

超对称扩展 KdV 方程的超黎曼 theta 函数周期波解及渐近性质*

房春梅¹, 田守富²

(1. 集宁师范学院 数学与统计学院, 内蒙古 乌兰察布 012000; 2. 中国矿业大学 数学学院, 江苏 徐州 221116)

摘要:【目的】研究超对称扩展 KdV 方程的超黎曼 theta 函数周期波解及渐近性质。【方法】基于直接法导出流体力学中扩展 KdV 方程对应的超对称方程。利用 Hirota 双线性方法推出超对称扩展 KdV 方程的双线性形式及超孤波解。利用广义的多维黎曼 theta 函数和超 Hirota 双线性形式, 构造超对称扩展 KdV 方程的超黎曼 theta 函数周期波解。【结果】首先得到了流体力学中扩展 KdV 方程对应的超对称方程以及该超对称方程的双线性形式及超孤波解。其次推出了超对称扩展 KdV 方程的超黎曼 theta 函数周期波解, 最后分析了周期波解的渐近性质。【结论】周期波解在 Grassmann 变量的影响下出现了一个有趣的影响带, 而且关于这个影响带是对称的, 且会随着这个影响带一起衰退。在某些“小振幅”极限下, 超周期波解趋向于超孤波解。

关键词:超对称扩展的 KdV 方程; 超黎曼 theta 函数周期波解; 渐近性质; 超孤波解

中图分类号:O175.29

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2022)05-0099-05

近些年来, 数学物理理论中超对称引起了学者们的极大兴趣。超对称概念最初起源于高能物理领域, 并不断得到发展和推广^[1]。Carstea 于 2000 年定义了超 Hirota 导数并研究了经典的超对称 KdV 方程、超对称 SKR 方程以及超对称 sine-Gordon 方程的双线性形式和 N 孤子解^[2]。目前有很多著名的数学物理方程被推广为对应的超对称方程, 此外在经典的孤子理论中提出的很多方法以及一些性质, 如 Painleve 测试、双哈密顿结构、无穷多对称、Bäcklund 变换、Darboux 变换、双线性方法等也被推广应用到了超对称理论中^[3-10]。文献[11-12]利用双线性方法对几类超对称方程进行了研究, 获得了对应的 Bäcklund 变换、Lax 对、Painleve 性质以及孤子解等。文献[13-15]利用双线性方法与黎曼 theta 函数相结合给出了获得超对称方程周期波解的关键性定理。Ren 等人^[16-17]利用玻色化方法对超对称方程进行了一些研究获得了多种形式的精确解。本文主要研究流体力学中扩展 KdV 方程, 首先构造它对应的超对称方程, 再导出超对称方程的双线性形式, 最后构造它的周期波解, 并进行渐近分析。

1 $N=1$ 超对称扩展 KdV 方程及超孤波解

流体力学中扩展的 KdV(eKdV)方程为^[18]

$$u_t + u_x + a(6uu_x + u_{xxx}) + b(u_{xxxx} + 15uu_{xxx} + 15u_x u_{xx} + 45u^2 u_x) = 0, \quad (1)$$

其中 a, b 是任意常数。当 a, b 取不同值时, 方程(1)可以变为不同的方程。

为获得方程(1)对应的超对称方程, 先对方程(1)中的变量进行扩展从而得到超对称方程。对变量 x 进行扩展成为 (x, θ) , 其中 θ 是 Grassmann 变量, 即用 (x, t, θ) 代替经典时空 (x, t) , 将原来的普通场 $u(x, t)$ 由超场 $\Phi(x, t, \theta)$ 替代, 而对应的超导数为 $D = \partial_\theta + \theta \partial_x$, 费米超场为 $\Phi(x, t, \theta) = \xi(x, t) + \theta u(x, t)$, 其中 Grassmann 变量 θ 满足 $\theta^2 = 0$, $\xi(x, t)$ 为费米变量, $u(x, t)$ 为玻色变量。

为得到方程(1)的超对称方程, 将(1)式中的每一项乘以 θ , 则有如下的由费米超场 Φ 表示的对应项:

$$\begin{aligned} u_t &\rightarrow \Phi_t, \quad u_x \rightarrow \Phi_x, \quad 6uu_x + u_{xxx} \rightarrow \Phi_{xxx} + 3(D\Phi_x)\Phi + 3(D\Phi)\Phi_x, \quad u_{5x} \rightarrow D^{10}\Phi, \\ 15uu_{xxx} + 15u_x u_{xx} + 45u^2 u_x &\rightarrow D^2(10(D\Phi)D^4\Phi + 5(D^5\Phi)\Phi + 15(D\Phi)^2\Phi), \end{aligned}$$

