DOI:10.11721/cqnuj20220507

一类可压缩非牛顿流体弱解的吸收集问题*

张思敏,郭闪闪

(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘要:【目的】研究一类可压缩非牛顿流体在三维有界 Lipschitz 区域内的吸收集存在性问题。【方法】利用 Hölder 不等式、Sobolev 嵌入定理,结合 Gronwall 引理等方法,得到精确的能量估计。【结果】首先根据有限能量弱解定义,给出能量 E 表达式,其次借助重整化解与有界算子 $\mathscr{B}$ 的辅助引理,得到衰减估计,进而得到能量的局部有界性,最后找出常数 E_∞,当 $t>T$ 时,$E[\rho,\boldsymbol{u}](t)\leqslant E_\infty$ a. e. 。【结论】在外力函数是有界可测的假设条件下,非牛顿流体方程组有限能量弱解的吸收集存在。

关键词:可压缩流体;有限能量弱解;非牛顿流体;吸收集

中图分类号:O175.29 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2022)05-0091-08

1 研究背景

非牛顿流体是不满足牛顿粘度定律的流体,它的剪切应力与剪切速率为非线性关系。生活中常见的非牛顿流体包括熔融塑料、聚合物溶液、染料、油漆、润滑脂、纸浆、血液等。非牛顿流体力学的发展为聚合物加工、薄膜成型、润滑、石油等工业领域的进一步发展提供了新的数学理论。为了更好了解工业加工背景,需要清晰地描述非牛顿流体的流变性质。目前,国内外很多学者对非牛顿流体的数学理论进行了研究[1-7]。研究非牛顿流体模型将为实际应用提供理论支撑,有助于改进产品,这对于实际工业生产至关重要。

令 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^3$ 是具有 Lipschitz 边界的有界区域,本文考虑一类经典的可压缩非牛顿流体:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u})=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho\boldsymbol{u})}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\boldsymbol{u}\otimes\boldsymbol{u})+\nabla P(\rho)=\mathrm{div}\,\boldsymbol{S}+\rho\boldsymbol{f}, \tag{2}$$

其中:

$$\boldsymbol{S}=2\mu_0(1+|\boldsymbol{D}^d(\boldsymbol{u})|^2)^{\frac{r-2}{2}}\boldsymbol{D}^d(\boldsymbol{u})+\frac{b\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}}{(1-b^a|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}|^a)^{\frac{1}{a}}}\boldsymbol{\Pi}, \tag{3}$$

这里 $\rho=\rho(t,\boldsymbol{x})>0$ 表示流体密度,$\boldsymbol{u}=(u_1(t,\boldsymbol{x}),u_2(t,\boldsymbol{x}),u_3(t,\boldsymbol{x}))$ 为流体速度,$\boldsymbol{f}=(f_1(t,\boldsymbol{x}),f_2(t,\boldsymbol{x}),f_3(t,\boldsymbol{x}))$ 是外力函数。符号 $\boldsymbol{S}=(S_{ij})_{i,j=1,2,3}$ 表示外部应力张量,μ_0 是一个大于零的常数,$r\in\left[\frac{11}{5},\infty\right)$,$a$,$b$ 为正常数。$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u}):=\frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\nabla\boldsymbol{u}^{\mathrm{T}})$ 是剪切速度张量,用 $\boldsymbol{D}^d(\boldsymbol{u})=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{u})-\frac{1}{3}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})\boldsymbol{\Pi}$ 表示 $\boldsymbol{D}$ 的偏量(或迹)部分,其中 $\boldsymbol{\Pi}$ 是一个 3×3 的单位矩阵。

假设压力函数 $P(\rho)$ 满足:

$$P(\rho)=A\rho^\gamma, \tag{4}$$

其中:A 是大于零的常数,$\gamma>1$ 表示绝热指数。假设速度满足 Dirichlet 边界条件:

* 收稿日期:2021-06-28 修回日期:2021-07-11 网络出版时间:2022-09-19 12:36

资助项目:国家自然科学基金(No. 12001074);重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJQN202000536);重庆市科学技术局科学研究项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0606);重庆师范大学(博士启动)基金项目(No. 19XLB012)

第一作者简介:张思敏,女,研究方向为偏微分方程,E-mail:zhangsimin19970819@163.com;通信作者:郭闪闪,女,讲师,博士,E-mail:gss@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220916.1823.027.html

$$\boldsymbol{u}\,|_{\partial\Omega}=0。\tag{5}$$

目前关于可压缩非牛顿流体的研究结果相对较少，Feireisl 等人[1]得到了三维有界区域中初边值弱解的全局存在性。在此基础上，Guo 等人[8-9]研究了文献[1]定义的弱解的长时间行为以及边界的可积性问题。此外，文献[4-7]研究了一系列有关可压缩非牛顿流体弱解适定性问题。

