DOI:10.11721/cqnuj20220508

乘积度量空间上 Banach-Kannan 型不动点定理的一个改进*

朴勇杰

(延边大学 理学院,吉林 延吉 133002)

摘要:【目的】在乘积度量空间讨论 Banach-Kannan 型不动点定理的推广问题。【方法】在$[1,+\infty)^3$ 上定义一个实连续函数 φ^* 并在乘积度量空间上给出满足由函数 φ^* 控制的压缩条件的映射的唯一不动点的存在性定理。【结果】得到了 Banach-Kannan 型不动点定理的新的推广。【结论】所得结果在乘积度量空间上较好地推广和改进了 Banach-Kannan 型不动点定理及相关结果。

关键词:乘积度量空间;连续函数 φ^*;压缩;不动点

中图分类号:O177.3;O189.11 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2022)05-0078-05

2008 年,Bashirov 等人[1]首次引入了乘积度量空间的概念并研究了一些基本性质,乘积度量空间是通常实数度量空间的一个变形。后来,文献[2-8]在该空间上讨论并得到了很多不动点和公共不动点存在性定理。文献[4]在乘积度量空间上引进了乘积压缩映射的概念。

设(X,d)是乘积度量空间。称映射 $f:X\to X$ 为乘积压缩映射[4]是指存在常数 $\lambda\in[0,1)$使得对任何 $x,y\in X$,有:

$$d(fx,fx)\leqslant[d(x,y)]^{\lambda}。\tag{1}$$

文献[4]指出完备的乘积度量空间(X,d)上的任何乘积压缩映射必有唯一不动点。

显然,上述关于不动点存在性结果是完备实度量空间上满足压缩条件 $d(fx,fx)\leqslant\lambda d(x,y)$,$\lambda\in[0,1)$的自映射具有唯一不动点[9]的定理在乘积度量空间上的表现形式。

与(1)式类似,在乘积度量空间上,称具有如下条件:

$$d(fx,fx)\leqslant[d(x,fx)d(y,fy)]^{\lambda},\lambda\in\left[0,\frac{1}{2}\right)\tag{2}$$

的映射 f 为 Kannan 型压缩映射。若实度量空间上满足 $d(fx,fx)\leqslant\lambda[d(x,fx)+d(y,fy)]$,$\lambda\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,则称 f 是 Kannan 映射。完备实度量空间上的任何 Kannan 映射必有唯一不动点[10]。

显然,以下条件是(1),(2)式的推广形式:

$$d(fx,fx)\leqslant[d(x,y)]^{\alpha}[d(x,fx)]^{\beta}[d(y,fy)]^{\lambda},\tag{3}$$

其中:$\alpha,\beta,\lambda\in[0,1)$,且 $\alpha+\beta+\lambda<1$。称满足(3)式的映射为 Banach-Kannan 型压缩映射。

文献[11]通过在$[1,+\infty)^3$ 上引进一个函数类 Σ,在乘积度量空间上给出了满足 σ-隐式压缩条件的映射的唯一不动点存在性定理。

文献[11]中定义 $\sigma\in\Sigma$ 当且仅当$\sigma:[1,+\infty)^3\to[0,+\infty)$满足如下条件:

1) σ 关于每个变量是连续的;

2) 存在 $k\in[0,1)$使得当 $x,y\in[1,+\infty)$且满足 $x\leqslant\sigma(y,y,x)$或 $x\leqslant\sigma(y,x,y)$或 $x\leqslant\sigma(x,y,y)$时有 $x\leqslant y^k$ 成立。

定理 1[11] 设(X,d)是完备的乘积度量空间且 $f:X\to X$ 为自映射。如果存在$\sigma\in\Sigma$ 使得对任何 $x,y\in X$,有

$$d(fx,fx)\leqslant\sigma(d(x,y),d(x,fx),d(y,fy))\tag{4}$$

* **收稿日期:**2021-04-21 **修回日期:**2021-12-09 **网络出版时间:**2022-09-19 12:52

资助项目:国家自然科学基金(No. 11761072;No. 12261091)

第一作者简介:朴勇杰,男,教授,博士,研究方向为非线性分析及不动点理论,E-mail:sxpyj@ybu.edu.cn

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220916.1816.021.html

成立，则 f 在 X 中存在唯一不动点。

定理 1 的一个极为特殊结果是如下 Banach-Kannan 型不动点定理。

定理 2[11]　设 (X,d) 是完备的乘积度量空间且 $f:X\to X$ 为自映射。如果对任何 $x,y\in X$，(3)式成立。则 f 在 X 中存在唯一不动点。