可以得到 $N=1$ 超对称扩展 KdV 方程为

* 收稿日期:2021-01-19 修回日期:2022-08-22 网络出版时间:2022-09-19 14:21

资助项目:国家自然科学基金(No. 11975306);内蒙古自治区高等学校科学研究项目(No. NJZY20248;No. NJZY17373;No. NJZY18234)

第一作者简介:房春梅,女,讲师,研究方向为非线性数学物理与可积系统及应用,E-mail:dllgfcmmxl@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220916.1805.011.html

$$\Phi_t + \Phi_x + a(\Phi_{xxx} + 3(D\Phi_x)\Phi + 3(D\Phi)\Phi_x) + bD^2(10(D\Phi)D^4\Phi + 5(D^5\Phi)\Phi + 15(D\Phi)^2\Phi) + bD^{10}\Phi = 0. \quad (2)$$

接下来获得方程(2)的 Hirota 双线性形式并求它的超孤波解。对(2)式中的每一项关于 x 积分一次,并取积分常数为“0”,可得:

$$\partial^{-1}\{\Phi_t + \Phi_x + a(\Phi_{xxx} + 3(D\Phi_x)\Phi + 3(D\Phi)\Phi_x) + bD^2(10(D\Phi)D^4\Phi + 5(D^5\Phi)\Phi + 15(D\Phi)^2\Phi + bD^8\Phi)\} = 0, \quad (3)$$

其中 $\partial^{-1} = \int dx$ 。

对方程(3)考虑如下的变量代换:

$$\Phi(x, t, \theta) = 2D^3 \ln f(x, t, \theta), \quad (4)$$

将(4)式代入(3)式中,并结合下面的超 Hirota 双线性算子:

$$SD_t^m D_x^n f \cdot g = (D_{\theta_1} - D_{\theta_2}) \left(\frac{\partial}{\partial t_1} - \frac{\partial}{\partial t_2} \right)^m \left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2} \right)^n f(x_1, t_1, \theta_1) \cdot g(x_2, t_2, \theta_2) \Big|_{\substack{x_1=x_2=x, \\ t_1=t_2=t, \\ \theta_1=\theta_2=\theta}}$$

可以得到:

$$\begin{aligned} \partial^{-1}\Phi_t &= 2\left(\frac{Df}{f}\right) = 2\left[\frac{(Df_t) \cdot f - (Df) \cdot f_t}{f^2}\right] = \frac{SD_t f \cdot f}{f^2}, \partial^{-1}\Phi_x = \Phi = \frac{SD_x f \cdot f}{f^2}, \\ \partial^{-1}[\Phi_{xxx} + 3((D\Phi_x)\Phi + (D\Phi)\Phi_x)] &= \Phi_{xx} + 3(D\Phi)\Phi = \\ \frac{2Df_{xxx} \cdot f - 6Df_{xx} \cdot f_x + 6Df_{xx} \cdot f_x + 6Df_x \cdot f_{xx} - 2Df \cdot f_{xxx}}{f^2} &= \frac{SD_x^3 f \cdot f}{f^2}, \\ 10D\Phi \cdot D^4\Phi + 5D^5\Phi \cdot \Phi + 15(D\Phi)^2\Phi + D^8\Phi &= \\ \frac{2Df_{5x} \cdot f - 10Df_{4x} \cdot f_x + 20f_{2x} \cdot Df_{3x} - 20Df_{2x} \cdot f_{3x} + 10Df_x \cdot f_{4x} - 2Df \cdot f_{5x}}{f^2} &= \frac{SD_x^5 f \cdot f}{f^2}. \end{aligned}$$

因此可以得出超对称扩展 KdV 方程的双线性形式为:

$$(SD_t + SD_x + aSD_x^3 + bSD_x^5 + c)f \cdot f = 0, \quad (5)$$

其中 $c = c(\theta, t)$ 是积分常数。

下面构造超对称方程(2)的超孤波解,为简单起见取 $c = 0$ 。假设 f 可以由任意参数 ϵ 展开成如下级数形式:

$$f = 1 + f^{(1)}\epsilon + f^{(2)}\epsilon^2 + f^{(3)}\epsilon^3 + \dots \quad (6)$$

将(6)式代入(5)式中,并将 ϵ 的同次幂项合并可得

$$D_x(\partial_t + \partial_x + a\partial_x^3 + b\partial_x^5)f^{(1)} = 0, \quad (7)$$

$$2D_x(\partial_t + \partial_x + a\partial_x^3 + b\partial_x^5)f^{(2)} = -S_x(D_t + D_x + aD_x^3 + bD_x^5)f^{(1)} \cdot f^{(1)}, \quad (8)$$

.....