非牛顿流体力学方程(1)和(2)具有很强的非线性结构，一直以来人们对它的研究进展缓慢。当 $r=2$ 时，(1)，(2)式对应于牛顿流体，这是学者们所熟知的 Navier-Stokes 方程组[10-11]。目前，文献[12-18]对此进行了深入的研究，其中 Feireisl 和 Petzelttová[14]研究了带粘性可压缩 Navier-Stokes 方程组的有界吸收集问题。

关于牛顿流体的很多研究思想可以借鉴到非牛顿流体的研究中。受文献[14]思想启发，本文主要考虑方程组(1)～(5)在三维有界区域全局弱解的吸收集问题，该问题的主要困难在于该方程组有较强的非线性结构，其中 $\operatorname{div}(2\mu_0(1+|\boldsymbol{D}^d(\boldsymbol{u})|^2)^{\frac{r-2}{2}}\boldsymbol{D}^d(\boldsymbol{u}))$ 与 $\operatorname{div}\left(\dfrac{b\operatorname{div}\boldsymbol{u}}{(1-b^a|\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^a)^{\frac{1}{a}}}\boldsymbol{\Pi}\right)$ 在推导能量衰减估计过程中比较复杂，因此需要借助非牛顿流体方程组本身性质进行精确分析。

本文考虑方程组(1)～(5)的有限能量弱解，定义如下：

定义 1[1] 令 $\gamma>\dfrac{5}{3}$，函数$(\rho,\boldsymbol{u})$称为方程组(1)～(5)的全局有限能量弱解，如果：

1) $\rho\in L^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+;L^{\gamma}(\Omega))$，$\boldsymbol{u}\in L^{r}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+;(W^{1,r}_0(\Omega))^3)$；

2) 在 Ω 外延长 ρ 和 $\boldsymbol{u}$ 为 0，方程(1)在 $D'(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3)$中成立；

3) $(\rho,\boldsymbol{u})$在 $D'(\mathbf{R}^+)$中满足下面的能量不等式：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E[\rho,\boldsymbol{u}](t)+\int_\Omega 2\mu_0(1+|\boldsymbol{D}^d(\boldsymbol{u})|^2)^{\frac{r-2}{2}}|\boldsymbol{D}^d(\boldsymbol{u})|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\int_\Omega\frac{b|\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^2}{(1-b^a|\operatorname{div}\boldsymbol{u}|^a)^{\frac{1}{a}}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\int_\Omega\rho\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\mathrm{d}\boldsymbol{x},\tag{6}$$

其中能量 E 可以表示为：

$$E[\rho,\boldsymbol{u}](t)=\frac{1}{2}\int_\Omega\rho(t)|\boldsymbol{u}(t)|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{A}{\gamma-1}\int_\Omega\rho^\gamma(t)\mathrm{d}\boldsymbol{x}。$$

此外，假设总质量 m 守恒，即 $m=\int_\Omega\rho(t,\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ 与时间无关。

本文主要证明以下定理：

定理 1 令 $\gamma>\dfrac{5}{3}$，$(\rho,\boldsymbol{u})$是满足定义 1 的有限能量弱解，$f(t,\boldsymbol{x})$是有界可测函数，满足

$$\max_{i=1,2,3}\{\operatorname{ess}\sup_{t\in\mathbf{R}^+,\boldsymbol{x}\in\Omega}|f_i|\}\leqslant K。\tag{7}$$

对给定的 E_0，如果：

$$\operatorname{ess}\limsup_{t\to0^+}E[\rho,\boldsymbol{u}](t)\leqslant E_0,$$

则：对于时间 $T=T(E_0)$，当 $t>T$ 时，存在常数 E_∞(只与 γ,K,m 相关)，使得

$$E[\rho,\boldsymbol{u}](t)\leqslant E_\infty\ \text{a.e.}。$$

本文后面部分作如下安排：第 2 节给出符号说明和一些重要的辅助引理，便于后续定理的证明，第 3 节借助 Hölder 不等式、Sobolev 嵌入定理、Gronwall 引理等，得到能量的衰减估计，进而得到能量的局部有界性，这对吸收集存在性证明至关重要；在第 4 节找出常数 E_∞，证明吸收集存在性，即得定理 1 结论。

