运筹学与控制论　　DOI:10.11721/cqnuj20220514

带指数学习效应和凸资源分配的单机排序问题研究*

杨舒涵, 王吉波
(沈阳航空航天大学 理学院, 辽宁 沈阳 110136)

摘要:【目的】研究在全部工件加工时间可变的情况下具有指数学习效应和凸资源分配的单机排序问题,其中工件的实际加工时间具有指数学习效应,并依赖于分配它的不可再生资源数量。目标是确定资源的最优分配和工件最优排序,使得最大完工时间和资源消耗费用的 3 种组合最优,即最大完工时间和资源消耗费用的加权和最小、资源消耗费用限制下的极小化最大完工时间和最大完工时间限制下的极小化资源消耗费用问题。【方法】对给定排序,用约束优化和无约束优化问题的最优性条件能够求得其最优资源分配。【结果】分析最优解满足的性质,证明最优解能够通过多项式时间得到,并给出了具体求解算法。【结论】算法分析表明求解算法的时间复杂度为 $O(n\log n)$,其中 n 为工件个数。

关键词:学习效应;排序;单机;凸资源分配
中图分类号:O223　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2022)05-0024-05

在实际的工业生产过程中,工件的实际加工时间受多种因素影响,由于资源量的约束,有关于资源分配的排序问题,受到了学者们的广泛关注[1-2]。资源分配模型一般分为线性模型和凸资源分配模型,其中具有凸资源分配的排序问题在近些年来有了一些相关研究[3-5]。Liu 等人[6]研究了工期分配排序问题,其中工件的加工时间依赖学习效应和凸资源分配。Mosheiov 等人[7]研究了工件具有凸资源消耗函数的耦合工件排序问题,其中消耗的资源量有限,他们证明了最大完工时间极小化问题是多项式时间可解的。Lu 等人[8]研究了具有工件依赖学习效应和凸资源分配的工期指派排序问题,他们用反例指出了 Liu 等人[6]研究的一个结论是错误的,并给出了正确结论。另一方面,随着工人、机器等重复工作的进行,工件的实际加工时间不断缩短,这一变化过程被称为学习效应[9]。Wang 等人[10]讨论了学习因子为常量的情况下资源分配排序问题,对最大完工时间、总完工时间等的极小化问题分别给出了最优求解算法。Geng 等人[11]研究了工件加工时间具有凸资源分配和学习效应的流水车间排序问题,对加工时间是凸资源函数的情况,给出了工件所消耗的最优资源分配和工件的最优排序,并证明了相关问题是多项式时间可解的。

余英等人[12]和杨盛武等人[13]研究了工件加工时间具有指数学习效应的凸资源分配问题。在正常加工时间相等的情况下,他们证明了一些相关问题是多项式时间可解的。本文在余英等人[12]和杨盛武等人[13]研究的基础上,研究与最大完工时间有关的问题,对一般的正常加工时间情况,给出相应的最优排序及最优资源分配求解算法,并证明了算法的时间复杂性是多项式时间的。

1 问题描述

考虑带有凸资源和学习效应的单机排序问题如下:假设用一台机器加工一个工件集中的 n 个工件 $J=\{J_1, J_2,\cdots,J_n\}$,这台机器同一时刻只能加工一个工件且工件在被加工过程中不可中断。设所有工件均无准备时间,即它开始加工 $t=0$。同余英等人[12]一样,本文考虑工件 J_j 的实际加工时间为如下形式的模型:

$$P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^k,$$

其中 r 为工件 J_j 的所排位置,u_j 为工件消耗的资源量,a_j 表示工件 J_j 的正常加工时间,α 为机器的学习因子

* **收稿日期:**2021-12-21　　**修回日期:**2022-03-30　　**网络出版时间:**2022-09-19 19:55
资助项目:国家自然科学基金(No. 71471120);辽宁省“兴辽英才计划”项目(No. XLYC2002017)
第一作者简介:杨舒涵,女,研究方向为运筹学与组合优化,E-mail:381117455@qq.com;**通信作者:**王吉波,男,教授,博士生导师,研究方向为运筹学与组合优化,E-mail:wangjibo75@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220916.1701.006.html

