

# 空间变系数反应扩散方程的一类交替分裂预处理迭代方法\*

蒋沁纱, 陈浩

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:**【目的】考虑了空间变系数反应扩散方程改进 Douglas 分裂时间离散格式的快速迭代实现算法。【方法】离散线性系统的系数矩阵具有单位矩阵与对角矩阵-对称正定矩阵-乘积的和的结构。利用交替分裂迭代技巧, 针对上述系统构造了一类分裂迭代方法及相应预处理子。【结果】理论分析表明该分裂迭代方法具有无条件收敛性, 还估计了迭代参数的最优取值。【结论】数值算例验证了所构造方法的有效性。

**关键词:**变系数反应扩散方程; 改进 Douglas 分裂方法; 交替分裂迭代方法; 预处理子

**中图分类号:** O241.82; O241.6

**文献标志码:** A

**文章编号:** 1672-6693(2022)05-0083-08

本文讨论了如下变系数反应扩散方程<sup>[1-3]</sup>的快速算法:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = d(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + e(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} + f(x, y, t, u) \\ (x, y, t) \in \Omega \times (t_0, t_f] \\ u(x, y, t_0) = u_0(x, y), (x, y) \in \Omega \end{cases}, \quad (1)$$

并配备适当边界条件, 其中:  $\Omega = [x_L, x_R] \times [y_L, y_R]$ ;  $x_L, x_R$  分别表示定义域中  $x$  方向的左、右端点;  $y_L, y_R$  分别表示定义域中  $y$  方向的左、右端点; 扩散系数函数  $d(x, y), e(x, y)$  均为正函数。这类反应扩散方程<sup>[1,4]</sup>广泛应用于药物释放、细胞演化过程、化学反应等众多领域。对反应扩散方程的研究, 为这些领域的发展提供了强有力的数学工具, 同时也推动了偏微分方程理论自身的科学发展。

上述反应扩散方程由线方法在空间方向经有限差法<sup>[1,5]</sup>、有限元法<sup>[2]</sup>以及谱方法<sup>[6]</sup>等离散后往往化归为大规模刚性常微分方程组。在对时间方向的离散上, 显式时间积分格式虽然易于实现, 但要保证数值解的稳定性, 则对时间步长有非常强的限制。出于稳定性的考虑, 人们往往集中于隐式时间离散方法, 如线性多步方法、对角隐式 Runge-Kutta 方法、隐显式方法、算子分裂方法, 等等<sup>[1]</sup>。然而, 应用半隐式方法时, 每个时间步需要求解大规模线性代数方程组, 求解这类代数系统的计算代价非常昂贵。对于常扩散系数的反应扩散方程, 这类线性方程组的求解已有一些快速算法, 如多重网格方法、预处理共轭梯度方法及快速 Poisson 解法等<sup>[7]</sup>, 但对于各向异性模型或变系数这类线性代数方程组问题, 则快速算法设计更为困难。

文献[8]构造了一类改进 Douglas 分裂时间离散格式, 具有二阶精度且具备良好稳定性能, 且相比隐式 Euler 离散所得的代数系统, 结构更容易构造快速算法。对于常系数反应扩散方程而言, 改进 Douglas 分裂方法易于快速实现。但对于变系数问题(1), 改进 Douglas 分裂格式每个时间步需要求解如下结构线性方程组:

$$(I + DT)v = b, \quad (2)$$

其中:  $I$  是单位矩阵,  $D$  是对角矩阵,  $T$  是具有 Kronecker 积结构的矩阵,  $v, b$  均为向量。针对上述线性方程组, 本文采用交替分裂迭代技术, 思想源自于求解偏微分方程的交替方向隐式迭代方法<sup>[9-10]</sup>。关于交替分裂迭代方法的研究目前已有许多方法, 如 Bai 等人<sup>[11]</sup>针对非对称正定系统构造了对称-反对称交替分裂迭代方法; Chen 等人<sup>[12-14]</sup>针对具有两个 Kronecker 积的和的结构的线性代数系统, 构造了一类基于 Kronecker 积的交替分裂迭代格式并构造了相应的 Kronecker 积型预处理子; Bai 等人<sup>[15]</sup>针对空间分数阶扩散方程离散所得的具有对角矩阵与 Toeplitz 矩阵和的结构线性方程组, 构造了一类对角-Toeplitz 分裂迭代格式; Lin 等人<sup>[16]</sup>针对空间分数阶扩

\* 收稿日期: 2021-11-03 修回日期: 2022-01-14 网络出版时间: 2022-07-01 10:04

资助项目: 国家自然科学基金(No. 11971085); 重庆市自然科学基金(No. cstc2021jcyj-msxmX0034)

第一作者简介: 蒋沁纱, 女, 研究方向为偏微分方程数值解法, E-mail: 574394655@qq.com; 通信作者: 陈浩, 男, 教授, E-mail: hch@cqnu.edu.cn

网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220630.1500.028.html>

散问题所得的具有单位阵与对角阵-Toeplitz 阵-乘积的的结构线性系统构造了一类对角-Toeplitz 乘积型的预处理子。本文所构造的预处理子结构与文献[17]类似,不同之处在于构造方法来源于交替分裂迭代思想<sup>[11-15]</sup>。

## 1 离散

### 1.1 空间离散

设  $N_1, N_2$  为正整数,令  $\Delta x = \frac{x_R - x_L}{N_1 + 1}, \Delta y = \frac{y_R - y_L}{N_2 + 1}$  是二维空间上网格的大小,  $x_i = x_L + i\Delta x, i = 0, 1, \dots, N_1 + 1; y_j = y_L + j\Delta y, j = 0, 1, \dots, N_2 + 1$ 。对(1)式中出现的两个二阶偏导数在空间上采用中心差分法进行离散,有:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j, t)}{\partial x^2} = \frac{u(x_{i-1}, y_j, t) - 2u(x_i, y_j, t) + u(x_{i+1}, y_j, t)}{\Delta x^2} + O(\Delta x^2),$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, y_j, t)}{\partial y^2} = \frac{u(x_i, y_{j-1}, t) - 2u(x_i, y_j, t) + u(x_i, y_{j+1}, t)}{\Delta y^2} + O(\Delta y^2)。$$