2 辅助引理

本节首先给出一些符号说明和基本的引理。

符号说明：1) 令 $1\leqslant p<\infty$，$k\in\mathbf{N}_0=\{0,1,2,\cdots\}$，用 $L^p(\Omega)$表示 Lebesgue 空间，范数表示为$\|\cdot\|_{L^p(\Omega)}$。用 $W^{k,p}$ 表示 Sobolev 空间，范数表示为：$\|\boldsymbol{u}\|_{W^{k,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|\partial^\alpha\boldsymbol{u}\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}$，其中 α 表示多重指标；2) C 表示一个正常数，它在不同的估计式子中取值可能不同；3) f_ε 表示 f 的磨光函数，且满足：$f_\varepsilon=f*\eta_\varepsilon=\int_{\mathbf{R}^3}f(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})\eta_\varepsilon(\boldsymbol{y})\mathrm{d}\boldsymbol{y}$，其中 η_ε 表示 Friedrichs 磨光核。

引理 1　函数$(\rho,\boldsymbol{u})$是重整化解,即对任意的$b\in C^1(\mathbf{R})$,等式:

$$b(\rho)_t+\operatorname{div}(b(\rho)\boldsymbol{u})+(b'(\rho)\rho-b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{u}=0,$$

在$D'(\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3)$中成立,并且在$\mathbf{R}$上全局 Lipschitz。另外,在$\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^3$上有:

$$b(\rho)_{\varepsilon t}+\operatorname{div}(b(\rho)_\varepsilon\boldsymbol{u})+[(b'(\rho)\rho-b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{u}]_\varepsilon=r_\varepsilon,$$

其中:$r_\varepsilon=\operatorname{div}(b(\rho)_\varepsilon\boldsymbol{u})-[\operatorname{div}(b(\rho)\boldsymbol{u})]_\varepsilon$。若$b(\rho)\in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+;L^\beta(\Omega))$,$\boldsymbol{u}\in L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+;W^{1,r}_0(\Omega))$,则:当$\varepsilon\to0$,$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\beta}+\frac{1}{r}$时,可得:

$$r_\varepsilon\to0\in L^r_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^+;L^\alpha(\Omega))。\tag{8}$$

引理 1 的详细证明参见文献[17]的引理 3.2。

为了得到进一步的估计,需要借助算子$\mathscr{B}$,Bogovskli[19]首次构造出算子$\mathscr{B}$,其中:$\mathscr{B}$是满足方程$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=f$,$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0$的解。

引理 2　令$\Omega\subseteq\mathbf{R}^3$是具有 Lipschitz 边界的有界区域,则存在一个有界线性算子$\mathscr{B}$满足:

1) $\mathscr{B}=[B_1,B_2,B_3]:\left\{f\in L^p(\Omega)\mid\int_\Omega f\mathrm{d}\boldsymbol{x}=0\right\}\longmapsto[W^{1,p}_0(\Omega)]^3$是一个有界线性算子,且对任意的$1<p<\infty$,有:$\|\mathscr{B}\{f\}\|_{W^{1,p}_0(\Omega)}\leqslant C(p,\Omega)\|f\|_{L^p(\Omega)}$。

2) 函数$\boldsymbol{v}=\mathscr{B}\{f\}$满足:$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=f$在$\Omega$ a. e. 成立,$\boldsymbol{v}|_{\partial\Omega}=0$。

3) 若f满足$f=\operatorname{div}\boldsymbol{g}$,当$\boldsymbol{g}\in[L^s(\Omega)]^3$,$\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{n}|_{\partial\Omega}=0$时,对任意的$1<s<\infty$,有:

$$\|\mathscr{B}\{f\}\|_{L^s(\Omega)}\leqslant C(p,r,\Omega)\|\boldsymbol{g}\|_{L^s(\Omega)}。\tag{9}$$

引理 2 关于算子$\mathscr{B}$的 3 条性质的详细证明过程见文献[10]的定理 3.3 和文献[20]的定理 2.4。

推论 1 在引理 2 的假设下,根据 Sobolev 嵌入定理,可以得出:

$$\|\mathscr{B}\{f\}\|_{L^q(\Omega)}\leqslant C(p,q,\Omega)\|f\|_{L^p(\Omega)}。\tag{10}$$

其中:

$$q\begin{cases}\leqslant\dfrac{3p}{3-p},\text{若 } p<3\\ \text{任意有限,若 } p=3\\ \leqslant\infty,\text{若 } p>3\end{cases}。\tag{11}$$