一般情况下，当 $\alpha+\beta+\lambda=1$ 时即使(3)式成立也不能保证 f 的不动点的存在性。因此，本文将给出 $\alpha+\beta+\lambda\leqslant 1$ 的条件下定理 2 仍然成立的附加条件，从而得到 Banach-Kannan 型不动点定理的推广和改进形式。

现给出本文所需的基本概念和性质。

定义 1[1]　设 X 是非空集合。称映射 $d:X\times X\to[0,+\infty)$ 是 X 上的乘积度量是指 d 满足以下条件：

1）对任何 $x,y\in X$，$d(x,y)\geqslant 1$ 且 $d(x,y)=1\Leftrightarrow x=y$；

2）对任何 $x,y\in X$，$d(x,y)=d(y,x)$；

3）对任何 $x,y,z\in X$，$d(x,z)\leqslant d(x,y)d(y,z)$（乘积三角不等式）。

当 X 和 d 满足上述条件时，称 (X,d) 为乘积度量空间。

关于乘积度量空间的例子可参看文献[4,6-7]。

例 1[6]　设 X 是实数集合 $\mathbf{R}$ 并定义 $d(x,y)=e^{|x-y|}$，$\forall x,y\in X$，则 (X,d) 是乘积度量空间。

定义 2[1]　设 (X,d) 是乘积度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中序列且 $x\in X$。若对任何 $\varepsilon>1$，存在自然数 N，使得自然数 $n>N$ 时，有 $x_n\in B_\varepsilon(x)=\{y\in X\mid d(x,y)<\varepsilon\}$（称为乘积开球），则称序列 $\{x_n\}$ 乘积收敛于 x，并记为 $x_n\to x(n\to+\infty)$。

引理 1[4]　设 (X,d) 是乘积度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中序列且 $x\in X$，则：

$$x_n\to x(n\to+\infty)\Leftrightarrow d(x_n,x)\to 1(n\to+\infty)。$$

定义 3[4]　设 (X,d) 是乘积度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中序列。若对任何 $\varepsilon>1$，存在自然数 N 使得两个自然数 $m,n>N$ 时成立 $d(x_m,x_n)<\varepsilon$，则称序列 $\{x_n\}$ 为乘积柯西序列。

引理 2[4]　设 (X,d) 是乘积度量空间，$\{x_n\}$ 是 X 中序列，则 $\{x_n\}$ 是乘积柯西序列当且仅当 $d(x_m,x_n)\to 1(m,n\to+\infty)$。

定义 4[4]　如果乘积度量空间 (X,d) 中的每个乘积柯西序列都是乘积收敛的，则称 (X,d) 是完备的。

引理 3[4]　设 (X,d) 是乘积度量空间，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 是 X 中的两个序列且 $x,y\in X$，则：

$$x_n\to x,y_n\to(n\to+\infty)\Rightarrow d(x_n,y_n)\to d(x,y)(n\to+\infty)。$$

定义 5　定义一个函数 $\varphi^*:[1,+\infty)^3\to[1,+\infty)$ 是连续函数且满足 $\varphi^*(x,y,z)=1\Leftrightarrow x=y=z=1$。

例 2　$\varphi_1^*(x,y,z)=x^py^qz^r$，$p,q,r>0$ 和 $\varphi_2^*(x,y,z)=\max\{x,y,z\}^k$，$k>0$ 及 $\varphi_3^*(x,y,z)=\dfrac{x^p+y^q+z^r}{3}$，$p,q,r>0$ 都是满足定义 5 的例子。

定理 3　设 (X,d) 是完备的乘积度量空间且 $f:X\to X$ 为自映射。如果对任何 $x,y\in X$，有：

$$d(fx,fy)\leqslant\frac{[d(x,y)]^\alpha[d(x,fx)]^\beta[d(y,fy)]^\lambda}{\varphi^*(d(x,y),d(x,fx),d(y,fy))},\tag{5}$$

其中：α,β,λ 是 3 个非负实数使得 $\alpha+\beta+\lambda\leqslant 1$，则 f 在 X 中存在唯一不动点。

证明　任取 $x_0\in X$，并根据 $x_{n+1}=fx_n$，$n=0,1,2,\cdots$ 构造 X 中的一个序列 $\{x_n\}$。

如果 $\lambda=1$，则 $\alpha=\beta=0$，因此(5)式变成：

$$d(fx,fy)\leqslant\frac{[d(y,fy)]}{\varphi^*(d(x,y),d(x,fx),d(y,fy))}。\tag{6}$$

对任何 $n=0,1,2,\cdots$，根据(6)式得：

$$d(fx_n,fx_{n+1})\leqslant\frac{d(x_{n+1},fx_{n+1})}{\varphi^*(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,fx_n),d(x_{n+1},fx_{n+1}))},$$