$(0<\alpha\leqslant 1)$，k 是给定常数$(k>0)$。令 $\pi=[J_1,J_2,\cdots,J_n]$为给出的工件序，C_j 为工件 J_j 的完工时间。本文考虑在正常加工时间不相等的一般情况下，带有凸资源和指数学习效应的单机排序问题，目标是确定工件的最优排序和最优资源分配，求解如下 3 个问题：

问题Ⅰ $\beta C_{\max}+\delta\sum_{j=1}^{n}v_ju_j$ 极小化问题；

问题Ⅱ 当 $\sum_{j=1}^{n}v_ju_j\leqslant\overline{V}$ 时，最大完工时间 $C_{\max}$ 极小化问题；

问题Ⅲ 当 $C_{\max}\leqslant\overline{C}$ 时，资源消耗费用 $\sum_{j=1}^{n}v_ju_j$ 极小化问题。

其中 $\beta>0$，$\delta>0$ 分别为正的给定参数，v_j 为 u_j 的单位资源消耗费用，$\overline{V}$，$\overline{C}$ 分别为最大资源消耗总费用和最大完工时间的上界。显然，$C_{\max}=\sum_{j=1}^{n}P_{[j]}^{A}$，其中 $p_{[j]}^{A}$表示排在第 j 个位置工件的实际加工时间。

利用三参数法，本文研究的 3 个问题可以分别表示为：

$$1\left|P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^{k}\right|\beta C_{\max}+\delta\sum_{j=1}^{n}v_ju_j,$$

$$1\left|P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^{k},\ \sum_{j=1}^{n}v_ju_j\leqslant\overline{V}\right|C_{\max},$$

$$1\left|P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^{k},\ C_{\max}\leqslant\overline{C}\right|\sum_{j=1}^{n}v_ju_j。$$

2 主要结论

2.1 极小化问题 $1\left|P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^{k}\right|\beta C_{\max}+\delta\sum_{j=1}^{n}v_ju_j$

引理 1 对于问题 $1\left|P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^{k}\right|\beta C_{\max}+\delta\sum_{j=1}^{n}v_ju_j$，在排序 $\pi=[J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]}]$给定的情况下，该排序的最优资源分配 $u_{[j]}^{*}$为：

$$u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k\beta}{\delta v_{[j]}}\right)^{1/(k+1)}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)},j=1,2,\cdots,n。\tag{1}$$

证明 问题的目标函数可表示为：

$$f(\pi,u)=\beta\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}}{u_{[j]}}\right)^{K}+\delta\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}。\tag{2}$$

显然，(2)式是资源 $u_{[j]}$ 的凸函数，计算 $\frac{\partial f(\pi,u)}{\partial u_{[j]}}=\delta v_{[j]}-k\beta(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k}(u_{[j]})^{-k-1}=0$，解得 $u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k\beta}{\delta v_{[j]}}\right)^{1/(k+1)}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)}$，将(1)式代入(2)式得：

$$f(\pi,u)=(k^{1/(k+1)}+k^{-k/(k+1)})\beta^{1/(k+1)}\delta^{k/(k+1)}\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}v_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)}。\tag{3}$$

证毕

2.2 资源消耗总费用有限下的最大完工时间极小化问题

引理 2 对给定工件序 $\pi=[J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]}]$，问题 $1\left|P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\frac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^{k},\ \sum_{j=1}^{n}v_ju_j\leqslant\overline{V}\right|C_{\max}$ 的最优资源分配 $u_{[j]}^{*}$为：

$$u_{[j]}^{*}=\frac{\overline{V}\left(\frac{1}{v_{[j]}}\right)^{1/(k+1)}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)}}{\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}},j=1,2,\cdots,n。\tag{4}$$

证明 此问题可以转变为条件极值问题，其中约束条件满足 $\sum_{j=1}^{n}v_ju_j-\overline{V}=0$。用 Lagrange 乘子法，推出

对应的 Lagrange 函数为：

$$L(u_{[1]},u_{[2]},\cdots,u_{[n]},\lambda)=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}}{u_{[j]}}\right)^{k}+\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}-\overline{V}\right),$$