3 衰减估计

在证明定理 1 之前,本文需要证明以下两个命题:

命题 1　假设$\rho,\boldsymbol{u},f$满足定理 1 的假设条件,如果需要的话,在 0 测度集上重新定义,则能量E在$\mathbf{R}^+$上局部有界,且对$\forall t\in\mathbf{R}^+$有:

$$E(t+)=\lim_{s\to t+}E(s)\leqslant\lim_{s\to t-}E(s)=E(t-)。\tag{12}$$

此外,对$\forall\,0<t_1<t_2$有:

$$E(t_2-)\leqslant(1+E(t_1+))\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K(t_2-t_1)}-1。\tag{13}$$

证明　根据$E(\rho,\boldsymbol{u})$的定义,E可以表示成一个非增函数和一个绝对连续函数的和。因此,可得E是几乎处处连续的,故(12)式成立。

借助(7)式,能量不等式右侧估计如下:

$$\int_\Omega\rho f\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant K\left(\int_\Omega\rho\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_\Omega\rho\,|\,\boldsymbol{u}\,|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2m}K(E+1),\tag{14}$$

其中:$\left(\int_\Omega\rho\,|\,\boldsymbol{u}\,|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{2}}\leqslant\sqrt{2E}\leqslant\sqrt{2}(E+1)$。则有:$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}E\leqslant\sqrt{2m}K(E+1)$。

对于$\forall\,0<t_1<t_2$,由 Gronwall 引理得:$(E(t_2-)+1)\leqslant\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K(t_2-t_1)}(1+E(t_1+))$,即得(13)式。　　证毕

命题 2　在定理 1 的假设条件下,若对某个$T\in\mathbf{R}^+$,有:

$$E((T+1)-)>E(T+)-1,\tag{15}$$

则存在一个不依赖于 γ,K 和 m 的常数 L,使得:$\sup\limits_{t\in(T,T+1)} E(t+)\leqslant L$。

为了证明命题 2,需要建立下述两个辅助引理。

引理 3 在定理 1 和(15)式的假设下,存在一个关于 K 和 m 的常数 C,使得:

$$\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}^r\mathrm{d}t\leqslant C(K,m)\left(1+\int_T^{T+1}\|\rho(t)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\mathrm{d}t\right)。\tag{16}$$

证明 对能量不等式(6)在$(T,T+1)$上进行积分,并借助 Poincaré 不等式,得到:

$$E((T+1)-)-E(T+)+C\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2\mathrm{d}t+C\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}^r\mathrm{d}t\leqslant K\int_T^{T+1}\int_\Omega\rho|\boldsymbol{u}|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t。$$

根据 Hölder 不等式、Young 不等式和 Sobolev 嵌入定理,上式右边项的估计如下:

$$\int_\Omega\rho|\boldsymbol{u}|\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant\sqrt{m}\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}^{\frac{1}{2}}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega)}\leqslant C(m)\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}+C\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}^2。\tag{17}$$

根据(15)和(17)式,可以得出(16)式。类似地可得:

$$\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant C(K,m)\left(1+\int_T^{T+1}\|\rho(t)\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\mathrm{d}t\right)。$$

证毕

引理 4 在定理 1 和(15)式的假设条件下,对$\forall t\in[T,T+1]$,存在一个关于 K 和 m 的常数 C,使得:

$$E(t+)\leqslant C(K,m)\left(1+\int_T^{T+1}\|\rho(s)\|_{L^\gamma}^\gamma\mathrm{d}s\right)。$$

证明 对$\forall 0<t<T+1$,在(13)式中令 $t_2=T+1$,在区间$[T,T+1]$对 t 积分,得到:

$$E((T+1)-)\leqslant\int_T^{T+1}\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K(T+1-t)}\mathrm{d}t+\int_T^{T+1}E(t+)\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K(T+1-t)}\mathrm{d}t-1\leqslant C(K,m)\left(1+\int_T^{T+1}E(s)\mathrm{d}s\right)。$$

根据(15)式,有:

$$E(T+)<E((T+1)-)+1\leqslant C(K,m)\left(1+\int_T^{T+1}E(s)\mathrm{d}s\right)。$$

接下来,对$\forall t>T$,在(12)式中令 $t_1=T$,得到:

$$E(t-)\leqslant(1+E(T+))\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K(t-T)}-1。$$

因此,对$\forall t\in[T,T+1]$,有:

$$E(t+)\leqslant E(t-)\leqslant C(K,m)\left(1+\int_T^{T+1}E(s)\mathrm{d}s\right)。\tag{18}$$

