。由表 1 可知, 算法 A 能在大约 33 min 内求解 $n=200, m=10\ 000$ 的 WMEB 问题。表 2 给出了当点的个数 $m=1\ 000$ 时, 空间维数 n 的取值从 100 递增到 900 时, 由算法 A 计算所得的目标值、CPU 时间和迭代次数。由表 2 可知, 算法 A 能在大约 19 min 内求解 $n=900, m=1\ 000$ 的 WMEB 问题。算法 A 在处理大规模数据上的加权最小包容球问题是有效的。

参考文献:

- [1] CHRYSTAL G. On the problem to construct the minimum circle enclosing n given points in a plane[J]. Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society, 1884, 3: 30-33.
- [2] MEGIDDO N. Linear-time algorithms for linear programming in \mathbf{R}^3 and related problems[J]. SIAM Journal on Computing, 1983, 12(4): 759-776.
- [3] XU S, FREUND R M, SUN J. Solution methodologies for the smallest enclosing circle problem[J]. Computational Optimization and Applications, 2003, 25(1): 283-292.
- [4] ZHOU G, TOHEMAIL K C, SUN J. Efficient algorithms for the smallest enclosing ball problem[J]. Computational Optimization and Applications, 2005, 30(2): 147-160.
- [5] PAN S H, LI X S. An efficient algorithm for the smallest enclosing ball problem in high dimensions[J]. Applied Mathematics and Computation, 2006, 172(1): 49-61.
- [6] YILDIRIM E A. Two algorithms for the minimum enclosing ball problem[J]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 19(3): 1368-1391.
- [7] DEARING P M, ZECK C R. A dual algorithm for the minimum covering ball problem in \mathbf{R}^n [J]. Operations Research Letters, 2009, 37(3): 171-175.
- [8] LIU Y F, DIAO R, Ye F, et al. An efficient inexact Newton-CG algorithm for the smallest enclosing ball problem of large dimensions[J]. Journal of the Operations Research Society of China, 2016, 4(2): 167-191.
- [9] HEARN D W, VIJAY J. Efficient algorithms for the (weighted) minimum circle problem[J]. Operations Research, 1982, 30(4):

777-795.

- [10] DEARING P M, BELOTTI P, SMITH A M. A primal algorithm for the weighted minimum covering ball problem in \mathbf{R}^n [J]. TOP; an Official Journal of the Spanish Society of Statistics and Operations Research, 2016, 24: 466-492.
- [11] DEARING P M, SMITH A M. A dual algorithm for the minimum covering weighted ball problem in \mathbf{R}^n [J]. Journal of Global Optimization, 2013, 55(2): 261-278.
- [12] AUSLENDER A, COMINETTI R, HADDOU M. Asymptotic analysis for penalty and barrier methods in convex and linear programming [J]. Mathematics of Operations Research, 1997, 22(1): 43-62.
- [13] GONZAGA C C, CASTILLO R A. A nonlinear programming algorithm based on non-coercive penalty functions [J]. Mathematical Programming, 2003, 96(1): 87-101.

Operations Research and Cybernetics

A Dual Smooth Approximation Algorithm for Solving the Weighted Minimum Enclosing Ball Problem

HU Ping, JIANG Yi

(Key Laboratory of Visual Computing and Virtual Reality of Sichuan Province,
School of Mathematical Science, Sichuan Normal University, Chengdu 610068, China)

Abstract: [Purposes] To study the weighted minimum enclosing ball problem and give a class of algorithm for solving the problem. [Methods] The problem of the weighted minimum enclosing ball is a maxmin non-smooth problem. Firstly, the dual method is used to transform the problem into a minimization non-smooth problem. Secondly, the problem is transformed into minimization smoothing problems by the idea of smooth approximation. [Findings] The data examples show that the algorithm is effective. [Conclusions] A class of dual smooth approximation algorithm for solving the weighted minimum enclosing ball problem is obtained. **Keywords:** weighted minimum enclosing ball; maxmin problems; non-smooth optimization; smooth approximation; limited-memory L-BFGS method

(责任编辑 黄 颖)