其中 $\lambda(\lambda\geqslant0)$,对 $u_{[j]}$,λ 分别求偏导,并使相应的偏导数等于0,可得：

$$\frac{\partial L}{\partial u_{[j]}}=\lambda v_{[j]}-k\frac{(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k}}{(u_{[j]})^{k+1}}=0,j=1,2,\cdots,n,\tag{5}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\lambda}=\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}-\overline{V}=0,j=1,2,\cdots,n。\tag{6}$$

由于(5)式所对应的连续函数只有唯一驻点,因此可求得最值：

$$u_{[j]}^{*}=\left(\frac{k}{\lambda v_{[j]}}\right)^{1/(k+1)}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)},j=1.2\cdots,n,\tag{7}$$

由(6)式和(7)式整理得：

$$\lambda^{1/k+1}=\frac{\sum_{j=1}^{n}k^{1/(k+1)}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}}{\overline{V}},j=1,2,\cdots,n。\tag{8}$$

将(8)代入(7)可得最优解：$u_{[j]}^{*}=\dfrac{\overline{V}\left(\dfrac{1}{v_{[j]}}\right)^{1/(k+1)}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)}}{\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}}$,定理得证。

将(4)式代入 $C_{\max}=\sum_{j=1}^{n}\left(\dfrac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}}{u_{[j]}}\right)^{k}$ 中,得到：

$$C_{\max}=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}\sum_{j=1}^{n}k^{1/k+1}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/k+1}}{\overline{V}\left(\dfrac{k}{v_{[j]}}\right)^{1/k+1}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/k+1}}\right)=\overline{V}^{-k}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}\right)^{k+1}。\tag{9}$$

证毕

2.3 最大完工时间有限下的资源总耗费费用极小问题

引理3　对给定工件序 $\pi=[J_{[1]},J_{[2]},\cdots,J_{[n]}]$,问题1 $\left|P_{jr}^{A}(u_j)=\left(\dfrac{a_j\alpha^{\sum_{i=1}^{r-1}a_{[i]}}}{u_j}\right)^{k},C_{\max}\leqslant\overline{C}\right|\sum_{j=1}^{n}v_ju_j$ 的最优资源分配 $u_{[j]}^{*}$ 为：

$$u_{[j]}^{*}=\overline{C}^{-1/k}\frac{(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)}}{(v_{[j]})^{1/(k+1)}}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/k+1}\right)^{1/k},j=1,2,\cdots,n。\tag{10}$$

证明　同引理2的证明方法类似。推出对应的 Lagrange 函数为：

$$L(u_{[1]},u_{[2]},\cdots,u_{[n]},\lambda)=\sum_{j=1}^{n}v_{[j]}u_{[j]}+\lambda\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}}{u_{[j]}}\right)-\overline{C}\right),$$

其中 $\lambda(\lambda\geqslant0)$,对 $u_{[j]}$,λ 求导,并分别令 $\dfrac{\partial L}{\partial u_{[j]}}=0,j=1,2\cdots,n,\dfrac{\partial L}{\partial\lambda}=0$,计算得：

$$u_{[j]}^{*}=\overline{C}^{-1/k}\frac{(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/(k+1)}}{(v_{[j]})^{1/(k+1)}}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/k+1}\right)^{1/k}。$$

将(10)式代入目标函数中,得到：

$$\sum_{j=1}^{n}v_ju_j=\sum_{j=1}^{n}\left(v_{[j]}\overline{C}^{-1/k}\frac{(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/k+1}}{(v_{[j]})^{1/(k+1)}}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}\right)^{1/k}\right)=$$

$$\overline{C}^{-1/k}\times\sum_{j=1}^{n}\left((a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}\left(\sum_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}\right)^{1/k}\right)=$$

$$\overline{C}^{-1/k}\left(\sum\nolimits_{j=1}^{n}(a_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}}v_{[j]})^{k/(k+1)}\right)^{1/k+1}。\tag{11}$$

求解(3)式，(9)式和(11)式的最小值，显然，它们都等价于求解 $Z=\sum\nolimits_{j=1}^{n}(a_{[j]}v_{[j]}\alpha^{\sum_{i=1}^{j-1}a_{[i]}})^{k/k+1}$ 的最小值。

证毕

引理 4　对于问题Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，将工件按照 $\eta_j=\dfrac{(a_jv_j)^{k/k+1}}{1-(\alpha^{a_j})^{k/k+1}}$ 的非减顺序排序，即可得到上述问题的最优排序。