根据引理 3,Hölder 不等式和 Sobolev 嵌入定理,推出:

$$\int_T^{T+1}\int_\Omega\rho|\boldsymbol{u}|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\mathrm{d}t\leqslant\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega)}^2\mathrm{d}t\leqslant\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}}^2\mathrm{d}t\leqslant$$

$$C(K,m)\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\left(1+\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\mathrm{d}t\right)\leqslant C(K,m)\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}^\eta\left(1+\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}^\eta\mathrm{d}t\right),\tag{19}$$

上述估计借助不等式:

$$\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}\leqslant\|\rho\|_{L^1(\Omega)}^{1-\eta}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}^\eta,\eta=\frac{\gamma}{3(\gamma-1)}。\tag{20}$$

结合(18)和(19)式,得:

$$\sup_{t\in[T,T+1]}E(t+)\leqslant C(K,m)\left(1+\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}^\gamma\mathrm{d}t+\sup_{t\in[T,T+1]}E(t+)^{\frac{1}{3(\gamma-1)}}\left(1+\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}^{\frac{\gamma}{3(\gamma-1)}}\mathrm{d}t\right)\right)。$$

由 $\gamma>\frac{5}{3}$,易得$\frac{1}{3(\gamma-1)}<\frac{1}{2}$,根据 Cauchy 不等式,即得引理 4 的结论。 证毕

结合引理 1~4,可以推出命题 2 的结论。

证明(命题 2) 设 $\varphi_i(t,\boldsymbol{x})=\psi(t)B_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}(i=1,2,3)$ 为方程(2)的测试函数,其中 $0\leqslant\psi\leqslant1$,$\psi\in D(T,T+1)$,并且:

$$b\in C^1(\mathbf{R}),b(z)=z^\theta,\tag{21}$$

其中:$z\geqslant1$,$\theta=\min\left\{\frac{1}{4},\frac{2\gamma-3}{3\gamma}\right\}$。

根据引理 1 和引理 2，可得：

$$\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega A\rho^\gamma b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=\int_T^{T+1}\psi\left(\int_\Omega A\rho^\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\left(\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}t+\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega \frac{b\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}}{(1-b^a|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}|^a)^{\frac{1}{a}}}b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-$$
$$\int_T^{T+1}\psi_t\int_\Omega \rho u_i B_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t+$$
$$\int_T^{T+1}\int_\Omega \mu_0(1+|\boldsymbol{D}^d|^2)^{\frac{r-2}{2}}\left[-\frac{2}{3}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}+\frac{1}{2}(\partial_i u_j+\partial_j u_i)(\partial_i\varphi_j+\partial_j\varphi_i)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-$$
$$\int_T^{T+1}\psi(t)\int_\Omega \rho u_i u_j\partial_j B_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t+$$
$$\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega \rho u_i B_i\left\{[(b'(\rho)\rho-b(\rho))\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}]_\varepsilon+\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega[(b'(\rho)\rho-b(\rho))\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}]_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-$$
$$\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega \rho u_i B_i\left\{r_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega r_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t+\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega \rho u_i B_i\{\mathrm{div}(b(\rho)_\varepsilon \boldsymbol{u})\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t-$$
$$\int_T^{T+1}\int_\Omega \psi\rho f_i B_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{9}I_i。$$

接下来将逐项估计这 9 项积分，主要借助 Hölder 不等式、Sobolev 嵌入定理以及算子 $\mathscr{B}$ 性质，具体如下：

1）估计 I_1：

$$|I_1|=\left|\int_T^{T+1}\psi\left(\int_\Omega A\rho^\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)\mathrm{d}t\right|\leqslant C(m)\int_T^{T+1}\int_\Omega \rho^\gamma \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t。$$

2）当 $\theta<\frac{1}{2}$ 时，由 Hölder 不等式

$$|I_2|=\left|\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega \frac{b\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}}{(1-b^a|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}|^a)^{\frac{1}{a}}}b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^1(\Omega)}^\theta\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C(m)\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}t。$$

3）对于 I_3，当 $\theta<\frac{1}{3}$ 时，根据(10)和(11)式，有：

$$|I_3|=\left|\int_T^{T+1}\psi_t\int_\Omega \rho u_i B_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$
$$C(m)\int_T^{T+1}|\psi_t|\,\|\sqrt{\rho}u_i\|_{L^2(\Omega)}\left\|\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\|_{L^{\frac{1}{\theta}}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C(m)\int_T^{T+1}|\psi_t|\,\|\sqrt{\rho}u_i\|_{L^2(\Omega)}\mathrm{d}t。$$

