2022 年 9 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Sep. 2022
第 39 卷 第 5 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 39 No. 5

DOI:10.11721/cqnuj20220415

关于超空间非自治动力系统混沌的研究*

冷震北[1],罗 飞[2],高 瑾[3]

(1. 重庆对外经贸学院 数学与计算机学院,重庆 合川 401520;2. 四川轻化工大学 数学与统计学院,四川 自贡 643000;3. 重庆师范大学 数学学院,重庆 401331)

摘要:【目的】研究超空间非自治动力系统的混沌性质。【方法】通过一致收敛方法对非自治系统混沌性质进行研究。【结果】得到对任意 $k\geqslant 2$,序列映射 $\{\overline{f}_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $\overline{f}^k$。在此基础上,讨论了超空间非自治动力系统 Li-Yorke 混沌和初值敏感性的乘积系统,对任意正整数 k:1) 若 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$ 和 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty}^{[k]})$ 是 Li-Yorke 混沌,则 $(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}^{[k]}\times g_{1,\infty}^{[k]}})$ 是 Li-Yorke 混沌。2) $(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}^{[k]}\times g_{1,\infty}^{[k]}})$ 具有初值依赖敏感性当且仅当 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$ 或 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty}^{[k]})$ 具有初值依赖敏感性。【结论】通过对超空间非自治系统的研究,进一步丰富了超空间中非自治系统混沌性质。

关键词:超空间;非自治动力系统;Li-Yorke 混沌;Li-Yorke 初值敏感

中图分类号:O189.1 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2022)05-0104-06

1971 年,Ruelle[1]首次严格地给出了初值敏感依赖性的定义,该定义受到人们的关注。1975 年,李天岩等人[2]首次用严格数学语言给出混沌定义。1989 年 Devaney[3]提出了 Devaney 混沌的定义,突出了初值敏感依赖性在描述自治系统复杂性时的意义。此后,诸如 Li-Yorke 初值敏感依赖性[4]、n 初值敏感依赖性[5]、连接初值敏感依赖性[6]等概念也相继被提出,它们都在不同程度上描述着自治系统复杂程度。1994 年,Schweizer 等人[7]提出了 S-S 分布混沌。1984 年,Klein[8]提出了 Vietoris 拓扑的定义,此拓扑空间成为超空间,从此很多学者开始研究超空间。1996 年,Kolyada 等人[9]提出了非自治动力系统。2011 年,CÁNDVAS 等人[10]给出了非自治系统 Li-Yorke 混纯的定义;2012 年,Dvorakova[11]主要讨论了非自治系统分布混纯和自治系统分布混纯之间的联系;Balibrea 等人[12]研究了紧度量空间上的非自治系统 Li-Yorke 混纯性质;2006 年,Tian 等人[13]在非自治动力系统上给出了初值敏感依赖性的定义;2013 年,Wu 等人[14]讨论非自治动力系统初值敏感依赖相关遗传性质时,证明了当紧度量空间非自治动力系统映射序列一致收敛时,若 $f_{1,\infty}$ 具有初值敏感依赖性,则对任意的正整数 k,$f_{1,\infty}^{[k]}$ 也具有初值敏感依赖性。探讨非自治系统与超空间是学界的一个热点。2014 年,杨承宇等人[15]研究了非自治动力系统敏感依赖性及对应的超空间非自治动力系统敏感依赖性之间的蕴含关系,得到了一个使得(超空间)非自治动力系统敏感依赖性在任意次迭代系统上得以保持的充分条件。在动力系统中,乘积性也是一种系统。2008 年,宋晓倩等人[16]证明了若自治动力系统和是初值敏感依赖的,则乘积系统也是初值敏感依赖的。2011 年,吴新星等人[17]讨论了关于两种混沌映射的有限乘积性质。2012 年,杨智等人[18]研究了紧致系统中 Li-Yorke 敏感的乘积性和复合性,证明了无限乘积或者有限乘积映射是 Li-Yorke 敏感的当且仅当存在某个因子映射是 Li-Yorke 敏感的。2012 年,宋晓倩[19]给出了非自治动力系统中初值敏感依赖的乘积性质,证明了若非自治动力系统和是初值敏感依赖的,则乘积系统也是初值敏感依赖的。2016 年,但建军等人[20]证明若 f 是等度连续的且是 Li-Yorke 混沌的,则对 $n\in\mathbf{N}$,f_n 是 Li-Yorke 混沌的。研究了超空间复合系统的分布混沌性,得到了和 Li-Yorke 混沌相似的结论。此外,文献[21-24]主要研究了动力系统混沌性质及跟踪性。

在上述研究的基础上,本文主要讨论超空间非自治混沌动力系统,给出当序列 $\overline{f}_{1,\infty}$ 一致收敛到映射 $\overline{f}$,序列映射 $\{\overline{f}_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ 一致收敛于 $\overline{f}^k$,对任意的 $k\geqslant 2$ 成立。并且讨论了超空间非自治动力系统 Li-Yorke 混沌和初值敏感的复合乘积。