定义  $d_{i,j} := d(x_i, y_j), e_{i,j} := e(x_i, y_j), f_{i,j} := f(x_i, y_j, t, u_{i,j}(t))$ , 则空间半离散系统可表达为:

$$\frac{\partial u_{i,j}(t)}{\partial t} = d_{i,j} \frac{u_{i-1,j}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i+1,j}(t)}{\Delta x^2} + e_{i,j} \frac{u_{i,j-1}(t) - 2u_{i,j}(t) + u_{i,j+1}(t)}{\Delta y^2} + f_{i,j}, \quad (3)$$

其中:  $i = 1, 2, \dots, N_1, j = 1, 2, \dots, N_2, u_{i,j}(t)$  为  $u(x_i, y_j, t)$  的近似解。本文仅考虑齐次 Dirichlet 边界条件(其他类型边界条件类似处理), 则(3)式可转化为矩阵形式:

$$\frac{d\mathbf{w}(t)}{dt} = \mathbf{DA}_1 \mathbf{w}(t) + \mathbf{EA}_2 \mathbf{w}(t) + \mathbf{g}(t, \mathbf{w}), t \in (t_0, t_f], \quad (4)$$

其中:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}(t) &= [u_{1,1}(t), u_{2,1}(t), \dots, u_{N_1,1}(t), u_{1,2}(t), \dots, u_{N_1,2}(t), \dots, u_{1,N_2}(t), \dots, u_{N_1,N_2}(t)]^T, \\ \mathbf{g}(t, \mathbf{w}) &= [f_{1,1}(t, u_{1,1}(t)), \dots, f_{N_1,1}(t, u_{N_1,1}(t)), \dots, f_{1,N_2}(t, u_{1,N_2}(t)), \dots, f_{N_1,N_2}(t, u_{N_1,N_2}(t))]^T, \\ \mathbf{D} &= \text{diag}(d_{1,1}, d_{2,1}, \dots, d_{N_1,1}, d_{1,2}, \dots, d_{N_1,2}, \dots, d_{1,N_2}, \dots, d_{N_1,N_2}), \\ \mathbf{E} &= \text{diag}(e_{1,1}, e_{2,1}, \dots, e_{N_1,1}, e_{1,2}, \dots, e_{N_1,2}, \dots, e_{1,N_2}, \dots, e_{N_1,N_2}), \\ \mathbf{A}_1 &= \frac{1}{\Delta x^2} \mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{K}_1, \mathbf{A}_2 = \frac{1}{\Delta y^2} \mathbf{K}_2 \otimes \mathbf{I}_{N_1}, \mathbf{K}_j = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \cdots & \vdots \\ \vdots & 1 & -2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 & -2 \end{bmatrix}_{N_j \times N_j}, j = 1, 2. \end{aligned}$$

### 1.2 时间离散

设  $S$  是一个正整数,令  $\tau = \frac{t_f - t_0}{S}$ , 定义时间划分:  $t_j = t_0 + j\tau, j = 0, 1, \dots, S$ 。引用改进 Douglas 分裂方法<sup>[6]</sup>对半离散系统(4)在时间方向上进行离散, 可得如下格式:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{w}}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \tau(\mathbf{DA}_1 \mathbf{w}_n + \mathbf{EA}_2 \mathbf{w}_n + \mathbf{g}(t_n, \mathbf{w}_n)) \\ \mathbf{z}_0 = \tilde{\mathbf{w}}_{n+1} + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{g}(t_{n+1}, \tilde{\mathbf{w}}_{n+1}) - \mathbf{g}(t_n, \mathbf{w}_n)) \\ \mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \frac{1}{2}\tau\mathbf{D}(\mathbf{A}_1 \mathbf{z}_1 - \mathbf{A}_1 \mathbf{w}_n) \\ \mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 + \frac{1}{2}\tau\mathbf{E}(\mathbf{A}_2 \mathbf{z}_2 - \mathbf{A}_2 \mathbf{w}_n) \\ \mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{z}_2 \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\mathbf{w}_n$  为  $\mathbf{w}(t_n)$  的近似解, 由(5)式知, 每个时间步都需求解如下两个方程组:

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\tau\mathbf{DA}_1\right)\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 - \frac{1}{2}\tau\mathbf{DA}_1\mathbf{w}_n, \quad (6)$$

$$\left(\mathbf{I} - \frac{1}{2}\tau\mathbf{EA}_2\right)\mathbf{z}_2 = \mathbf{z}_1 - \frac{1}{2}\tau\mathbf{EA}_2\mathbf{w}_n, \quad (7)$$

其中:  $\mathbf{I}$  为  $N_1 N_2 \times N_1 N_2$  的单位矩阵。如果直接求解(6)、(7)式,计算量会非常大,因此本文主要工作是提出求解(6)、(7)式的快速预处理迭代方法。

## 2 交替分裂迭代算法

令  $\mathbf{T} = -\frac{1}{2}\tau\mathbf{A}_1 = -\frac{\tau}{2\Delta x^2}\mathbf{I}_{N_2} \otimes \mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \mathbf{DT}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{z}_0 + \mathbf{DT}\mathbf{w}_n$ 。其中:  $\mathbf{K}_1$  为三对角矩阵,  $\mathbf{D}$  为对角矩阵。则(6)式可记为:

$$\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{b}。 \quad (8)$$

### 2.1 交替分裂迭代算法

类似 Kronecker 积分裂方法<sup>[12-14]</sup>, 引入正参数  $\eta$ , 则  $\mathbf{Q}$  有如下两种分裂:

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{I} + \eta\mathbf{D}) - (\eta\mathbf{D} - \mathbf{DT}), \mathbf{Q} = (\mathbf{DT} + \eta\mathbf{D}) - (\eta\mathbf{D} - \mathbf{I})。$$

任意给出一个初始值  $\mathbf{v}^0$ , 构造如下交替分裂迭代方法:

$$\begin{cases} (\mathbf{I} + \eta\mathbf{D})\mathbf{v}^{k+\frac{1}{2}} = (\eta\mathbf{D} - \mathbf{DT})\mathbf{v}^k + \mathbf{b} \\ (\mathbf{DT} + \eta\mathbf{D})\mathbf{v}^{k+1} = (\eta\mathbf{D} - \mathbf{I})\mathbf{v}^{k+\frac{1}{2}} + \mathbf{b} \end{cases}, \quad (9)$$

这里  $k=0, 1, \dots$ 。消除中间向量  $\mathbf{v}^{k+\frac{1}{2}}$ , 可以得到不动点迭代格式:

$$\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{B}(\eta)\mathbf{v}^k + \mathbf{H}(\eta)\mathbf{b}。 \quad (10)$$

其中:  $\mathbf{B}(\eta) = (\mathbf{T} + \eta\mathbf{I})^{-1}(\eta\mathbf{D} - \mathbf{I})(\eta\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}(\eta\mathbf{I} - \mathbf{T})$ ,  $\mathbf{H}(\eta) = 2\eta(\mathbf{T} + \eta\mathbf{I})^{-1}(\eta\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1}$ 。这里的  $\mathbf{B}(\eta)$  是交替分裂迭代法(9)的迭代矩阵, 事实上, 迭代(9)式等价于迭代  $\mathbf{M}(\eta)\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{N}(\eta)\mathbf{v}^k + \mathbf{b}$ , 其中:  $\mathbf{Q} = \mathbf{M}(\eta) - \mathbf{N}(\eta)$ ,

$$\mathbf{M}(\eta) = \mathbf{H}^{-1}(\eta) = \frac{1}{2\eta}(\mathbf{T} + \eta\mathbf{I})(\eta\mathbf{D} + \mathbf{I}), \mathbf{N}(\eta) = \frac{1}{2\eta}(\eta\mathbf{D} - \mathbf{I})(\eta\mathbf{I} - \mathbf{T})。易知:$$

$$\mathbf{B}(\eta) = \mathbf{M}^{-1}(\eta)\mathbf{N}(\eta) = \mathbf{I} - \mathbf{M}^{-1}(\eta)\mathbf{Q}。$$

依据以上结论, 可将(10)式迭代变形为残差校正形式:  $\mathbf{v}^{k+1} = \mathbf{v}^k + \mathbf{M}^{-1}(\eta)\mathbf{r}^k$ ,  $\mathbf{r}^k = \mathbf{b} - \mathbf{Q}\mathbf{v}^k$ 。在进行实际计算时, 交替分裂迭代的每一时间步都需要计算如下形式的线性系统:

$$\mathbf{M}(\eta)\mathbf{z} = \mathbf{r}^k。 \quad (11)$$

由  $\mathbf{M}(\eta)$  的定义, (11)式可转化为以下形式:

$$\begin{cases} \frac{1}{2\eta} \left[ \mathbf{I}_{N_2} \otimes \left( \eta\mathbf{I}_{N_1} - \frac{\tau}{2\Delta x^2}\mathbf{K}_1 \right) \right] \bar{\mathbf{z}} = \mathbf{r} \\ (\eta\mathbf{D} + \mathbf{I})\mathbf{z} = \bar{\mathbf{z}} \end{cases}。 \quad (12)$$

现引入关于 Kronecker 积运算的基本性质。

**定理 1**<sup>[17]</sup> 设矩阵  $\mathbf{A} \in \mathbf{C}^{m \times n}$ ,  $\mathbf{X} \in \mathbf{C}^{q \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbf{C}^{p \times q}$ , 则  $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})\mathbf{x} = \text{vec}(\mathbf{B}\mathbf{X}\mathbf{A}^T)$ ,  $\text{vec}(\mathbf{X}) = \mathbf{x}$ 。其中:  $\text{vec}$  算子将矩阵通过列的叠加变换为向量, 如:

$$\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n] \in \mathbf{C}^{q \times n} \Leftrightarrow \text{vec}(\mathbf{X}) = [\mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \dots, \mathbf{x}_n^T]^T \in \mathbf{C}^{qn}。$$

由定理 1 知, (12)式中第 1 个方程组的解可表示为如下形式:

$$\bar{\mathbf{z}} = 2\eta \cdot \text{vec} \left( \left[ \eta\mathbf{I}_{N_1} - \frac{1}{2\Delta x^2}\tau\mathbf{K}_1 \right]^{-1} \mathbf{R} \right), \text{vec}(\mathbf{R}) = \mathbf{r}。$$

则有  $\mathbf{z} = 2\eta \cdot (\eta\mathbf{D} + \mathbf{I})^{-1} \cdot \text{vec} \left( \left[ \eta\mathbf{I}_{N_1} - \frac{1}{2\Delta x^2}\tau\mathbf{K}_1 \right]^{-1} \mathbf{R} \right)$ 。这里的  $\eta\mathbf{D} + \mathbf{I}$  为对角矩阵,  $\eta\mathbf{I}_{N_1} - \frac{1}{2\Delta x^2}\tau\mathbf{K}_1$  为三对角矩阵, 解上述方程组只需解出多个右端向量的三对角系统, 为线性复杂度, 需要进行  $O(N_1 N_2)$  次运算。