证明　基于相邻交换法，在该排序中至少有两个相邻的工件，标记为工件 J_j 和工件 J_h，交换这两个相邻工件的位置，其余工件位置不变。假设最优排序为 $\pi=[s_1,J_j,J_h,s_2]$，交换位置后的工序为 $\pi'=[s_1,J_h,J_j,s_2]$，其中 s_1 代表工件前部分工序，s_2 代表后部分工序。用 B_1，B_2 分别表示 Z 在 s_1，s_2 中的目标函数部分，A 表示 s_1 部分中工件的正常加工时间和。计算可得：$Z(\pi)=B_1+(a_jv_j\alpha^A)^{k/k+1}+(a_hv_h\alpha^{A+a_j})^{k/k+1}+B_2$，$Z(\pi')=B_1+(a_hv_h\alpha^A)^{k/k+1}+(a_jv_j\alpha^{A+a_h})^{k/k+1}+B_2$，二者做差可得：

$$Z(\pi)-Z(\pi')=(a_jv_j\alpha^A)^{k/k+1}+(a_hv_h\alpha^{A+a_j})^{k/k+1}-(a_hv_h\alpha^A)^{k/k+1}-(a_jv_j\alpha^{A+a_h})^{k/k+1}=$$

$$(a_jv_j\alpha^A)^{k/k+1}(1-(\alpha^{a_h})^{k/k+1})-(a_hv_h\alpha^A)^{k/k+1}(1-(\alpha^{a_j})^{k/k+1})=$$

$$(\alpha^A)^{k/k+1}\underset{①}{(1-(\alpha^{a_j})^{k/k+1})}\underset{②}{(1-(\alpha^{a_h})^{k/k+1})}\underset{③}{\left(\frac{(a_jv_j)^{k/k+1}}{1-(\alpha^{a_j})^{k/k+1}}-\frac{(a_hv_h)^{k/k+1}}{1-(\alpha^{a_h})^{k/k+1}}\right)}\leqslant 0。$$

这里由于 $0<\alpha\leqslant 1$，因此 $(\alpha^A)^{k/k+1}>0$，以上①和②式是均大于 0，只需考虑③，由于 $Z(\pi)\leqslant Z(\pi')$，令 $\eta_j=\dfrac{(a_jv_j)^{k/k+1}}{1-(\alpha^{a_j})^{k/k+1}}$，即可将工件按照 η_j 的非减顺序排列，可以得到该问题的最优排序 π。　证毕

由以上引理，可以给出问题Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ的最优求解算法如下：

算法 1

步骤 1：根据引理 4，将工件按照 $\eta_j=\dfrac{(a_jv_j)^{k/k+1}}{1-(\alpha^{a_j})^{k/k+1}}$ 非减顺序排列，求得问题Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ最优排序。

步骤 2：根据引理 1 的(1)式，计算问题Ⅰ的最优资源配分配 $u_{[j]}^*$；根据引理 2 的(4)式，计算问题Ⅱ的最优资源配比 $u_{[j]}^*$；根据引理 3 的(10)式，计算问题Ⅲ的最优资源配比 $u_{[j]}^*$。

定理 1　算法 1 可以解决问题Ⅰ，Ⅱ和Ⅲ，且算法 1 的时间复杂性为 $O(n\log n)$。

证明　由引理 1，2，3 和 4 及以上叙述可以保证算法 1 的正确性。步骤 1 的时间复杂性是 $O(n\log n)$，步骤 2 的时间复杂度是线性的，因此，算法 1 的总时间复杂度为 $O(n\log n)$。

3 结束语

本文研究了加工时间可变的带指数学习效应的单机凸资源分配排序问题，目的是在以往研究具有相等正常加工时间的基础上，解决了正常加工时间不相等的一般情况。目标是确定工件的最优资源分配和工件的最优排序序列，求解如下 3 个问题：最大完工时间和资源总耗费费用之加权和极小问题、资源消耗总量有限下的最大完工时间极小化问题和最大完工时间有限下的资源消耗总费用极小问题。证明了这 3 个问题都是多项式时间可解的，并给出了具体求解算法。在今后的研究中，可以考虑工件的加工时间存在其他因素影响或者在此基础上对多机排序问题进行探讨。

参考文献：

[1] SHABTAY D，ZOFI M. Single machine scheduling with controllable processing times and an unavailability period to minimize the makespan[J]. International Journal of Production Economics，2018，198：191-200.