* **收稿日期:**2021-04-02 **修回日期:**2021-12-20 **网络出版时间:**2022-07-04 14:02

资助项目:国家自然科学基金(No. 11471061);桥梁无损检测与工程计算四川省高校重点实验室项目(No. 2022QZJD2;No. 2021QYJ07)

第一作者简介:冷震北,男,讲师,研究方向为数学教育与混沌系统,E-mail:32116710@qq.com;**通信作者:**罗飞,男,博士研究生,E-mail:395279493@qq.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220701.1541.006.html

1 预备知识

1.1 超空间动力系统

设(X,d)是度量空间，$f:X\to X$ 是连续映射。$\kappa(X)$表示 X 上的所有非空紧子集的集合，$G_1,G_2,\cdots,G_n$ 是 X 的 n 个非空开集。令 $\Omega(G_1,G_2,\cdots,G_n)=\{F\in\kappa(X):F\subset\bigcup_{i=1}^{\infty}G_i,F\cap G_i\neq\varnothing,1\leqslant i\leqslant n\}$，则所有形如 $G_1,G_2,\cdots,G_n$ 的集合构成了$\kappa(X)$空间的某个拓扑的基，把由这个基生成的拓扑称为$\kappa(X)$上的 Vietoris 拓扑，所得拓扑空间称为(由 X 生成的)超空间。相应地，也称 X 为基空间。在 $\kappa(X)$上定义 Hausdorff 度量 $d_{\mathrm{H}}(A,B)=\max\{\sup_{a\in A}d(a,B),\sup_{b\in B}d(A,b)\}$，易知 $d_{\mathrm{H}}(A,B)$是$\kappa(X)$的以 Hausdorff 度量 d_{H} 诱导的拓扑空间。设 $f:X\to X$ 连续，令 $\overline{f}:\kappa(X)\to\kappa(X)$，定义 $\overline{f}(A)=\{f(a):a\in A\subset X\}$，显然 $\overline{f}:\kappa(X)\to\kappa(X)$是连续的。

1.2 非自治动力系统

设(X,d)是一个度量空间，$f_i:X\to X,i\in\mathbf{N}^+$ 为连续自映射，记序列$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}=f_{1,\infty}$。对任意的 $x\in X$，点 x 的轨迹由序列 $x,f_1(x),f_1^2(x),\cdots,f_1^n(x),\cdots$表示，记作 $\mathrm{tra}(x)$，其中 $f_1^n=f_n\circ f_{n-1}\circ\cdots\circ f_2\circ f_1$。

对任意的 $f_i\in f_{1,\infty}$，当 $n=0$ 时，有 $f_i^0=id$。此时 $f_{1,\infty}$ 为 X 上的一个非自治动力系统，记为$(X,f_{1,\infty})$，记 $\mathrm{tra}(x)$构成的集合为 $\mathrm{orb}(x)$，称为$(X,f_{1,\infty})$的轨道。对任意 $f_i\in f_{1,\infty}$，任意的正整数 n，记：

$$f_i^n=f_{i+n-1}\circ f_{i+n-2}\circ\cdots\circ f_{i+1}\circ f_i。$$

设$(X,f_{1,\infty})$是一个非自治动力系统，对任意的正整数 k，记映射序列$(f_1^k,f_{k+1}^{2k},\cdots,f_{km+1}^{(m+1)k},\cdots)=f_{1,\infty}^{[k]}$，此时$(X,f_{1,\infty}^{[k]})$也构成了一个非自治动力系统，称原系统的 k 次迭代系统。同理，对于超空间系统$(\kappa(X),d_{\mathrm{H}},\overline{f}_{1,\infty})$也存在对应的 k 次迭代系统$(\kappa(X),d_{\mathrm{H}},\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$。

1.3 复合乘积动力系统

两个超空间非自治动力系统 $\overline{f}_{1,\infty}:\kappa(X)\to\kappa(X)$和 $\overline{g}_{1,\infty}:\kappa(Y)\to\kappa(Y)$定义在紧致度量空间 $\kappa(X)$和 $\kappa(Y)$，度量分别为 d_{H_1} 和 d_{H_2}。令 $\overline{f_{1,\infty}\times g_{1,\infty}}:\kappa(X\times Y)\to\kappa(X\times Y)$，定义 $\overline{f_{1,\infty}\times g_{1,\infty}}(A\times B)=(\overline{f}_{1,\infty}(A),\overline{g}_{1,\infty}(B))$，其中$(A,B)\in\kappa(X\times Y)$。$\kappa(X\times Y)$的度量 d_{H}，定义 $d_{\mathrm{H}}((A_1,B_1),(A_2,B_2))=\max(d_{\mathrm{H}_1}(A_1,A_2),d_{\mathrm{H}_2}(B_1,B_2))$，其中$(A_1,B_1)(A_2,B_2)\in\kappa(X\times Y)$。关于基空间复合乘积度量的定义详见文献[19]。