为获得单孤子解,引入

$$f^{(1)} = e^{\mu x + \gamma t + \nu \theta + x^0}, \quad (9)$$

其中 μ, γ, ν 和 x^0 是常数。将(9)式代入(7)式中可得 $(\nu + \mu + a\mu^3 + b\mu^5) = 0$ 。从(8)式容易看出,该式右端项为 0,因此可以取 $f^{(2)} = 0, f^{(3)} = 0, \dots$,则(6)式被截断为下面的有限项:

$$f = 1 + e^\eta, \quad (10)$$

则可以得到 1-超孤波解为:

$$\Phi = 2D^3 \ln f = 2D^3 \ln(1 + e^\eta), \quad (11)$$

其中: $\eta = \mu x - (b\mu^5 + a\mu^3 + \mu)t + \nu \theta + x^0, \mu, \nu, x^0$ 为自由的参数。

2 N=1 超对称扩展 KdV 方程的超黎曼 theta 函数周期波解

本节介绍多维超黎曼 theta 函数,并获得超对称扩展 KdV 方程的超黎曼 theta 函数周期波解,最后对周期波解进行渐近性分析。考虑如下的超黎曼 theta 函数^[15]:

$$\vartheta(\xi, \epsilon, s | \tau) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^N} e^{2\pi i \langle \xi + \epsilon, n + s \rangle + \pi i \langle \tau(n+s), n+s \rangle}, \quad (12)$$

其中 $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_N)^T \in \mathbf{Z}^N$ 是整数值向量, $\boldsymbol{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N)^T$, $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \dots, s_N)^T$ 为复数值向量, $-i\boldsymbol{\tau} = -i(\tau_{ij})$ 是对称、正定实值的 $N \times N$ 矩阵。复相变量为 $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T$, $\xi_j = k_j x_1 + l_j x_2 + \dots + \rho_j x_N + \omega_j t + \alpha_j \sigma_1 \theta_1 + \beta_j \sigma_2 \theta_2 + \dots + \gamma_j \sigma_M \theta_M + \delta_j$, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_M) \in \Lambda_1$, $k_i, l_i, \dots, \rho_i, \omega_i, \delta_i \in \Lambda_0$, $\alpha_i, \beta_i, \dots, \gamma_i \in C$, 其中 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ 是 Grassmann 变量, Λ_0, Λ_1 是 Banach 超代数空间的子空间。

为获得超对称扩展 KdV 方程的 1-周期波解, 考虑当 $N=1, s=\varepsilon=0$ 时的黎曼 theta 函数:

$$f(x, t, \theta) = \vartheta(\boldsymbol{\xi}, 0, 0 | \boldsymbol{\tau}) = \vartheta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}} e^{2\pi i \mathbf{n} \boldsymbol{\xi} + \pi i \mathbf{n} \boldsymbol{\tau}}, \quad (13)$$

其中相变量 $\boldsymbol{\xi} = kx + \omega t + \alpha\theta + \delta$, 且参数 $\text{Im}\boldsymbol{\tau} > 0$ 。

由文献[15]中的定理 1 可知, 若(13)式是双线性方程(5)的 1-黎曼 theta 函数解, 则参数 $k, \omega, \alpha, \sigma$ 和 δ 应满足下面的方程组

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}} \{-16\pi^2 n^2 (\alpha\sigma + \theta k) \omega - 16\pi^2 n^2 (\alpha\sigma + \theta k) k + 256a\pi^4 n^4 (\alpha\sigma + \theta k) k^3 + 16384b\pi^6 n^6 (\alpha\sigma + \theta k) k^5 + c\} e^{2\pi i \mathbf{n} \boldsymbol{\xi}} = 0, \quad (14)$$

$$\sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}} \{-4\pi^2 (2n-1)^2 (\alpha\sigma + \theta k) \omega - 4\pi^2 (2n-1)^2 (\alpha\sigma + \theta k) k + 16a\pi^4 (2n-1)^4 (\alpha\sigma + \theta k) k^3 + 64b\pi^6 (2n-1)^6 (\alpha\sigma + \theta k) k^5 + c\} e^{2\pi i (n-\frac{1}{2}) \boldsymbol{\xi}} = 0. \quad (15)$$