由于(6)、(7)式具有相似的形式, 因此, 可运用同样的方法对(7)式进行交替分裂迭代。

### 2.2 收敛性分析及最优参数的计算

下面将对(10)式的收敛性进行理论分析, (10)式收敛当且仅当  $\rho(\mathbf{B}(\eta)) < 1$ 。定理 2 将给出(10)式的收敛结果。

**定理 2**  $\forall \eta > 0$ , 迭代格式(10)是收敛的, 即有  $\rho(\mathbf{B}(\eta)) \leq \gamma(\eta) < 1$ , 其中:  $\gamma(\eta) = \max_{\mu \in \sigma(\mathbf{D}^{-1})} \left| \frac{\mu - \eta}{\mu + \eta} \right|$ 。

**证明** 令  $\tilde{\mathbf{B}}(\eta) = (\mathbf{T} + \eta\mathbf{I})\mathbf{B}(\eta)(\mathbf{T} + \eta\mathbf{I})^{-1}$ , 由  $\mathbf{D}, \mathbf{T}$  对称正定性, 则有:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{B}(\eta)) &= \rho(\tilde{\mathbf{B}}(\eta)) \leq \|\tilde{\mathbf{B}}(\eta)\|_2 = \|(\eta\mathbf{D} - \mathbf{I}_{N^2})(\eta\mathbf{D} + \mathbf{I}_{N^2})^{-1}(\eta\mathbf{I}_{N^2} - \mathbf{T})(\mathbf{T} + \eta\mathbf{I}_{N^2})^{-1}\|_2 \leq \\ &\|(\eta\mathbf{D} - \mathbf{I}_{N^2})(\eta\mathbf{D} + \mathbf{I}_{N^2})^{-1}\|_2 \|(\eta\mathbf{I}_{N^2} - \mathbf{T})(\mathbf{T} + \eta\mathbf{I}_{N^2})^{-1}\|_2 = \\ &\rho((\eta\mathbf{D} - \mathbf{I}_{N^2})(\eta\mathbf{D} + \mathbf{I}_{N^2})^{-1})\rho((\eta\mathbf{I}_{N^2} - \mathbf{T})(\mathbf{T} + \eta\mathbf{I}_{N^2})^{-1}) = \max_{d \in \sigma(\mathbf{D})} \left| \frac{1 - \eta d}{1 + \eta d} \right| \max_{\lambda \in \sigma(\mathbf{T})} \left| \frac{\eta - \lambda}{\eta + \lambda} \right|. \end{aligned}$$

又因为  $\eta > 0, \lambda > 0$ , 故  $\left| \frac{\eta - \lambda}{\eta + \lambda} \right| \leq 1$ , 则有:

$$\rho(\mathbf{B}(\eta)) \leq \max_{d \in \sigma(\mathbf{D})} \left| \frac{1 - \eta d}{1 + \eta d} \right| = \max_{\mu \in \sigma(\mathbf{D}^{-1})} \left| \frac{\mu - \eta}{\mu + \eta} \right| \triangleq \gamma(\eta) < 1.$$

可见  $\rho(\mathbf{B}(\eta)) \leq \gamma(\eta) < 1$ .

证毕

由于迭代矩阵的谱半径越小, 迭代的收敛速度越快。因此, 为了使迭代算法拥有更快的收敛速度, 需要选择合适的参数  $\eta$ , 使得迭代矩阵  $\mathbf{B}(\eta)$  的谱半径  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$  尽可能小。由于在实际处理过程中找到最小的谱半径  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$  比较困难, 因此, 本文考虑求取谱半径的上界  $\gamma(\eta)$  最小, 最佳参数  $\eta^*$  就是取谱半径的上界  $\gamma(\eta)$  最小的值。在定理 3 中将给出交替方向分裂迭代算法的最优迭代参数  $\eta^*$ 。

**定理 3** 令  $d_{\min} = \min_{d \in \sigma(\mathbf{D})} (d), d_{\max} = \max_{d \in \sigma(\mathbf{D})} (d)$ , 则  $\eta^* = \arg \min_{\eta > 0} \gamma(\eta) = \sqrt{\frac{1}{d_{\max} d_{\min}}}$  时为最优迭代参数。

**证明** 易知  $\gamma(\eta) = \max_{\mu \in \sigma(\mathbf{D}^{-1})} \left| \frac{\mu - \eta}{\mu + \eta} \right| = \max \left\{ \left| \frac{d_{\min}^{-1} - \eta}{d_{\min}^{-1} + \eta} \right|, \left| \frac{d_{\max}^{-1} - \eta}{d_{\max}^{-1} + \eta} \right| \right\}$ 。易知, 当  $\gamma(\eta)$  最小时, 需满足, 即:

$$\eta^* = \sqrt{\frac{1}{d_{\max} d_{\min}}}, \quad (13)$$

$$\text{取最优参数时, } \gamma(\eta^*) = \frac{\sqrt{\frac{d_{\max}}{d_{\min}}} - 1}{\sqrt{\frac{d_{\max}}{d_{\min}}} + 1}.$$

证毕

**注** 同理, 计算(7)式的交替分裂迭代格式及最优参数选取与(6)式的计算过程类似。

由定理 2、定理 3 可知, 迭代格式(10)的渐进收敛速度:

$$R_{\infty}(\mathbf{B}(\eta^*)) = -\log_{10} \rho(\mathbf{B}(\eta^*)) \geq -\log_{10} \gamma(\eta^*) = \log_{10} \frac{\sqrt{\frac{d_{\max}}{d_{\min}}} + 1}{\sqrt{\frac{d_{\max}}{d_{\min}}} - 1}.$$