1.4 基本概念

定义 1　设$(X,f_{1,\infty})$是一个非自治动力系统，若对任意的$(x,y)\in X\times X$，有：

$$\liminf_{n\to+\infty}d(f_1^n(x),f_1^n(y))=0,\ \limsup_{n\to+\infty}d(f_1^n(x),f_1^n(y))\geqslant\delta。$$

则：1) 若存在 $\delta>0$，则(x,y)为 Li-Yorke-δ 对；2) 存在一个子集 $\Gamma\in X$ 使得对任意的 $x,y\in\Gamma,x\neq y$，则称 Γ 是 Li-Yorke 混沌集；3) 若 X 包含一个不可数的 Li-Yorke 混沌集，则系统(X,f)是一个 Li-Yorke 混沌。

运算中将 Li-Yorke 简记为 LY，由定义 1 可知 $\mathrm{LY}(f_{1,\infty})=\bigcup_{\delta>0}\mathrm{LY}(f_{1,\infty},\delta)$。

定义 2　设$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$是超空间非自治动力系统，如果对任意的 $A,B\in\kappa(X),\delta>0$，有：

$$\liminf_{n\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))=0,\ \limsup_{n\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))\geqslant\delta。$$

则：1) 若存在 $\delta>0$，则(A,B)为 Li-Yorke-δ 对；2) 存在一个子集 $\Gamma\in\kappa(X)$使得对任意的 $A,B\in\Gamma,A\neq B$，则称 Γ 是 Li-Yorke 混沌集；3) 若 $\kappa(X)$包含一个不可数的 Li-Yorke 混沌集，则称$(\kappa(X),\overline{f})$是一个 Li-Yorke 混沌。

由定义 2 可知 $\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty})=\bigcup_{\delta>0}\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty},\delta)$。

定义 3　设$(X,f_{1,\infty})$是非自治动力系统，存在 $\varepsilon>0$，对任意 $x\in X$ 和 $\delta>0$，存在 y 使得 $d(x,y)<\delta$，当 $n\in\mathbf{N}$，有 $d(f_1^n(x),f_1^n(y))>\varepsilon$，则称 $f_{1,\infty}$具有(对初值)敏感性。

定义 4　设$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$是超空间非自治动力系统，存在 $\varepsilon>0$ 对任意 $A\in\kappa(X)$和 $\delta>0$，存在 $B\in\kappa(X)$使得 $d_{\mathrm{H}}(A,B)<\delta$，当 $n\in\mathbf{N}$，有 $d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))>\varepsilon$，则称 $\overline{f}_{1,\infty}$具有(对初值)敏感性。

定义 5　设$(X,f_{1,\infty})$是非自治动力系统，存在 $\varepsilon>0$，满足对 $x\in X$ 和任意 $\delta>0$，存在 $y\in X,d(x,y)<\delta$，使得$(x,y)\in\mathrm{LY}(f_{1,\infty},\varepsilon)$，则 f 是 LY 初值敏感。

定义 6　$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$是超空间非自治动力系统，存在 $\varepsilon>0$ 满足对 $A\in\kappa(X)$和任意 $\delta>0$，存在 $B\in\kappa(X)$，$d_{\mathrm{H}}(A,B)<\delta$，使得$(A,B)\in\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty},\varepsilon)$，则 $\overline{f}$ 是 LY 初值敏感。

2 主要结果

定理 1 设$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$是紧致度量空间$\kappa(X)$的超空间非自治动力系统,其中映射序列$\overline{f}_{1,\infty}$一致收敛到映射$\overline{f}$,则对任意$k\geqslant 2$,序列$\{\overline{f}_n^k\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于$\overline{f}^k$。特别地,对于任意的递增正序列$\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$,可以得到$\{\overline{f}_{m_n}^k\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于$\overline{f}^k$。

证明 根据$\{\overline{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛$\overline{f}$,对任意的$\varepsilon>0$,存在$N_0\in\mathbf{N}$,则对任意$A\in\kappa(X)$,当$n>N_0$时,有$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n(A),\overline{f}(A))<\varepsilon$。当$k=2$时,$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^2(A),\overline{f}^2(A))\leqslant d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_{n+1}(\overline{f}_n(A)),\overline{f}(\overline{f}_n(A)))+d_{\mathrm{H}}(\overline{f}(\overline{f}_n(A)),\overline{f}(\overline{f}(A)))$。

由于$\overline{f}_{1,\infty}$一致收敛于$\overline{f}$,可以得到$\{\overline{f}_n^2\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于$\overline{f}^2$。

现假定$\{\overline{f}_n^k\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于$\overline{f}^k$,下面考虑$k+1$的情况,对任意$A\in\kappa(X)$,有:

$$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^{k+1}(A),\overline{f}^{k+1}(A))\leqslant d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_{n+k}(\overline{f}_n^k(A)),\overline{f}(\overline{f}_n^k(A)))+d_{\mathrm{H}}(\overline{f}(\overline{f}_n^k(A)),\overline{f}(\overline{f}^k(A))),$$