引入以下记号

$$\begin{aligned} \wp &= e^{\frac{\pi i}{2}}, \quad \vartheta_1(\boldsymbol{\xi}, \wp) = \vartheta(2\boldsymbol{\xi}, 0, 0 | 2\boldsymbol{\tau}) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}} \wp^{4n^2} e^{4\pi i \mathbf{n} \boldsymbol{\xi}}, \\ \vartheta_2(\boldsymbol{\xi}, \wp) &= \vartheta\left(2\boldsymbol{\xi}, 0, -\frac{1}{2} \middle| 2\boldsymbol{\tau}\right) = \sum_{\mathbf{n} \in \mathbf{Z}} \wp^{(2n-1)^2} e^{4\pi i (2n-1) \boldsymbol{\xi}}. \end{aligned} \quad (16)$$

设 $\vartheta'_i = \frac{d\vartheta_i(\boldsymbol{\xi}, \wp)}{d\boldsymbol{\xi}} \Big|_{\boldsymbol{\xi}=0}$, $i=1, 2$, 则可以将(14), (15)式转化为关于变量 ω 和积分常量 c 的线性系统:

$$(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_1'' \omega + (\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_1'' k + a(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_1^{(4)} k^3 + b(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_1^{(6)} k^5 + \vartheta_1 c = 0, \quad (17)$$

$$(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_2'' \omega + (\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_2'' k + a(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_2^{(4)} k^3 + b(\alpha\sigma + \theta k) \vartheta_2^{(6)} k^5 + \vartheta_2 c = 0. \quad (18)$$

从(17), (18)式不难得出 ω 和 c 为:

$$\omega = \frac{(\vartheta_1 \vartheta_2'' - \vartheta_2 \vartheta_1'') k + a k^3 (\vartheta_1 \vartheta_2^{(4)} - \vartheta_2 \vartheta_1^{(4)}) + b k^5 (\vartheta_1 \vartheta_2^{(6)} - \vartheta_2 \vartheta_1^{(6)})}{\vartheta_1'' \vartheta_2 - \vartheta_1 \vartheta_2''}, \quad (19)$$

$$c = \frac{-(\alpha\sigma + \theta k) [(\vartheta_1'' \vartheta_2^{(4)} - \vartheta_2'' \vartheta_1^{(4)}) a k^3 + b k^5 (\vartheta_1'' \vartheta_2^{(6)} - \vartheta_2'' \vartheta_1^{(6)})]}{\vartheta_1'' \vartheta_2 - \vartheta_1 \vartheta_2''}, \quad (20)$$

因此可以得到方程(2)的 1-超周期波解为

$$u = 2D^3 \ln \vartheta(\boldsymbol{\xi}, 0, 0 | \boldsymbol{\tau}), \quad (21)$$

其中 ω 和 c 由(19), (20)式给出, 参数 k, α, τ, δ 是自由的参数。

封二彩图 1 给出了 1-超周期波解(21)在参数 $a=1, b=2, k=1, \tau=i, \delta=0, \varepsilon=1, \sigma=0.1$ 下的传播图。其中图 1a 为透视图, 图 1b 为俯视图, 图 1c, d, e 分别为关于 θ, t, x 方向的传播图。封二彩图 2 给出了 1-超周期波解(21)的纯玻色子情形在参数 $a=1, b=2, k=1, \tau=i, \delta=0, \varepsilon=1, \sigma=0.1, \theta=10^{-7}$ 的传播图。其中图 2a 为透视图, 图 2b 为俯视图, 图 2c, d 分别为关于 x, t 方向的传播图。

3 1-超周期波解的特征和渐近性质

从封二彩图 1 和封二彩图 2 可以看出 1-超周期波解具有如下的特征:

1) 1-超周期波解(21)是一维的, 在相位变量 $\boldsymbol{\xi}$ 中有两个基本周期 1 和 $\boldsymbol{\tau}$ 。1-超周期波解可以看做是相隔一个周期的相互重叠的孤立波的平行叠加。与纯玻色子情形不同, 在 Grassmann 变量存在时, 1-超周期波中间位置存在一个影响带, 它关于这个影响带是对称的, 且会随这个影响带一起衰退(封二彩图 1a, b)。波的传播沿 x 轴和 t 轴是周期性的, 而在 θ 方向不是周期性的(封二彩图 1c, d, e)。

2) 当 Grassmann 变量 θ 变小时, 1-超周期波解将退化为纯玻色子周期波解(参见封二彩图 2a, b), 且波的传播沿 x 轴和 t 轴是周期性的(封二彩图 2c, d)。

下面进一步分析 1-超周期波解(21)的渐近性质,即 1-超周期波解(21)以及 1-超孤波解(11)之间的关系由下面的定理 1 给出。

定理 1 设 $(\omega, c)^T$ 是(17),(18)式的解,则对于 1-超周期波解(21),假设:

$$k = \frac{\mu}{2\pi i}, \alpha = \frac{\nu}{2\pi i}, \delta = \frac{x^0 - \pi i \tau}{2\pi i}, \quad (22)$$

其中 μ, ν 和 x^0 由(13)式中给出,则当 $\wp \rightarrow 0$ 时,有如下的渐近性质:

$$c \rightarrow 0, 2\pi i \xi + \pi i \tau \rightarrow \eta = \mu x - (b\mu^5 + a\mu^3 + \mu)t + \nu \sigma \theta + x^0, \vartheta(\xi, 0, 0 | \tau) \rightarrow 1 + e^\eta, \quad (23)$$

证明 由于(17),(18)式中的系数是关于 \wp 的级数,则它的解 (ω, τ) 也应该是关于 \wp 的级数。将(17),(18)方程中的黎曼 theta 函数相关系数进行展开可得:

$$\begin{aligned} \vartheta_1 &= 1 + 2\wp^4 + \dots, \quad \vartheta_1'' = -32\pi^2 \wp^4 + \dots \\ \vartheta_1^{(4)} &= 512\pi^4 \wp^4 + \dots, \quad \vartheta_2 = 2\wp + 2\wp^9 + \dots \\ \vartheta_2'' &= -8\pi^2 \wp - 72\pi^2 \wp^9 + \dots, \quad \vartheta_2^{(4)} = 32\pi^4 \wp + 2592\pi^4 \wp^9 + \dots \\ \vartheta_1^{(6)} &= -8192\pi^6 \wp^4 + \dots, \quad \vartheta_2^{(6)} = -128\pi^6 \wp + \dots \end{aligned} \quad (24)$$

假定 ω 和 c 具有如下的展开式:

$$\omega = \omega_0 + \omega_1 \wp + \omega_2 \wp^2 + \dots = \omega_0 + o(\wp), \quad (25)$$

$$c = c_0 + c_1 \wp + c_2 \wp^2 + \dots = c_0 + o(\wp). \quad (26)$$

将(24)~(26)式分别代入(17),(18)式,并将 $\wp \rightarrow 0$ 时可以得到如下关系式:

$$-8\pi^2 \omega_0 - 8\pi^2 k + 32\pi^4 a k^3 - 128\pi^6 b k^5 + 2c_0 = 0, \quad c_0 = 0. \quad (27)$$

因此得到如下解:

$$\omega_0 = -k + 4\pi^2 a k^3 - 16\pi^4 b k^5, \quad c_0 = 0. \quad (28)$$

结合(22)和(28)式,当 $\wp \rightarrow 0$ 时可得:

$$c \rightarrow 0, \quad 2\pi i \omega \rightarrow 2\pi i(-k + 4\pi^2 a k^3 - 16\pi^4 b k^5) \rightarrow -(\mu + a\mu^3 + b\mu^5), \quad (29)$$

当 $\wp \rightarrow 0$ 时有:

$$\hat{\xi} = 2\pi i \xi + \pi i \tau = \mu x + 2\pi i \omega t + \nu \sigma \theta + x^0 \rightarrow \mu x + (\mu + a\mu^3 + b\mu^5)t + \nu \sigma \theta + x^0 = \eta. \quad (30)$$

将 $\vartheta(\xi, \tau)$ 进行展开可得:

$$\vartheta(\xi, \tau) = 1 + \wp^2 (e^{2\pi i \xi} + e^{-2\pi i \xi}) + \wp^8 (e^{4\pi i \xi} + e^{-4\pi i \xi}) + \dots \quad (31)$$