即误差减少 10 倍, 需要迭代次数为  $\left\lceil \left| \log_{10} \frac{\sqrt{\frac{d_{\max}}{d_{\min}}} + 1}{\sqrt{\frac{d_{\max}}{d_{\min}}} - 1} \right| \right\rceil$ 。

### 2.3 预处理迭代算法

已经证明在  $\forall \eta > 0$  的条件下, 格式(9)式是收敛的, 但在实际运算过程中, 收敛速度仍不够快, 下面将介绍预处理方法对它进行加速。

通过(9)、(10)式, 可以将线性系统  $\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{b}$  等价于  $(\mathbf{I} - \mathbf{B}(\eta))\mathbf{v} = \mathbf{M}^{-1}(\eta)\mathbf{Q}\mathbf{v} = \mathbf{c}$ 。这里的  $\mathbf{c} = \mathbf{M}^{-1}(\eta)\mathbf{b}$ , 可以运用 GMRES 算法<sup>[18]</sup>来计算上述的线性系统, 其中  $\mathbf{M}^{-1}(\eta)\mathbf{Q}$  为预处理之后的矩阵, 而矩阵  $\mathbf{M}(\eta)$  为预处理子。由定理 2 知  $\rho(\mathbf{B}(\eta)) < 1$ , 则预处理后的系数矩阵  $\mathbf{M}^{-1}(\eta)\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{B}(\eta)$  的特征值聚在复平面上以  $(1, 0)$  为中心, 半径小于 1 的圆内部, 由此可知预处理的 GMRES 算法速度很快。

## 3 数值实验

为了验证上文所提出的交替分裂迭代及相应预处理方法的有效性, 本章内容将以 Matlab R2020a 为计算工具进行数值实验。为验证本文格式的精确性以及可靠性, 在所有测试中, 均选择最优参数  $\eta^*$  进行实验, 当相对残差减小至 10 个数量级 (即  $\|\mathbf{b} - \mathbf{Q}\mathbf{v}^k\|_2 \leq 10^{-10} \|\mathbf{b} - \mathbf{Q}\mathbf{v}^0\|_2$ ) 时, 停止迭代, 其中  $\mathbf{v}^0$  为零向量。规定误差为  $E_{\text{error}} =$

$\|w_s - u(t_f)\|_\infty$ , 其中:  $w_s$  表示数值解,  $u(t_f)$  表示精确解或参考解。

例 1 考虑变系数反应扩散方程, 令问题(1)中扩散系数函数为  $d(x, y) = e^{x+y}$ ,  $e(x, y) = e^{x-y}$ , 空间区域为  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , 时间区域为  $[t_0, t_f] = [0, 1]$ , 源项为:

$$f(x, y, t, u) = 4\pi^2 e^{x-t} (e^y + e^{-y}) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) - e^{-3t} \sin^3(2\pi x) \sin^3(2\pi y) + u - u^3,$$

边界条件为齐次 Dirichlet 边界条件, 初始条件为  $u(x, y, 0) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$ 。精确解为

$$u(x, y, t) = e^{-t} \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)。$$

选取时间和空间步长为 1/10, 1/20, 1/40, 1/80, 分别将这些步长带入算法中实现。表 1 所示为  $\tau = h = \Delta x = \Delta y = 1/10, 1/20, 1/40, 1/80$  时最大模误差、近似收敛阶、迭代次数及计算时间。这里迭代次数为每个时间步迭代次数的平均值。由表 1 可知: 改进 Douglas 分裂方法是二阶收敛的, 交替分裂迭代方法所需计算时间最短, 预处理 GMRES 迭代方法所需迭代次数最小, 且交替分裂迭代方法和预处理 GMRES 迭代方法在迭代次数和计算时间方面的结果都优于未预处理 GMRES 迭代方法, 由此可看出本文所提出的预处理方法在很大程度上加快了线性系统的迭代速度, 减少了计算成本。

表 1 例 1 的数值结果

Tab. 1 Numerical results for example 1

$\tau$	$h$	最大模误差	近似收敛阶	交替分裂迭代法		预处理 GMRES		未预处理 GMRES	
				迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s
1/10	1/10	4.849 0e-02	—	18.3	0.169 0	11.5	0.044 2	64.8	0.052 3
1/20	1/20	1.197 3e-02	2.017 9	16.6	0.036 2	10.9	0.065 6	122.5	0.211 8
1/40	1/40	3.003 5e-03	1.995 1	16.7	0.082 1	11.0	0.136 1	230.4	1.230 4
1/80	1/80	7.511 7e-04	1.999 4	17.4	0.527 6	11.0	1.186 9	405.9	35.934 7

图 1 所示为迭代矩阵  $B(\eta^*)$  的特征值分布, 由图 1 可见:  $N = N_1 = N_2$  时,  $B(\eta^*)$  的特征值聚在复平面上一个以 (0, 0) 为中心, 半径小于 1 的范围内。因此, 本文所介绍的交替分裂迭代算法是收敛的算法。