4）当 $\theta<\frac{1}{r}$ 时，I_4 可估计如下：

$$|I_4|=\left|\int_T^{T+1}\int_\Omega \mu_0(1+|\boldsymbol{D}^d|^2)^{\frac{r-2}{2}}\left[-\frac{2}{3}\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{\varphi}+\frac{1}{2}(\partial_i u_j+\partial_j u_i)(\partial_i\varphi_j+\partial_j\varphi_i)\right]\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$
$$C\int_T^{T+1}|\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}|_{L^r(\Omega)}^{r-1}\left\|\mathscr{B}\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\right\|_{W^{1,r}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C(m)\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,r}(\Omega)}^r\mathrm{d}t。$$

5）对于 I_5，有：

$$|I_5|=\left|\int_T^{T+1}\psi(t)\int_\Omega \rho u_i u_j\partial_j B_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}x\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$
$$C\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6(\Omega)}^2\left\|B_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon \mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\right\|_{W^{1,p_1}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C(m)\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)}^2\mathrm{d}t,$$

其中 $\frac{1}{\gamma}+\frac{2}{6}+\frac{1}{p_1}=1$，即 $p_1=\frac{2\gamma-3}{3\gamma}$，上述估计借助不等式：

$$\|b(\rho)\|_{L^{p_1}}=\left(\int_\Omega \rho^{\theta p_1}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{\frac{1}{p_1}}\leqslant C(m),\theta\leqslant\frac{1}{p_1}。$$

6) 对于 I_6:

$$|I_6|=\left|\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega\rho u_iB_i\left\{[(b'(\rho)\rho-b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{u}]_\varepsilon+\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega[(b'(\rho)\rho-b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{u}]_\varepsilon\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$
$$C\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|_{L^6}\|B_i\{\cdots\}\|_{L^{p_2}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C(m)\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}t,$$

这里最后一个不等式估计,借助:

$$\left\|B_i\left\{[(b'(\rho)\rho-b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{u}]_\varepsilon+\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega[(b'(\rho)\rho-b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{u}]_\varepsilon\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\right\|_{L^{p_2}(\Omega)}\leqslant$$
$$\|b(\rho))\operatorname{div}\boldsymbol{u}\|_{L^{p_3}(\Omega)}\leqslant\|b(\rho)\|_{L^{p_1}(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{W_0^{1,2}(\Omega)},$$

其中:$p_2=\dfrac{6\gamma}{5\gamma-6}$,$p_3=\max\left\{1,\dfrac{6\gamma}{7\gamma-6}\right\}$。

7) 对于 I_7:

$$|I_7|=\left|\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega\rho u_i\,B_i\left\{r_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega r_\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant$$
$$C\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)}\left|B_i\left\{r_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega r_\varepsilon\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\right|_{L^{p_2}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C\int_T^{T+1}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}\|\boldsymbol{u}\|_{W^{1,2}(\Omega)}\|r_\varepsilon\|_{L^{p_3}(\Omega)}\mathrm{d}t。$$

由(8)式可得,当 $\varepsilon\to0$ 时:$\|r_\varepsilon\|_{L^{p_3}(\Omega)}\to0$,其中:

$$b(\rho)\in L^\beta(\Omega),\beta=\max\{2,p_1\},\frac{1}{p_3}=\frac{1}{p_1}+\frac{1}{2}。$$

8) 类似于 I_6,对于 I_8,根据(9)式有:

$$|I_8|=\left|\int_T^{T+1}\psi\int_\Omega\rho u_iB_i\{\operatorname{div}(b(\rho)_\varepsilon\boldsymbol{u})\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C(m)\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho(t)\|_{L^\gamma(\Omega)}\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}t。$$

9) 最后类似于 I_3,对于 I_9:

$$|I_9|=\left|\int_T^{T+1}\int_\Omega\psi\rho f_iB_i\left\{b(\rho)_\varepsilon-\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega b(\rho)_\varepsilon\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right\}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant C(K,m)。$$