利用(22),(28)以及(30)式,当 $\wp \rightarrow 0$ 时有:

$$\vartheta(\xi, \tau) = 1 + e^\xi + (e^{-\xi} + e^{2\xi})\wp^4 + (e^{-2\xi} + e^{3\xi})\wp^{12} + \dots \rightarrow 1 + e^\xi \rightarrow 1 + e^\eta, \quad (32)$$

因此可以得出:当 $\wp \rightarrow 0$ 时 1-超周期波解会退化为 1-超孤子解。

证毕

4 结论

主要利用多维的黎曼 theta 函数和 Hirota 双线性方法构造了超对称扩展 KdV 方程的超黎曼 theta 函数周期波解。通过 Maple 软件对 1-超黎曼 theta 函数周期波解进行了分析。从封二彩图 1 可以发现超黎曼 theta 函数周期波解与传统的周期波解之间的不同。封二彩图 2 刻画了纯玻色子情形下的波的传播图。最后又证明了在某些“小振幅”极限下,超周期波解与超孤波解之间的渐近关系。

参考文献:

- [1] WESS J, ZUMINO B. Supergauge transformations in 4 dimensions[J]. Nuclear Physics B, 1974, 70: 39-50.
- [2] CARSTEA A S. Extension of the bilinear formalism to supersymmetric KdV-type equation[J]. Nonlinearity, 2000, 13: 1645-1656.
- [3] MIRZA A, HASSAN M U. Bilinearization and soliton solutions of the supersymmetric coupled KdV equation[J]. Theoretical and Mathematical Physics, 2020, 202(1): 11-16.
- [4] CHEN L, DENG S F. Darboux transformation for the supersymmetric nonisospectral KdV equation[J]. Modern Physics Letters B, 2021, 35(15): 2150255.
- [5] ZHANG S, YOU C H. Inverse scattering transform for a supersymmetric Korteweg-de Vries equation[J]. Thermal Science,

- 2019, 23(3): S677-S684.
- [6] MAO H, LIU Q P, XUE L L. Supersymmetric Sawada-Kotera equation; Bäcklund-Darboux transformations and applications[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2018, 25: 375-386.
- [7] MIRZA A, HASSAN M. Integrability properties of a supersymmetric coupled dispersionless integrable system[J]. Theoretical and Mathematical Physics, 2018, 195: 825-833.
- [8] CEN F J, ZHAO Y D, FANG S Y, et al. Painleve integrability of the supersymmetric Ito equation[J]. Chinese Physics B, 2019, 28(9): 090201.
- [9] DONG C, DENG S F. The quasi-periodic solutions for the supersymmetric variable-coefficient KdV equation[J]. Modern Physics Letters B, 2020, 34: 162050171.
- [10] 毛辉. 超对称 Manin-Radul KdV 方程的贝克隆变换(英文)[J]. 南宁师范大学学报(自然科学版), 2019, 36(4): 12-23.
MAO H. Bäcklund transformation for the Manin-Radul supersymmetric variable-coefficient KdV equation[J]. Journal of Nanning Normal University(Natural Science), 2019, 36(4): 12-23.
- [11] LIU Q P, HU X B, ZHANG M X. Supersymmetric modified Korteweg-de Vries equation; bilinear approach[J]. Nonlinearity, 2005, 18: 1597-1603.
- [12] ZHANG M X, LIU Q P. A supersymmetric second modified KdV equation[J]. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 2007, 14(2): 230-237.
- [13] LUO L, FAN E G. Quasi-periodic waves of the $N=1$ supersymmetric modified Korteweg-de Vries equation[J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74: 666-675.
- [14] FAN E G. New bilinear Bäcklund transformation and Lax pair for the supersymmetric two-Boson equation[J]. Studies in Applied Mathematics, 2011, 127: 284-301.
- [15] TIAN S F, ZHANG H Q. Super Riemann theta function periodic wave solutions and rational characteristics for a supersymmetric KdV-Burgers equation[J]. Theoretical and Mathematical Physics, 2012, 170(3): 287-314.
- [16] REN B, GAO X N, YU J, et al. Exact solutions of supersymmetric Burgers equation with bosonization procedure[J]. Open Mathematics, 2015, 13: 500-509.
- [17] REN B, LOU S Y. A super mKdV equation; bosonization, Painleve property and exact solutions[J]. Communications in Theoretical Physics, 2018, 69(4): 343-346.
- [18] XU M J, TIAN S F, TU J M, et al. Quasi-periodic wave solutions and asymptotic properties to an extended Korteweg-de Vries equation from fluid dynamics[J]. Modern Physics Letters B, 2016, 30: 1550271.