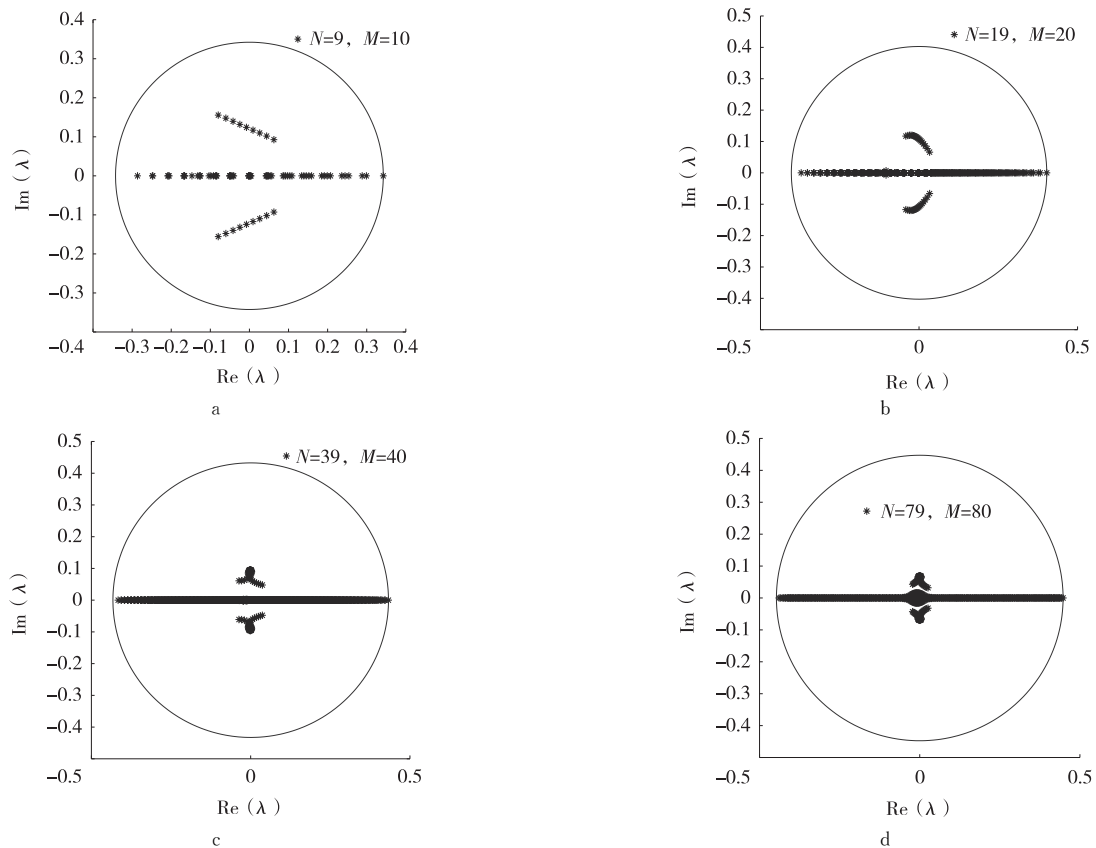


图 1 例 1 迭代矩阵  $B(\eta^*)$  的特征值分布图

Fig. 1 The distribution of eigenvalues of iterative matrix  $B(\eta^*)$  for example 1

最后对最优参数的选取进行分析,观察图 2 可知,  $\gamma(\eta)$  恒大于  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$ , 为  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$  的一个上界。当  $\eta = \eta^*$  时,  $\gamma(\eta^*)$  达到了最小, 从而验证了定理 2。

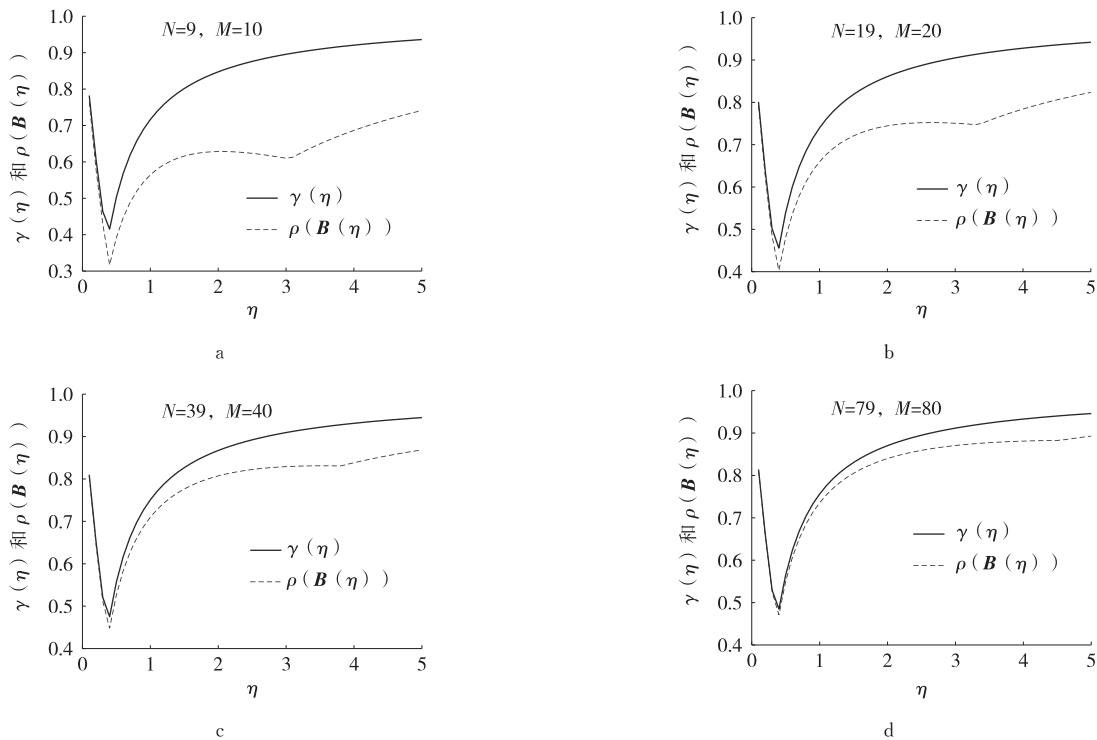


图 2 例 1 的  $\gamma(\eta)$  与  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$  关于不同  $\eta$  的变化图

Fig. 2 Plot of  $\gamma(\eta)$  and  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$  with respect to different  $\eta$  for example 1