结合上述 9 项的积分估计结果,令 $\psi_n\in D(T,T+1)$,且满足:$0\leqslant\psi_n\leqslant1$,$\psi_n\to1$,$\int_T^{T+1}|\partial_t\psi_n|\leqslant C$,令 $n\to\infty$,$\varepsilon\to0$:

$$\int_T^{T+1}\int_\Omega\rho^{\gamma+\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\leqslant$$
$$C(K,m)\left[(1+\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)})\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}t+\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|^r_{W_0^{1,r}(\Omega)}\mathrm{d}t+\sup_{t\in[T,T+1]}\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\right]。\tag{22}$$

根据引理 3 和(20)式:

$$\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|^2_{W_0^{1,2}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C(K,m)[1+\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^{\frac{3}{2}}(\Omega)}]\leqslant$$
$$C(K,m)[1+\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)}]^{\frac{4\gamma-3}{3(\gamma-1)}},\tag{23}$$

且有:

$$\int_T^{T+1}\|\boldsymbol{u}\|^r_{W_0^{1,r}(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C(K,m)(1+\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^\gamma(\Omega)})^{\frac{\gamma}{3(\gamma-1)}}。\tag{24}$$

由此:

$$\operatorname{ess}\sup_{t\in[T,T+1]}\|\sqrt{\rho}\boldsymbol{u}\|_{L^2(\Omega)}\leqslant\sup_{t\in[T,T+1]}\sqrt{2E(t+)}。\tag{25}$$

令 $\dfrac{\gamma-\lambda}{1-\lambda}=\gamma+\theta$,在 L^1 和 $L^{\gamma+\theta}$ 之间借助插值不等式,可得:

$$\int_T^{T+1}\|\rho\|^\gamma_{L^\gamma(\Omega)}\mathrm{d}t\leqslant C(m)\left[\int_T^{T+1}\int_\Omega\rho^{\frac{\gamma-\lambda}{1-\lambda}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right]^{1-\lambda}\leqslant C(m)\left(\int_T^{T+1}\int_\Omega\rho^{\gamma+\theta}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma+\theta-1}},\tag{26}$$

将(23)～(25)式代入(22)式，结合引理 4 和(26)式的结果，有：

$$\sup_{t\in[T,T+1]} E(t+)\leqslant C(K,m)\Big(1+\sup_{t\in[T,T+1]}\sqrt{E(t+)}+\sup_{t\in[T,T+1]}\|\rho\|_{L^{\gamma}(\Omega)}^{\frac{4\gamma-3}{3(\gamma+\theta-1)}}\Big)。\tag{27}$$

根据 γ,θ 的假设可得：$\dfrac{4\gamma-3}{3(\gamma+\theta-1)}<\gamma$。

因此，由(27)式可以得出具有命题 2 所述性质的常数 L 的存在性。　　证毕

4 定理 1 的证明

证明(定理 1)　1) 首先根据命题 2，存在时间 $T=T(E_0)$ 和一个常数 L，可知当 $t_0<T$ 时，有：

$$E(t_0+)\leqslant L。$$

实际上，如果上式不成立，根据命题 2，能量可能出现负值。进一步，对任意的整数 $n\geqslant 0$，有下式成立：

$$E((t_0+n)+)\leqslant L。\tag{28}$$

接下来运用归纳法证明(28)式。

2) 假设(28)式对所有的 $n\geqslant 0$ 都成立，下证：

$$E((t_0+n+1)+)\leqslant L。$$

由命题 2，若：

$$E((t_0+n+1)-)>E((t_0+n)+)-1,$$

则：

$$\sup_{t\in(t_0+n,t_0+n+1)} E(t+)\leqslant L,$$

从而推出：

$$E((t_0+n+1)+)\leqslant E((t_0+n+1)-)\leqslant L。$$

反之，则有：

$$E((t_0+n+1)+)\leqslant E((t_0+n+1)-)\leqslant E((t_0+n)+)-1\leqslant L-1<L。$$

因此，由归纳法可得，对任意的整数 $n\geqslant 0$，(28)式成立。

3) 最后，根据引理 3 和(28)式，当 $t_0<T$ 时，存在一个整数 n，使得 $t=t_0+n+1>T$，并且有：

$$E(t-)=E((t_0+n+1)-)\leqslant(1+E((t_0+n)+)\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K}-1\leqslant(1+L)\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K}-1。$$

因此，存在 $t>T$ 使得：

$$E(t)\leqslant E_{\infty}=(1+L)\mathrm{e}^{\sqrt{2m}K}-1。$$

证毕

参考文献：

[1] FEIREISL E, LIAO X, MÁLEK J. Global weak solutions to a class of non-Newtonian compressible fluids[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2015, 38(16): 3482-3494.