则可以得到$\{\overline{f}_n^{k+1}\}_{n=1}^{\infty}$一致收敛于$\overline{f}^{k+1}$。 证毕

定理 2 设$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$是紧致空间$\kappa(X)$的超空间非自治动力系统,其中映射序列$\overline{f}_{1,\infty}$一致收敛到映射$\overline{f}$。对于任意的$\varepsilon>0$和正整数$k$,存在$\delta(\varepsilon)>0$和正整数$N(k)$,满足对于任意的$A,B\in\kappa(X)$,$d_{\mathrm{H}}(A,B)<\delta(\varepsilon)$和任意的$n\geqslant N(k)$,有$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^k(A),\overline{f}_n^k(B))<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

证明 利用定理 1,可证得:

$$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^k(A),\overline{f}^k(B))\leqslant d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^k(A),\overline{f}^k(A))+d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^k(A),\overline{f}^k(B))+d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^k(B),\overline{f}^k(B))<\frac{\varepsilon}{2}。$$ 证毕

定理 3 设$\kappa(X)$为紧致度量空间X的超空间非自治动力系统,且$\overline{f}_{1,\infty}$一致收敛于$\overline{f}$。对任意的$k\in\mathbf{N}$和任意$\varepsilon>0$,存在$0<\xi<\varepsilon$,有:1) $\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty})=\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$;2) $\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty},\varepsilon)\subset\mathrm{LY}(\overline{f}_1^{[k]},\xi)\subset\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty},\xi)$。

证明 1) 因为$\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty})=\bigcup_{\delta>0}\mathrm{LY}(\overline{f}_{1+\infty},\delta)$,所以在这里只需要证明(2)即可。

2) 对任意$\varepsilon>0$,根据定理 2,存在$0<\xi<\varepsilon$和$N_0=\max\{N_1,N_2,\cdots,N_K\}\in\mathbf{N}$。对任意$A,B\in\kappa(X)$,当$d_{\mathrm{H}}(A,B)<\xi$且对任意的$n\geqslant N_0$,有$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_n^i(A),\overline{f}_n^i(B))<\varepsilon$,其中$1\leqslant i\leqslant k$。对任意$(A,B)\in\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty}\varepsilon)$,存在递增的正序列$\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$使得$\lim\limits_{l\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^{m_l}(A),\overline{f}_1^{m_l}(B))=\limsup\limits_{l\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))\geqslant\varepsilon$。

令$M_0=\{nk:n\in\mathbf{Z}^+\}\cap\{m_l:l\in\mathbf{N}\}$,$M_1=\{nk+1:n\in\mathbf{Z}^+\}\cap\{m_l:l\in\mathbf{N}\}$,$\cdots$,$M_{k-1}=\{nk+k-1:n\in\mathbf{Z}^+\}\cap\{m_l:l\in\mathbf{N}\}$,则存在$i_0\in\{0,1,\cdots,k-1\}$有$M_{i_0}$是不可数的。可以假定$M_{i_0}=\{m_l^{(i_0)}\}_{l=1}^{\infty}$,存在$l_0\in\mathbf{N}$,对任意$l\geqslant l_0$,$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^{m_l^{(i_0)}}(A),\overline{f}_1^{m_l^{(i_0)}}(B))=d_{\mathrm{H}}(\overline{f}^{i_0}_{m_l^{i_0}-i_0+1}(\overline{f}_1^{m_l^{i_0}-i_0}(A)),\overline{f}^{i_0}_{m_l^{i_0}-i_0+1}(\overline{f}_1^{m_l^{i_0}-i_0}(B)))\geqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$,对选择的$\xi$,可以得到$d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^{m_l^{i_0}-i_0}(A),\overline{f}_1^{m_l^{i_0}-i_0}(B))\geqslant\xi$。

对于$l\geqslant\max(l_0,N_0+i_0)$,有$k\,|\,m_l^{(i_0)}-i_0$,可以得到:

$$\limsup_{n\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_{k(n-1)+1}^k\circ\cdots\circ\overline{f}_1^k(A),\overline{f}_{k(n-1)+1}^k\circ\cdots\circ\overline{f}_1^k(B))\geqslant\limsup_{n\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^{m_l^{i_0}-i_0}(A),\overline{f}_1^{m_l^{i_0}-i_0}(B))\geqslant\xi。$$

用相似的方法,当:

$$\liminf_{n\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))=0,\ \liminf_{n\to+\infty}d_{\mathrm{H}}(\overline{f}_{k(n-1)+1}^k\circ\cdots\circ\overline{f}_1^k(A),\overline{f}_{k(n-1)+1}^k\circ\cdots\circ\overline{f}_1^k(B))=0,$$