整理上式并根据 φ^* 的性质得到：

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant\frac{d(x_{n+1},x_{n+2})}{\varphi^*(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n+1},x_{n+2}))}\leqslant d(x_{n+1},x_{n+2}),$$

因此必有 $\varphi^*(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n+1},x_{n+2}))=1$。

于是再次根据 φ^* 的性质得到 $d(x_n,x_{n+1})=1,\forall n=0,1,2,\cdots$。这说明$\{x_n\}$是一个常序列,因此$\{x_n\}$必收敛于某一 $x^*\in X$,而且 x^* 是 f 的不动点。

如果 y^* 也是 f 的不动点,则由(6)式得到:

$$d(x^*,y^*)=d(fx^*,fy^*)\leqslant\frac{d(y^*,fy^*)}{\varphi^*(d(x^*,y^*),d(x^*,fx^*),d(y^*,fy^*))}=\frac{1}{\varphi^*(d(x^*,y^*),1,1)}\leqslant 1,$$

因此 $d(x^*,y^*)=1$,即有 $x^*=y^*$,这说明 x^* 是 f 的唯一不动点。

现假设 $\lambda<1$,则 $1-\lambda>0$,因此由条件可知$\frac{\alpha+\beta}{1-\lambda}\in[0,1]$。

对任何 $n=0,1,2,\cdots$,根据(5)式得到:

$$d(fx_n,fx_{n+1})\leqslant\frac{[d(x_n,x_{n+1})]^\alpha[d(x_n,fx_n)]^\beta[d(x_{n+1},fx_{n+1})]^\lambda}{\varphi^*(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,fx_n),d(x_{n+1},fx_{n+1}))},$$

整理上式得到:

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant\frac{[d(x_n,x_{n+1})]^\alpha[d(x_n,x_{n+1})]^\beta[d(x_{n+1},x_{n+2})]^\lambda}{\varphi^*(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n+1},x_{n+2}))}。\tag{7}$$

根据 φ^* 的定义,由(7)式得到:

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant[d(x_n,x_{n+1})]^\alpha[d(x_n,x_{n+1})]^\beta[d(x_{n+1},x_{n+2})]^\lambda=$$
$$[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha+\beta}[d(x_{n+1},x_{n+2})]^\lambda。$$

于是有:

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant[d(x_n,x_{n+1})]^{\frac{\alpha+\beta}{1-\lambda}}\leqslant d(x_n,x_{n+1})。\tag{8}$$

根据(8)式知数列$\{d(x_n,x_{n+1})\}$是单调递减的有下界1的实数列,因此存在常数 $u\geqslant 1$ 使得:

$$\lim_{n\to+\infty}d(x_n,x_{n+1})=u。\tag{9}$$

由(7)式及 φ^* 的性质得到对任何 $n=0,1,2,\cdots$,有:

$$d(x_{n+1},x_{n+2})\leqslant\frac{[d(x_n,x_{n+1})]^\alpha[d(x_n,x_{n+1})]^\beta[d(x_{n+1},x_{n+2})]^\lambda}{\varphi^*(d(x_n,x_{n+1}),d(x_n,x_{n+1}),d(x_{n+1},x_{n+2}))}\leqslant[d(x_n,x_{n+1})]^{\alpha+\beta}[d(x_{n+1},x_{n+2})]^\lambda,$$

对上式取 $n\to+\infty$,则根据 φ^* 的性质由(9)式得到 $u^{\alpha+\beta+\lambda}\leqslant u\leqslant\frac{u^{\alpha+\beta+\lambda}}{\varphi^*(u,u,u)}\leqslant u^{\alpha+\beta+\lambda}$,于是必有 $\varphi^*(u,u,u)=1$,再次根据 φ^* 的性质得到 $u=1$,即 $\lim\limits_{n\to+\infty}d(x_n,x_{n+1})=u=1$。

假设构造的序列$\{x_n\}$不是乘积柯西序列,则存在实数 $\varepsilon>1$,使得对任何自然数 k,存在两个自然数 $m(k)$,$n(k)$使得 $m(k)>n(k)>k$ 且满足 $d(x_{m(k)},x_{n(k)})>\varepsilon$。令 $m(k)$是满足上述条件的最小自然数,则下列结果:

$$d(x_{m(k)},x_{n(k)})>\varepsilon,d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})\leqslant\varepsilon。\tag{10}$$