例 2 考虑反应扩散方程,令(1)式中扩散系数函数为  $d(x, y) = 0.1(x^2 + 2)$ ,  $e(x, y) = 0.1(y^2 + 3)$ , 空间区域为  $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ , 时间区域为  $[t_0, t_f] = [0, 0.1]$ , 源项为  $f = \sin(u)$ 。边界条件为齐次 Dirichlet 边界条件, 初始条件为  $u(x, y, 0) = 10\,000 \sin(8\pi x) \sin(\pi y)$ 。将时间步长取  $1/10\,000$  时得到的数值解作为例 2 的参考解。

固定空间步长为  $1/160$ , 选取时间步长为  $1/100, 1/200, 1/400, 1/800, 1/1\,600, 1/3\,200$ , 分别将这些步长带入算法中实现。表 2 所示为固定  $h = 1/160$  时最大模误差、近似收敛阶、迭代次数及计算时间, 从表 2 可以再次看出此算法能很好地达到二阶精度, 且预处理之后的交替分裂迭代方法和预处理 GMRES 迭代方法均比未预处理 GMRES 迭代方法迭代次数更小、计算时间更少, 此结果再次验证了本文所提出预处理方法的有效性。

表 3 所示为固定时间步长  $\tau = 1/40$ , 选取空间步长为  $1/80, 1/160, 1/320, 1/640$  带入算法中实现的相关结果。由表 3 可知, 交替分裂迭代方法和预处理 GMRES 迭代方法的迭代次数不随空间步长的不同而发生变化, 且预处理方法所产生的结果更为优越。

表 2 例 2 的数值结果

Tab. 2 Numerical results for example 2

$\tau$	$h$	最大模误差	近似收敛阶	交替分裂迭代法		预处理 GMRES		未预处理 GMRES	
				迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s
1/100	1/160	8.439 9e-03	—	9.9	0.162 7	6.0	0.444 8	120.8	3.622 4
1/200		3.685 8e-03	1.195 2	10.9	0.298 8	6.1	0.461 7	76.8	4.458 1
1/400		1.062 5e-03	1.794 5	11.9	0.628 6	7.0	1.014 6	48.9	5.721 2
1/800		2.737 0e-04	1.956 8	12.4	1.316 1	7.1	1.972 1	31.1	8.835 9
1/1600		6.767 5e-05	2.015 9	12.7	2.635 5	7.4	4.071 5	19.1	8.921 1
1/3200		1.562 2e-05	2.115 0	12.8	5.207 9	7.5	8.214 8	12.6	9.770 2

表 3 例 2 的数值结果  
Tab. 3 Numerical results for example 2

$\tau$	$h$	交替分裂迭代法		预处理 GMRES		未预处理 GMRES	
		迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s	迭代次数	计算时间/s
	1/80	11.3	0.024 7	5.5	0.037 4	79.4	0.316 1
	1/100	11.3	0.033 9	5.5	0.049 6	108.6	0.736 3
1/40	1/120	11.3	0.048 2	5.5	0.065 1	130.9	1.168 8
	1/140	11.3	0.055 8	5.5	0.116 9	167.1	1.927 8
	1/160	11.3	0.069 1	5.5	0.086 7	196.9	2.239 8

图 3 与图 4 为迭代矩阵  $\mathbf{B}(\eta^*)$  的特征值分布图与最优参数选取的分析图。由图 3 可知,  $\mathbf{B}(\eta^*)$  的特征值聚在一个以 (0,0) 为中心, 半径小于 1 的范围内, 故达到了收敛效果, 再次验证了收敛性理论分析结果的正确性。由图 4 可知, 当  $\eta = \eta^*$  时,  $\gamma(\eta^*)$  达到了最小, 从而再次验证了最优参数理论分析的结果。

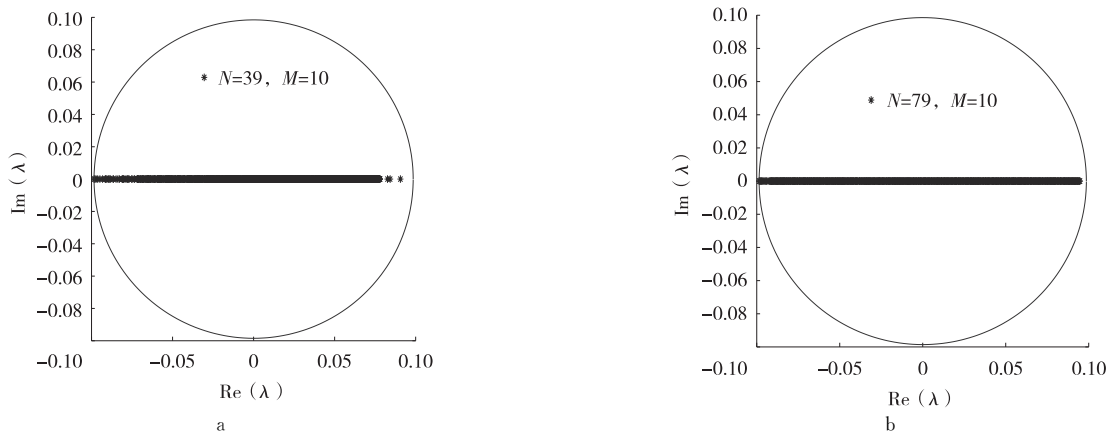


图 3 例 2 迭代矩阵  $\mathbf{B}(\eta^*)$  的特征值分布图

Fig. 3 The distribution of eigenvalues of iterative matrix  $\mathbf{B}(\eta^*)$  for example 2