则可以得到:$\mathrm{LY}(\overline{f}_{1+\infty},\varepsilon)\subset\mathrm{LY}(\overline{f}_{1+\infty}^{[k]},\xi)\subset\mathrm{LY}(\overline{f}_{1+\infty},\xi)$。 证毕

定理 4 设$(X,f_{1,\infty})$紧致度量空间X的非自治动力系统,$\kappa(X)$是X诱导的超空间且$\overline{f}_{1,\infty}$一致收敛于$\overline{f}$。若$f_{1,\infty}$是 Li-Yorke 混沌,对任意的$k>0$,有:1) $\overline{f}_{1,\infty}$也是 Li-Yorke 混沌;2) $\overline{f}_{1,\infty}^k$也是 Li-Yorke 混沌。

证明 1) 由于$f_{1,\infty}$是 Li-Yorke 混沌,则存在一个不可数集C,满足对任意的$x,y\in C$,$x\neq y$,存在$\delta>0$,有$\limsup\limits_{n\to+\infty}d(f_1^n(x),f_1^n(y))\geqslant\delta$,$\liminf\limits_{n\to+\infty}d(f_1^n(x),f_1^n(y))=0$。

下证存在不可数集$C_1\subset\kappa(X)$,对任意$A,B\in C_1$且$A\neq B$满足:

$$\limsup_{n\to+\infty} d_H(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))\geqslant\delta,\ \liminf_{n\to+\infty} d_H(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))=0。$$

在这里取 $C_1=\{\{x\}\mid x\in C\}$，由 C 是不可数的，可知 C_1 也是不可数的。则对任意的 $A,B\in C_1$ 且 $A\neq B$ 时，对任意 $\{x\}\in A,\{y\}\in B$，可以得到：

$$\limsup_{n\to+\infty} d_H(\overline{f}_1^n(\{x\}),\overline{f}_1^n(\{y\}))=\limsup_{n\to+\infty} d(f_1^n(x),f_1^n(y))\geqslant\delta,$$

$$\liminf_{n\to+\infty} d_H(\overline{f}_1^n(\{x\}),\overline{f}_1^n(\{y\}))=\liminf_{n\to+\infty} d(f_1^n(x),f_1^n(y))=0。$$

故 $\overline{f}_{1,\infty}$ 是 Li-Yorke 混沌。

2）由定理 3 中的结论 1)可知 $\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty})=\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$，故 $\overline{f}_{1,\infty}^{[k]}$ 是 Li-Yorke 混沌。　　证毕

定理 5　设 $(X,f_{1,\infty})$ 和 $(Y,g_{1,\infty})$ 是两个非自治动力系统。若 $(X\times Y,f_{1,\infty}\times g_{1,\infty})$ 是 LY 混沌，则 $(X,f_{1,\infty})$ 或者 $(Y,g_{1,\infty})$ 是 LY 混沌。

证明　用反证法，假设 $(X,f_{1,\infty})$ 和 $(Y,g_{1,\infty})$ 都不是 LY 混沌，下证 $(X\times Y,f_{1,\infty}\times g_{1,\infty})$ 不是 LY 混沌。

若 $(X,f_{1,\infty})$ 不是 LY 混沌，则对任意的 δ_2 和任意的不可数集 C_1，存在 $x_1,y_1\in C_1$，并且 $x_1\neq y_1$，有：

$$\limsup_{n\to+\infty} d_1(f_1^n(x_1),f_1^n(y_1))<\delta_1,\ \liminf_{n\to+\infty} d_2(f_1^n(x_1),f_1^n(y_1))>0。$$

若 $(Y,g_{1,\infty})$ 不是 LY 混沌，则对任意 δ_2 和任意的不可数集 C_2，存在 $x_2,y_2\in C_2$，且 $x_2\neq y_2$，有：

$$\limsup_{n\to+\infty} d_2(g_1^n(x_2),g_1^n(y_2))<\delta_2,\ \liminf_{n\to+\infty} d_2(g_1^n(x_2),g_1^n(y_2))>0。$$

由于 C_1 和 C_2 是不可数集，$C_1\times C_2$ 是不可数集。对 $x_1,y_1\in C_1,x_2,y_2\in C_2$，则存在 $(x_1,y_2)\in C_1\times C_2$，$(y_1,x_2)\in C_1\times C_2$，有：

$$d(f_1^n\times g_1^n(x_1,y_2),f_1^n\times g_1^n(y_1,x_2))=d((f_1^n(x_1),g_1^n(y_2)),(f_1^n(y_1),g_1^n(x_2)))=$$
$$\max\{d_1(f_1^n(x_1),f_1^n(y_1)),d_2(g_1^n(x_2),g_1^n(y_2))\}。$$

令 $\delta=\max(\delta_1,\delta_2)$，则有：

$$\limsup_{n\to+\infty} d(f_1^n\times g_1^n(x_1,y_2),f_1^n\times g_1^n(y_1,x_2))=\max\{\limsup_{n\to+\infty} d_1(f_1^n(x_1),f_1^n(y_1)),$$
$$\limsup_{n\to+\infty} d_2(g_1^n(x_2),g_1^n(y_2))\}<0。$$