Super Riemann Theta Function Periodic Wave Solutions and Asymptotic Properties of the Supersymmetric Extended KdV Equation

FANG Chunmei¹, TIAN Shoufu²

(1. Department of Mathematics and Statistics, Jining Normal University, Ulanqab Inner Mongolia 012000;

2. School of Mathematics, China University of Mining and Technology, Xuzhou Jiangsu 221116, China)

Abstract: [Purposes] The super Riemann theta function periodic wave solutions and asymptotic properties of the supersymmetric extended KdV equation are studied. [Methods] The supersymmetric equation corresponding to the extended KdV equation in fluid mechanics is derived based on the direct method. The bilinear form and super solitary wave solution of supersymmetric extended KdV equation are derived by using Hirota bilinear method. Using generalized multidimensional Riemann theta function and super Hirota bilinear form, the super Riemann theta function periodic wave solution of supersymmetric extended KdV equation is constructed. [Findings] Firstly, the supersymmetric equation corresponding to the extended KdV equation in fluid mechanics, and its bilinear form and super solitary wave solution are obtained. Secondly, the periodic wave solution of super Riemann theta function of supersymmetric extended KdV equation is derived. Finally, the asymptotic properties of the periodic wave solution are analyzed. [Conclusions] Under the influence of Grassmann variable, an interesting influence band appears in the periodic wave solution, and the influence band is symmetrical and decays with it. Under some “small amplitude” limits, the super periodic wave solution tends to the super solitary wave solution.

Keywords: supersymmetric extended KdV equation; super Riemann theta function periodic wave solution; asymptotic properties; super solitary wave solution