[2] KARHI S，SHABTAY D. Single machine scheduling to minimise resource consumption cost with a bound on scheduling plus due date assignment penalties[J]. International Journal of Production Research，2018，56(9)：3080-3096.

[3] 郭苗苗，闫萍，汪佳，等. 具有恶化效应和凸资源分配关系的单机排序问题[J]. 运筹与管理，2017，26(6)：102-106.

GUO M M，YAN P，WANG J，et al. Single machine scheduling with deterioration effect and convex resource allocation[J].

Operations Research and Management Science, 2017, 26(6): 102-106.

[4] SUN X Y, GENG X N, WANG J B, LIU F. Convex resource allocation scheduling in the no-wait flowshop with common flow allowance and learning effect[J]. International Journal of Production Research, 2019, 57(6): 1873-1891.

[5] 国峰，王吉波. 带有拒绝工件和学习效应的资源约束排序问题研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2021，38(1)：114-120.
GUO F, WANG J B. Research on resource constraint scheduling with job rejection and learning effect[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2021, 38(1): 114-120.

[6] LIU W W, JIANG C. Due-date assignment scheduling involving job-dependent learning effects and convex resource allocation [J]. Engineering Optimization, 2020, 52(1): 74-89.

[7] MOSHEIOV G, ORON D and SALEHIPOUR A. Coupled task scheduling with convex resource consumption functions[J]. Discrete Applied Mathematics, 2021, 293: 128-133.

[8] LU Y Y, WANG T T, WANG R Q, LI Y. A note on due-date assignment scheduling with job-dependent learning effects and convex resource allocation[J]. Engineering Optimization, 2021, 53(7): 1273-1281.

[9] AZZOUZ A, ENNIGROU M, SAID L B. Scheduling problems under learning effects: Classification and cartography[J]. International Journal of Production Research, 2018, 56: 1642-1661.

[10] WANG J B, WANG M Z, JI P. Scheduling jobs with processing times dependent on position, starting time, and allotted resource [J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2012, 29(5): 1250030.

[11] GENG X N, WANG J B, HSU C J. Flow shop scheduling problem with convex resource allocation and learning effect[J]. Journal of Computer and Communications, 2018, 6(1): 239-246.

[12] 余英，曾春花. 带凸资源依赖的一类单机排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2016，33(2)：9-14.
YU Y, ZENG C H. Single machine scheduling problems with learning effect and resource-dependence[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2016, 33(2): 9-14.

[13] 杨盛武，刘桓，耿新娜，等. 具有凸资源约束的单机指数学习效应问题[J]. 数学的实践与认识，2020，50(10)：15-20.
YANG S W, LIU H, GENG X N, et al. Single machine exponential learning effect problems with convex resource constraint [J]. Mathematics In Practice and Theory, 2020, 50(10): 15-20

Operations Research and Cybernetics

Study on Single Machine Scheduling Problems with Exponential Learning Effects and Convex Resource Allocation

YANG Shuhan, WANG Jibo

(School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract: [**Purposes**]The single machine convex resource allocation scheduling problems with exponential learning effects is studied under the case of variable processing time of all the jobs, where the actual processing time of a job has exponential learning effects and depends on the amount of a non-renewable resource allocated to all the jobs. Our goal is to determine the optimal resource allocation and optimal schedule such that the three combinational models of makespan (maximum completion time) and total resource consumption are optimal, that is, to minimize the weighted sum of makespan and total resource consumption cost; to minimize the makespan subject to the total resource consumption cost is limited; to minimize the total resource consumption cost subject to the makespan is limited. [**Methods**] Under a given schedule, the optimal resource allocation can be obtained by using optimal conditions for constrained and unconstrained optimization problems. [**Findings**] The optimal properties of the three combinational models can be obtained, it is proved that the optimal solution can be obtained in polynomial time, and the solution algorithm is given. [**Conclusions**]The algorithm is analyzed, and it is proved that the time complexity is $O(n\log n)$, where n is the number of jobs.

Keywords: learning effect; scheduling; single machine; convex resource allocation

(责任编辑　陈　乔)