同理可得：$\liminf_{n\to+\infty} d(f_1^n\times g_1^n(x_1,y_2),f_1^n\times g_1^n(y_1,x_2))>0$，则 $f_1^n\times g_1^n$ 不是 LY 混沌。　　证毕

定理 6　设 $(X,f_{1,\infty})$ 和 $(Y,g_{1,\infty})$ 是两个超空间非自治动力系统，若 $(X,f_{1,\infty})$ 和 $(Y,g_{1,\infty})$ 是 LY 混沌，则 $(X\times Y,f_{1,\infty}\times g_{1,\infty})$ 是 LY 混沌。

证明　根据定理 5，若 $(X,f_{1,\infty})$ 和 $(Y,g_{1,\infty})$ 是 LY 混沌，令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2)$，可以得到：

$$\limsup_{n\to+\infty} d(f_1^n\times g_1^n(x_1,y_2),f_1^n\times g_1^n(y_1,x_2))\geqslant\delta,\ \liminf_{n\to+\infty} d(f_1^n\times g_1^n(x_1,y_2),f_1^n\times g_1^n(y_1,x_2))=0。$$

证毕

推论 1　设 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$ 和 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty})$ 是两个超空间非自治动力系统，若 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$ 和 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty})$ 是 LY 混沌，则 $(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}\times g_{1,\infty}})$ 是 LY 混沌。

推论 1 由定理 6 和定理 4 的结论 1)可证。

推论 2　设 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$ 和 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty}^{[k]})$ 是两个超空间非自治动力系统，若 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$ 和 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty}^{[k]})$ 是 LY 混沌，则 $(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}^{[k]}\times g_{1,\infty}^{[k]}})$ 是 LY 混沌。

证明　由推论 1 和 $\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty})=\mathrm{LY}(\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$，可证推论 2。　　证毕

引理 1[21]　设 X,Y 是两个紧致度量空间。对于任意 $A\in\kappa(X\times Y)$ 和对任意的 $\varepsilon>0$，存在非空的开集 $U_1,U_2,\cdots,U_n\subset X$ 和 $V_1,V_2,\cdots,V_n\subset Y$，使得：

$$A\in\langle U_1\times V_1,\cdots,U_n\times V_n\rangle\subset\langle\overline{U_1\times V_1},\cdots,\overline{U_n\times V_n}\rangle\subset B_{d_H}(A,\varepsilon)。$$

定理 7　设 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$ 和 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty})$ 是两个超空间非自治动力系统，$(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}\times g_{1,\infty}})$ 具有初值依赖敏感性当且仅当 $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$ 或 $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty})$ 具有初值依赖敏感性。

证明　1）必要性。假设 $\overline{f}_{1,\infty}$ 和 $\overline{g}_{1,\infty}$ 都不具有初值依赖敏感性，对任意 $\delta>0$，有：a) 存在 $A_1\in\kappa(X)$，对任意 $B_1\in\kappa(X)$ 和正整数 n，满足 $d_{H_1}(A_1,B_1)\geqslant\varepsilon$，有 $d_{H_1}(\overline{f}_1^n(A_1),\overline{f}_1^n(B_1))\leqslant\delta$；b) 存在 $A_2\in\kappa(Y)$，对任意 $B_2\in$

$\kappa(Y)$和正整数 n，满足 $d_{H_2}(A_2,B_2)\geqslant\varepsilon$，有 $d_{H_2}(\overline{g}_1^n(A_2),\overline{g}_1^n(B_2))\leqslant\delta$。由 $A_1\in\kappa(X)$，$A_2\in\kappa(Y)$，则有 $A_1\times A_2\in\kappa(X\times Y)$，对任意 $B_1\times B_2\in\kappa(X\times Y)$，有 $d_H(A_1\times A_2,B_1\times B_2)=\max\{d_{H_1}(A_1,B_1),d_{H_2}(A_2,B_2)\}\geqslant\varepsilon$。故有：

$$d_H(\overline{f_1^n\times g_1^n}(A_1\times A_2),\overline{f_1^n\times g_1^n}(B_1\times B_2))=d_H((f_1^n(A_1),g_1^n(A_2)),(f_1^n(B_1),g_1^n(B_2)))=$$
$$\max\{d_{H_1}(\overline{f}_1^n(A_1),\overline{f}_1^n(B_1)),d_{H_2}(\overline{g}_1^n(A_2),\overline{g}_1^n(B_2))\}。$$

可以得到 $d_H(\overline{f_1^n\times g_1^n}(A_1\times A_2),\overline{f_1^n\times g_1^n}(B_1\times B_2))\leqslant\delta$。必要性得证。