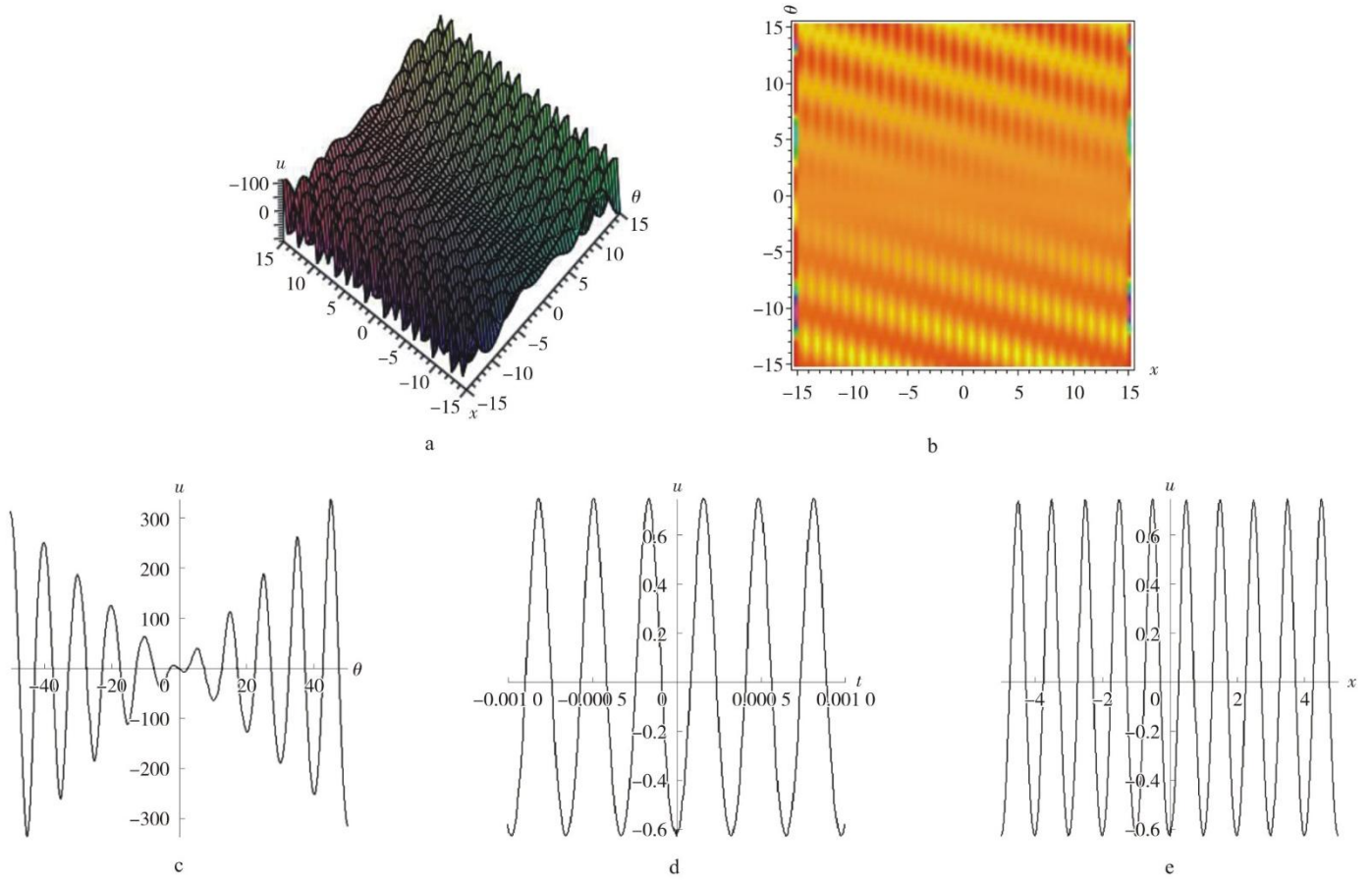


图1 1-超周期波解传播图
Fig. 1 Propagation diagram of super periodic wave solution

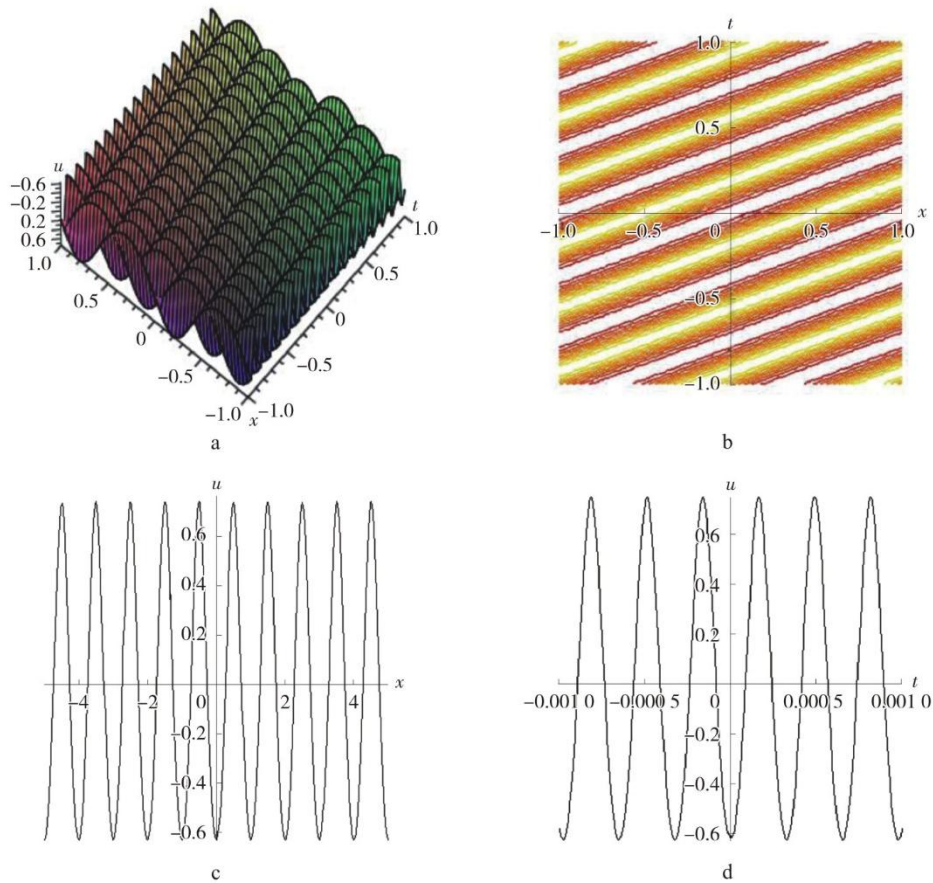


图2 1-超周期波解纯玻色子情形传播图
Fig. 2 Propagation diagram of 1-super periodic wave solution in pure boson case