成立。根据(10)式和定义1的3)得到:

$$\varepsilon<d(x_{m(k)},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)},x_{m(k)-1})d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)},x_{m(k)-1})\varepsilon。$$

对上式取 $k\to+\infty$,则根据 $u=1$ 得到:

$$\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)})=\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)-1},x_{n(k)})=\varepsilon。\tag{11}$$

又根据定义1的3)得到:

$$\frac{d(x_{m(k)},x_{n(k)})}{d(x_{m(k)},x_{m(k)+1})}\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})\leqslant d(x_{m(k)},x_{m(k)+1})d(x_{m(k)},x_{n(k)})\tag{12}$$

以及

$$\frac{d(x_{m(k)},x_{n(k)})}{d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})}\leqslant d(x_{m(k)},x_{n(k)+1})\leqslant d(x_{m(k)},x_{n(k)})d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})。\tag{13}$$

在(12),(13)式的两边取 $k\to+\infty$,则根据(11)式和 $u=1$ 得到:

$$\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})=\lim_{k\to+\infty}d(x_{m(k)},x_{n(k)+1})=\varepsilon。\tag{14}$$

类似地,根据 $u=1$ 和(14)式,由$\frac{d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})}{d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})}\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})\leqslant d(x_{m(k)+1},x_{n(k)})d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})$

得到:

$$\lim_{k\to+\infty} d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})=\varepsilon。\tag{15}$$

对任何自然数 k,根据(5)式得到:

$$d(fx_{m(k)},fx_{n(k)})\leqslant\frac{[d(x_{m(k)},x_{n(k)})]^{\alpha}[d(x_{m(k)},fx_{m(k)})]^{\beta}[d(x_{n(k)},fx_{n(k)})]^{\lambda}}{\varphi^{*}(d(x_{m(k)},x_{n(k)}),d(x_{m(k)},fx_{m(k)}),d(x_{n(k)},fx_{n(k)}))},$$

整理上式得到:

$$d(x_{m(k)+1},x_{n(k)+1})\leqslant\frac{[d(x_{m(k)},x_{n(k)})]^{\alpha}[d(x_{m(k)},x_{m(k)+1})]^{\beta}[d(x_{n(k)},x_{n(k)+1})]^{\lambda}}{\varphi^{*}(d(x_{m(k)},x_{n(k)}),d(x_{m(k)},x_{m(k)+1}),d(x_{n(k)},x_{n(k)+1}))},$$

对上式两边取 $k\to+\infty$,结合(11),(15)式及 $u=1$ 和 φ^{*} 的性质得到 $\varepsilon\leqslant\frac{\varepsilon^{\alpha}}{\varphi^{*}(\varepsilon,1,1)}\leqslant\frac{\varepsilon}{\varphi^{*}(\varepsilon,1,1)}\leqslant\varepsilon$。于是必有 $\varphi^{*}(\varepsilon,1,1)=1$,再次根据 φ^{*} 的性质得到 $\varepsilon=1$,这与假设 $\varepsilon>1$ 相矛盾。因此序列 $\{x_n\}$ 是乘积柯西序列。根据 (X,d) 的完备性,存在 $x^{*}\in X$ 使得 $d(x_n,x^{*})\to1(n\to+\infty)$。

对任何 $n=0,1,2,\cdots$,根据(5)式得到 $d(fx^{*},fx_n)\leqslant\frac{[d(x^{*},x_n)]^{\alpha}[d(x^{*},fx^{*})]^{\beta}[d(x_n,fx_n)]^{\lambda}}{\varphi^{*}(d(x^{*},x_n),d(x^{*},fx^{*}),d(x_n,fx_n))}$,整理此式并两边取 $n\to+\infty$,则根据引理 2、引理 3、$u=1$ 和 φ^{*} 的性质得到:

$$d(fx^{*},x^{*})\leqslant\frac{[d(x^{*},fx^{*})]^{\beta}}{\varphi^{*}(1,d(x^{*},fx^{*}),1)}\leqslant\frac{d(x^{*},fx^{*})}{\varphi^{*}(1,d(x^{*},fx^{*}),1)}\leqslant d(x^{*},fx^{*})。$$

于是必有 $\varphi^{*}(1,d(x^{*},fx^{*}),1)=1$,再次根据 φ^{*} 的性质得到 $d(x^{*},fx^{*})=1$,因此 $x^{*}=fx^{*}$。这说明 x^{*} 是 f 的一个不动点。