2）充分性。对任意非空开集 $V\in\kappa(X\times Y)$，由引理 1 知，存在非空开集 $U_1,U_2,\cdots,U_n\subset\kappa(X)$和 $V_1,V_2,\cdots,V_n\subset\kappa(Y)$，使得$\langle\overline{U_1\times V_1},\cdots,\overline{U_n\times V_n}\rangle\subset V$。

假设 $\overline{f}_{1,\infty}$具有初值依赖敏感性，存在 $\delta>0$，对任意 $A\in\langle\overline{U_1},\cdots,\overline{U_n}\rangle$，存在 $B\in\langle\overline{U_1},\cdots,\overline{U_n}\rangle$和任意正整数 n，当 $d_H(A,B)<\varepsilon$ 时，有 $d_{H_1}(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))>\delta$。

对每个 $v_i(i=1,\cdots,n)$，定义 $A_i=A\cap\overline{U_i}$，$B_i=B\cap\overline{U_i}$ 和 $\widetilde{A}_i=A_i\times\{v_i\}$，$\widetilde{B}_i=B_i\times\{v_i\}$。明显 $A=\bigcup\limits_{i=1}^n A_i$，$B=\bigcup\limits_{i=1}^n B_i$ 和 $\widetilde{A}:=\bigcup\limits_i^n\widetilde{A}_i\in\langle\overline{U_1\times V_1},\cdots,\overline{U_n\times V_n}\rangle$，$\widetilde{B}:=\bigcup\limits_i^n\widetilde{B}_i\in\langle\overline{U_1\times V_1},\cdots,\overline{U_n\times V_n}\rangle$。则对任意 $\widetilde{A}\in\kappa(X\times Y)$。存在 $\widetilde{B}\in\kappa(X\times Y)$，有：

$$d_H(\widetilde{A},\widetilde{B})=d_H(\bigcup_{i=1}^n(A_i\times\{v_i\}),\bigcup_{i=1}^n(B_i\times\{v_i\}))<\varepsilon。$$

则对任意正整数 n，有：

$$d_H(\overline{f_1^n\times g_1^n}(\widetilde{A}),\overline{f_1^n\times g_1^n}(\widetilde{B}))=d_H(\bigcup_{i=1}^n\overline{f}_1^n(A_i)\times\overline{g}_1^n(\{v_i\}),\bigcup_{i=1}^n\overline{f}_1^n(B_i)\times\overline{g}_1^n(\{v_i\}))\geqslant d_H(\overline{f}_1^n(A),\overline{f}_1^n(B))。$$

故可以得到 $d_H(\overline{f_1^n\times g_1^n}(\widetilde{A}),\overline{f_1^n\times g_1^n}(\widetilde{B}))>\delta$。 证毕

引理 2[15] 设$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$是超空间非自治动力系统，其中序列映射 $\overline{f}_{1,\infty}$一致收敛到映射 $\overline{f}$。对任意的 $k\in\mathbf{N}$，若 $\overline{f}_{1,\infty}$具有初值敏感性当且仅当 $\overline{f}_{1,\infty}^{[k]}$具有初值敏感性。

定理 8 设$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty})$和$(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty})$是两个超空间非自治动力系统，$(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}^{[k]}\times g_{1,\infty}^{[k]}})$具有初值依赖敏感性当且仅当$(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$或$(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty}^{[k]})$具有初值依赖敏感性。

定理 8 的证明由引理 2 和定理 7 可得。

参考文献：

[1] RUELLE D, TAKENS F. On the nature of turbulence[J]. Communications in Mathematical Physics, 1971, 20(3): 167-192.
[2] LI T Y, YORKE J. Period three implies chaos[J]. The American Mathematical Monthly, 1975, 82(10): 985-992.
[3] DEVANEY R L. An introduction to chaotic dynamical systems[M]. California: Addioson-Wesley Publishing Company, 1989.
[4] AKIN E, KOLYADA S. Li-Yorke sensitivity[J]. Nonlinearity, 2003, 16(4): 1421-1433.
[5] XIONG J C. Chaos in a topologically transitive system[J]. Science in China, Series A Mathematics, 2005, 48(7): 929-939.
[6] MOOTHATHU T K S. Stronger forms of sensitivity for dynamical systems[J]. Nonlinearity, 2007, 20(9): 2115-2126.
[7] SCHWEIZER B, SMILTAL J. Measures of chaos and a spectral decomposition of dynamical systems on the interval[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1994, 344(2): 737-754.
[8] KLEIN E, THOMPSON A C. Theory of correspondences[M]. New York: John Wiley and Sons, Inc, 1984.
[9] KOLYADA S, SNOHA L. Topological entropy of nonautonomous dynamical systems[J]. Fundamental Mathematics, 1996, 4(2/3): 205-233.
[10] CÁNOVAS J S. Li-Yorke chaos in a class of nonautonomous discrete systems[J]. Journal of Difference Equations and Applications, 2011, 17(4): 479-486.
[11] DVOŘÁKOVÁ J. Chaos in non-autonomous discrete dynamical systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(12): 4649-4652.
[12] BALIBREA F, OPROCHA P. Weak mixing and chaos in nonautonomous discrete systems[J]. Applied Mathematics Letters, 2012, 25(8): 1135-1141.
[13] TIAN C J, CHEN G R. Chaos of a sequence of maps in a metric space[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 28(4): 1067-