[2] MÁLEK J, NEČAS J, ROKYTA M, et al. Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs[M]. New York: Chapman and Hall/CRC, 1996.

[3] 郭柏灵，林国广，尚亚东. 非牛顿流动力系统[M]. 北京：国防工业出版社，2006.
GUO B L, LIN G G, SHANG Y D. Non-newtonian flow dynamic system[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2006.

[4] XU X J, YUAN H J. Existence of the unique strong solution for a class of non-Newtonian fluids with vacuum[J]. Quarterly of Applied Mathematics, 2015, 64(2): 249-279.

[5] YUAN H J, WANG C J. Unique solvability for a class of full non-Newtonian fluids of one dimension with vacuum[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2009, 60: 868-898.

[6] LI Y, XU X J, YUAN H J. Global existence and uniqueness of solution of the initial boundary value problem for a class of non-Newtonian fluids with vacuum[J]. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik, 2008, 59: 457-474.

[7] LI F, GUO Z H, WANG Y X. Local strong solutions to a compressible non-Newtonian fluid with density dependent viscosity[J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2016, 39(10): 2583-2601.

[8] GUO S S, TAN Z. Large-time behaviour of solutions to a class of non-Newtonian compressible fluids[J]. Nonlinear Differential Equations Applications, 2017, 24(3): 030001.

[9] GUO S S,TAN Z. On integrability up to the boundary of the weak solutions of non-Newtonian compressible fluids[J]. Acta Mathematica Scientia,2019,39B(2):420-428.

[10] GALDI G P. An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Volume I:linearized steady problems [M]. New York:Springer-Verlag,1994.

[11] GALDI G P. An introduction to the mathematical theory of the Navier-Stokes equations. Volume II:nonlinear steady problems [M]. New York:Springer-Verlag,1994.

[12] FEIREISL E. On compactness of solution to the compressible isentropic Navier-Stokes equation when the density is not square integrable[J]. Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae,2001,42:83-98.

[13] FEIREISL E,PETZELTOVÁ H. On compactness of solutions to the Navier-Stokes equations of compressible flow[J]. Journal of Differential Equations,2000,163:57-75.

[14] FEIREISL E, PETZELTOVÁ H. Bounded absorbing sets for the Navier-Stokes equations of compressible fluid[J]. Communications in Partial Differential Equations,2001,26:1133-1144.

[15] HOFF D. Spherically symmetric solutions of the Navier-Stokes equations for compressible, isothermal flow with large, discontinuous initial data[J]. Indiana University Mathematics Journal,1992,41:1225-1302.

[16] HOFF D. Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data[J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis,1995,132:1-14.

[17] LIONS P L. Mathematical topics in fluid dynamics. Volume 1:incompressible models[M]. Oxford:Oxford University Press, 1996.

[18] LIONS P L. Mathematical topics in fluid dynamics. Volume 2:compressible models[M]. Oxford:Oxford University Press, 1998.

[19] BOGOVSKIĬ M E. Solutions of some problems of vector analysis,associated with the operators div and grad[EB/OL]. (1980-01-01)[2021-06-28]. https://www.researchgate.net/publication/236848372_Bogovskii_M_E_Solutions_of_some_problems_of_vector_analysis_associated_with_the_operators_rm_div_and_rm_grad_Russian_Theory_of_cubature_formulas_and_the_application_of_functional_analysis_to_problems_.

[20] BORCHERS W,SOHR H. On the equation rot v=g and div u=f with zero boundary conditions[J]. Hokkaido Mathematical Journal,1990,19:67-87.

An Absorbing Set for Weak Solutions of a Class of Non-Newtonian Compressible Fluids

ZHANG Simin, GUO Shanshan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] The existence of absorbing set of weak solutions of a class of non-Newtonian compressible fluids was considered. [**Methods**] The precise energy estimates was established using Hölder inequality、Sobolev embedding theorem and Gronwall lemma. [**Findings**] Firstly, the expression of energy E was given based on the definition of finite energy weak solution. Secondly, the decay estimates were obtained by auxiliary lemmas of the renormalized solution and the bounded liner operator $\mathscr{B}$, moreover, the local bounded of energy was established. Finally, the constant E_∞ was found such that $E[\rho,\boldsymbol{u}](t)\leqslant E_\infty$ a. e. when $t>T$. [**Conclusions**] Under the assumption that external force function was bounded and measurable, the absorbing set of weak solutions of non-Newtonian fluids was established.

Keywords: compressible fluids; finite energy weak solution; non-Newtonian fluids; absorbing set

(责任编辑 许 甲)