如果 y^{*} 也是 f 的不动点,则根据(5)式得到:

$$d(fx^{*},fy^{*})\leqslant\frac{[d(x^{*},y^{*})]^{\alpha}[d(x^{*},fx^{*})]^{\beta}[d(y^{*},fy^{*})]^{\lambda}}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),d(x^{*},fx^{*}),d(y^{*},fy^{*}))}。$$

整理并根据 φ^{*} 的性质得:

$$d(x^{*},y^{*})\leqslant\frac{[d(x^{*},y^{*})]^{\alpha}}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),1,1)}\leqslant\frac{d(x^{*},y^{*})}{\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),1,1)}\leqslant d(x^{*},y^{*}),$$

于是 $\varphi^{*}(d(x^{*},y^{*}),1,1)=1$,再次根据 φ^{*} 的性质得到 $d(x^{*},y^{*})=1$,因此 $x^{*}=y^{*}$ 是 f 的唯一不动点。

证毕

注 1　定理 3 中通过具有某种特性的连续函数 φ^{*} 限制映射的收缩条件,把定理 2 中的压缩条件 $\alpha+\beta+\lambda<1$ 放宽到 $\alpha+\beta+\lambda\leqslant1$,定理的结论仍然成立。因此定理 3 一定程度上推广和改进了定理 2(即 Banach-Kannan 型不动点定理)及相关结果。

参考文献:

[1] BASHIROV A E,KURPLNARA E M,OZYAPLCL A. Multiplicative calculus and its applications[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,337(1):36-48.

[2] FLORACK L,Van ASSEN H. Multiplicative calculus in biomedical image analysis[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision,2012,42(1):64-75.

[3] BASHIROV A, MISIRLI E, TANDOGDU Y, et al. On modeling with multiplicative differential equations[J]. Applied Mathematics:A Journal of Chinese Universities,2011,26(4):425-438.

[4] OZAVSAR M,CEVIKEL A C. Fixed point of multiplicative contraction mappings on multiplicative metric spaces[J]. Applied Mathematics,2012,3:35-39.

[5] HE X J,SONG M M,CHEN D P. Common fixed points for weak commutative mappings on a multiplicative metric space[J]. Fixed Point Theory and Applications,2014,2014:48.

[6] GU F,CHO Y J. Common fixed points results for four maps satisfying φ-contractive condition in multiplicative metric spaces[J]. Fixed Point Theory and Applications,2015,2015:165.

[7] 姜云,谷峰. 乘积度量空间中满足 φ-型压缩条件的四个映像的公共不动点定理[J]. 纯粹数学与应用数学,2017,33(2):185-196.
JIANG Y,GU F. Common fixed points theorems for four maps satisfying φ-type contractive condition in multiplicative metric

spaces[J]. Pure and Applied Mathematics, 2017, 33(2): 185-196.

[8] PIAO Y J. Unique common fixed points for four non-continuous mappings satisfying ψ-implicit contractive condition on non-complete multiplicative metric spaces[J]. Advances in Fixed Point Theory, 2019, 9(2): 135-145.

[9] BANACH S. Sur les opérations dans les ensembles abstraist et leur application aux équations intégrales[J]. Fundamenta Mathematicae, 1922, 3: 133-181.

[10] KANNAN R. Some results on fixed points[J]. Bulletin of the Calcutta Mathematical Society, 1968, 60: 71-76.

[11] 朴勇杰. 乘积度量空间上满足 $\sigma(\gamma)$-压缩条件的映射的唯一不动点[J]. 吉林大学学报(理学版), 2021, 59(3): 469-474.
PIAO Y J. Unique fixed points for mappings with $\sigma(\gamma)$-contractive conditions on multiplicative metric spaces[J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2021, 59(3): 469-474.

An Improvement of the Banach-Kannan Type Fixed Point Theorem on Multiplicative Metric Spaces

PIAO Yongjie

(College of Science, Yanbian University, Yanji Jilin 133002, China)

Abstract: [**Purposes**] It is discussed that the generalized problems of Banach-Kannan type fixed point theorem on a multiplicative metric space. [**Methods**] Introduce a real continuous function φ^* on $[1, +\infty)^3$ and give the existence theorem of unique fixed points for the mappings satisfying the contractive conditions controlled by the function φ^* on multiplicative metric spaces. [**Findings**] Obtain a new generalization of Banach-Kannan type fixed point theorem. [**Conclusions**] The obtained result well generalize and improve Banach-Kannan type fixed point theorems and the corresponding conclusions on multiplicative metric spaces.

Keywords: multiplicative metric space; continuous function φ^*; contraction; fixed point

(责任编辑　黄　颖)