1075.
[14] WU X X,ZHU P Y. Chaos in a class of non-autonomous discrete systems[J]. Applied Mathematics Letters,2013,26(4):431-436.
[15] 杨承宇,王延庚,历智明.关于超空间非自治动力系统敏感依赖性的一些研究[J].纯粹数学与应用数学,2014,30(2):201-207.
YANG C Y,WANG Y G,LI Z M. Some results about sensitive on non-autonomous dynamical system in hyperspace[J]. Pure and Applied Mathematics,2014,30(2):201-207.
[16] 宋晓倩,成丹丹.关于拓扑强混合及初值敏感依赖[J].纺织高校基础科学学报,2008,21(4):435-438.
SONG X Q,CHENG D. On topological strong mixing and sensitive dependence on initial conditions[J]. Basic Sciences Journal of Textile Universities,2008,21(4):435-438.
[17] 吴新星,朱培勇.关于两种混沌映射的有限乘积性质[J].纯粹数学与应用数学,2011,27(1):129-137.
WU X X,ZHU P Y. On finite-product properties of two kinds of chaotic mappings[J]. Pure and Applied Mathematics,2011,27(1):129-137.
[18] 杨智,朱培勇,吴新星. Li-Yorke 敏感的乘积性和复合性[J].纯粹数学与应用数学,2012,28(5):649-654.
YANG Z,ZHU P Y,WU X X. Li-Yorke sensitivity in product and compositional systems[J]. Pure and Applied Mathematics,2012,28(5):649-654.
[19] SONG X Q,LIU J K,WANG L W. Ruelle-takens chaos in non-autonomous dynamical systems[J]. Engineering Mathematics Letters,2012,1(1):65-74.
[20] 但建军,金渝光,高瑾.关于超空间复合系统混沌性的研究[J].西南师范大学学报(自然科学版),2016,41(10):26-31.
DAN J J,JIN Y G,GAO J. The study of chaos Hyperspace composite systems[J]. Journal of Southwest China Normal University (Natural Science Edition),2016,41(10):26-31.
[21] 吴新星.关于动力系统混沌性质及跟踪性质的研究[D].成都:电子科技大学,2017.
WU X X. Research on chaoticity and shadowing properties of dynamical systems[D]. Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China,2017.
[22] 马翠娜.关于几类动力系统的混沌性与跟踪性研究[D].成都:电子科技大学,2018.
MA C N. Research on chaoticity and shadowing properties of several dynamical systems[D]. Chengdu:University of Electronic Science and Technology of China,2018.
[23] VASISHT R,DAS R. Specification and shadowing properties for non-autonomous systems[J/OL]. Journal of Dynamical and Control Systems. (2021-02-12)[2021-04-02]. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2Fs10883-021-09535-4.pdf.
[24] WANG H Y,LIU Q. Ergodic shadowing properties of iterated function systems[J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society,2021,44(2):767-783.

Research on Chastity in Hyperspace Non-Autonomous Systems

LENG Zhenbei[1], LUO Fei[2], GAO Jin[3]

(1. School of Mathematics and Computer Science, Chongqing College of International Business and Economics, Chongqing 401520; 2. College of Mathematics and Statistics, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong Sicuan 643000; 3. School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The based space non-autonomous dynamic system is an important topic in recent years, and the chaotic nature of hyperspace non-autonomous dynamic system is also very important. [**Methods**]It uses uniform convergence and strong uniform convergence methods to study the chaotic properties of non-autonomous systems. [**Findings**]It is obtained that the mapping $\{\overline{f}_n^k\}_{n=1}^{\infty}$ converges to $\overline{f}^k$ uniformly for any iteration index $k\geqslant 2$. On this basis, the product system of hyperspace non-autonomous dynamic system Li-Yorke chaos and initial value sensitivity is discussed: for any positive integer k: 1) If $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$ and $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty}^{[k]})$are Li-Yorke chaos, then $(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}^{[k]}\times g_{1,\infty}^{[k]}})$ is also Li-Yorke chaos. 2) $(\kappa(X\times Y),\overline{f_{1,\infty}^{[k]}\times g_{1,\infty}^{[k]}})$has initial value-dependent sensitivity if and only if $(\kappa(X),\overline{f}_{1,\infty}^{[k]})$ or $(\kappa(Y),\overline{g}_{1,\infty}^{[k]})$ has initial value-dependent sensitivity. [**Conclusions**]Through the study of hyperspace non-autonomous systems, it further enriches the chaotic nature of non-autonomous systems in hyperspace.

Keywords: hyperspace; non-autonomous discrete system; Li-Yorke chaos; Li-Yorke sensitivity

(责任编辑 黄 颖)