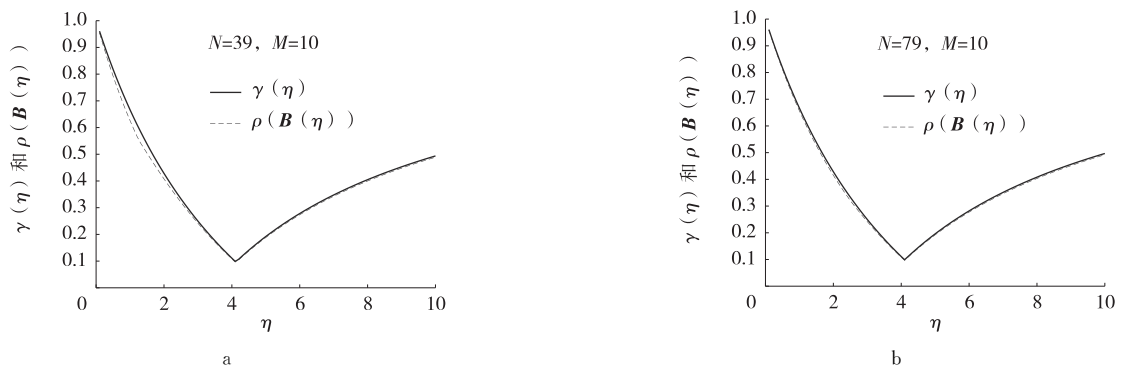


图 4 例 2 的  $\gamma(\eta)$  与  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$  关于不同  $\eta$  的变化图

Fig. 4 Plot of  $\gamma(\eta)$  and  $\rho(\mathbf{B}(\eta))$  with respect to different  $\eta$  for example 2

### 4 结语

本文提出了一种变系数反应扩散方程的快速预处理迭代算法, 运用改进 Douglas 分裂方法对时间方向进行离散, 对离散后的线性系统, 用一类交替分裂迭代法进行计算, 研究结果表明了该交替分裂方法具有无条件收敛性, 且数值算例验证了新方法的有效性。

### 参考文献:

[1] HUNSDORFER W, VERWER J. Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations[M]. New York:

- Springer, 2003.
- [2] QUARTERONI A. Numerical models for differential problems[M]. Milan: Springer, 2017.
- [3] ZHOU Z G, LIANG D. Mass-preserving time second-order explicit-implicit domain decomposition schemes for solving parabolic equations with variable coefficients[J]. Computational and Applied Mathematics, 2018, 37(4): 4423-4442.
- [4] EVANS L C. Partial differential equations (graduate studies in mathematics)[M]. Providence: American Mathematical Society, 1998.
- [5] 孙志忠. 非线性发展方程的有限差分方法[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- SUN Z Z. Finite difference method for nonlinear evolution equations[M]. Beijing: Science Press, 2018.
- [6] HESTHAVEN J S, GOTTLIEB S, GOTTLIEB D. Spectral methods for time-dependent problems[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2007.
- [7] ISERLES A. A first course in the numerical analysis of differential equations[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.
- [8] ARRARAS A, in't HOUT K J, HUNSDORFER W, et al. Modified Douglas splitting methods for reaction-diffusion equations[J]. BIT Numerical Mathematics, 2017(57): 261-285.
- [9] PEACEMAN D W, Jr RACHFORD H H. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 1955, 3(1): 28-41.
- [10] Jr DOUGLAS J. Alternating direction methods for three space variables[J]. Numerische Mathematik, 1962, 4(1): 41-63.
- [11] BAI Z Z, GOLUB G H, NG M K. Hermitian and skew-Hermitian splitting methods for non-Hermitian positive definite linear systems[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2003, 24(3): 603-626.
- [12] CHEN H. A splitting preconditioner for the iterative solution of implicit Runge-Kutta and boundary value methods[J]. BIT Numerical Mathematics, 2014, 54(3): 607-621.
- [13] CHEN H. Generalized Kronecker product splitting iteration for the solution of implicit Runge-Kutta and boundary value methods[J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2015, 22(2): 357-370.
- [14] CHEN H, LÜ W, ZHANG T T. A Kronecker product splitting preconditioner for two-dimensional space-fractional diffusion equations[J]. Journal of Computational Physics, 2018, 360: 1-14.
- [15] BAI Z Z, LU K Y, PAN J Y. Diagonal and Toeplitz splitting iteration methods for diagonal-plus-Toeplitz linear systems from spatial fractional diffusion equations[J]. Numerical Linear Algebra with Applications, 2017, 24(4): e2093.
- [16] LIN X L, NG M K, SUN H W. A splitting preconditioner for Toeplitz-like linear systems arising from fractional diffusion equations[J]. SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2017, 38(4): 1580-1614.
- [17] HORN R A, JOHNSON C R. Topics in matrix analysis[M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.
- [18] SAAD B Y. Iterative methods for sparse linear systems[M]. 2nd edition. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2003.

## A Class of Alternating Splitting Preconditioning Method for Spatial Variable Coefficient Reaction-Diffusion Equations

JIANG Qinsha, CHEN Hao

(College of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** [Purposes] It studies fast iterative solvers for the linear system arising in the modified Douglas splitting discretization of the reaction-diffusion equation with variable diffusion coefficients. [Methods] The matrix structure of the resulting linear systems is the sum of an identity matrix and a diagonal-times-SPD matrix. By making use of an alternating splitting iteration technique, a class of splitting iteration methods and corresponding preconditioners are established. [Findings] Theoretical analysis shows that the proposed methods converge to the unique solution of the linear system unconditionally. Moreover, the analytic value of the optimal iteration parameter is obtained. [Conclusions] Numerical examples are presented to illustrate the effectiveness of this approach.

**Keywords:** reaction-diffusion equation with variable coefficients; modified Douglas splitting method; alternating splitting iteration method; preconditioner

(责任编辑 黄 颖)