DOI:10.11721/cqnuj20220501

Pöschl-Teller Ⅰ势势代数及同谱势研究*

熊露霖,谭 鑫,罗 光
(重庆师范大学 物理与电子工程学院,重庆 401331)

摘要:【目的】Pöschl-Teller Ⅰ势是超对称量子力学中为数不多的满足薛定谔方程并能精确求解的双参数势中的一种。研究精确求解该势的途径,用势代数精确求解它在超对称性完整和破缺条件下的能级;同时构造 Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱势从而增加可精确求解的势数目。【方法】1) 基于超对称量子力学理论,研究了 Pöschl-Teller Ⅰ势的双参数势代数,应用待定系数法和迭代法得到了势代数描述的形状不变性,当超对称性破缺时,通过两步法调整参数的方式得到势代数形式的形状不变性;2) 通过形状不变性构造出一个新的超势族,使它与原势具有相同的能级,并作出能级图像进行精确对比。【结果】1) 根据势代数计算并得到了超对称性完整时的对应能谱;2) 通过两步法调整参数得到势代数的形状不变性,计算并得到了该势在超对称破缺情况下的能谱;3) 对比图像发现该势族与原势拥有相同能级。【结论】1) 对比采用势代数方法得到的计算结果与用求解薛定谔方程的方法得到的计算结果,发现两者完全一致,由此得出双参数势代数法是求解 Pöschl-Teller Ⅰ势能级的另一个新途径;2) 势代数法在超对称性破缺情况下仍适用精确求解对应的薛定谔方程;3) Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱势族可极大丰富可精确求解势的数目。

关键词:超对称量子力学;可解势;同谱势;Pöschl-Teller Ⅰ势
中图分类号:O413.1 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2022)06-0110-08

在经典量子力学中,具有不同势约束下的薛定谔方程无疑是最重要的一类方程[1-3],然而这些方程中能够被精确求解的却不多[4-5]。超对称量子力学是求解量子力学问题的一个新途径[6]。相比于其他求解方法,超对称量子力学能够更加简便地求出方程的精确解。在超对称量子力学中,可精确求解的势往往还满足形状不变性[6-7],而形状不变性与超对称之间更深层次的联系,需要从李代数角度出发进行分析[8-9],因此研究超对称的势代数形式无疑具有重要意义。

基于超对称量子力学中超势不具有唯一性的特点,从某个满足形状不变势的超势,选择适当的函数 $f(x)$,可以使得 $W(x)+f(x)$ 成为具零能基态的超势,这意味着每确定一个具有零能基态的超势,就对应了一个势族,这个势族与源势具有相同的能级、反射系数、透射系数[6, 10-12],这就是同谱势。文献[13]基于同谱势的研究,计算了谐振子势、Scarf 势和广义 Pöschl-Teller 势的同谱势。

由于 Pöschl-Teller 势涉及两个加性参数,基于超对称量子力学的势代数和同谱势也变得相对复杂。基于此,本文展开了对 Pöschl-Teller Ⅰ势的相关研究,推导出关于该势形状不变性的代数形式以及它的同谱势族,并得到了相应的能谱和波函数。

1 超对称量子力学的势代数和同谱超势

为方便计算,取自然单位制 $\hbar=2m=1$,此时经典薛定谔方程形式为:

$$-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\psi(x)+V(x,a)\psi(x)=E\psi(x),$$

其中 a 是一个与 x 无关的参数。在超对称量子力学中,引入升降算符:

* **收稿日期**:2021-12-23 **修回日期**:2022-07-07 **网络出版时间**:2022-09-17 13:49
资助项目:国家自然科学基金青年项目(No. 11404046);重庆市科学技术局自然科学基金(No. cstc2012jjA50018);重庆师范大学国家基金预研项目(No. 16XYY31)
第一作者简介:熊露霖,女,研究方向为理论物理,E-mail:463245940@qq.com;**通信作者**:罗光,男,教授,博士,E-mail:photoncn@cqnu.edu.cn
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20220916.1704.008.html

$$A^{+}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+W(x,a),A^{-}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+W(x,a),$$

它们对应的伴随哈密顿伴量 $H_{\pm}$ 为[6]：

$$H_{\pm}=A^{\pm}A^{\mp}=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+W^2(x,a)\pm\frac{\mathrm{d}W(x,a)}{\mathrm{d}x}=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+V_{\pm}(x,a)。$$

可见超势 $W(x,a)$ 与伴势 $V_{\pm}(x,a)$ 有着非常紧密的关系。对于很多可精确求解的势，$V_{\pm}(x,a)$ 还满足[5-6]：

$$V_{+}(x,a_0)=V_{-}(x,a_1)+R(a_0)。\tag{1}$$

其中 a_1 和 $R(a_0)$ 是关于 a_0 的函数。对于满足(1)式的势就称该势具有形状不变性。为满足基态波函数的可归一性，超势在取值范围内须满足两端异号，在该情况下称此时超对称性完整，满足超对称哈密顿伴量的基态能级为 0，且有：

$$A^{+}H_{+}=H_{-}A^{+},A^{-}H_{-}=H_{+}A^{-}。\tag{2}$$

由(2)式不难得出能量本征值和本征波函数彼此之间的迭代关系：

$$E_{n+1}^{-}=E_n^{+},\frac{A^{-}}{\sqrt{E_n^{+}}}\psi_{n+1}^{(-)}=\psi_n^{(+)},\frac{A^{+}}{\sqrt{E_n^{+}}}\psi_n^{(+)}=\psi_{n+1}^{(-)},n=0,1,2,3\cdots\tag{3}$$

由于超对称哈密顿伴量 H_{-} 所对应的基态能级 $E_0^{(-)}=0$，于是有：

$$A^{-}\psi_0^{(-)}(x,a)=0,$$

解得：

$$\psi_0^{(-)}(x,a)=N\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x}W(x,a)\mathrm{d}x}=N\cos^{A}x\sin^{B}x,\tag{4}$$

其中 N 为归一化系数。利用(3)式，便可求出波函数和对应的能量本征值。

但当超对称性破缺时，基态能级不为 0。此时能量本征值和本征波函数彼此之间的迭代关系为：

$$E_n^{-}=E_n^{+},\frac{A^{-}}{\sqrt{E_n^{+}}}\psi_n^{(-)}=\psi_n^{(+)},\frac{A^{+}}{\sqrt{E_n^{+}}}\psi_n^{(+)}=\psi_n^{(-)},n=0,1,2,3\cdots$$

在该情况下，只能采用两步形状不变性法求解能级与波函数[6]。

形状不变势通常可以用势代数的形式来描述[8,13-14]。在(1)式中，根据 a_1,a_0 间的关系可以引入算符 $J_3=f(\mathrm{i}\partial_{\varphi})$，这里 φ 是与 x 无关的变量。升降算符 $A^{\pm}(x,a)$ 也相应变为 $\mathcal{A}^{\pm}(x,\chi(\mathrm{i}\partial_{\varphi}))$，实际上 $\chi(\mathrm{i}\partial_{\varphi})$ 与 J_3 显然有某种联系。根据文献[8,13-14]，这里选 $J_3=k-\frac{\mathrm{i}\partial_{\varphi}}{s}$，其中：$s$ 由加性常数 a_0 与 a_1 的关系决定，一般情况是 $a_1=a_0+s$，k 为任意常数。再定义 J_{+} 与 J_{-} 分别为 $J_{+}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\varphi}A^{+}(x,\chi(\mathrm{i}\partial_{\varphi}))$ 和 $J_{-}=A^{-}(x,\chi(\mathrm{i}\partial_{\varphi}))\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi}$，易验证 J_{+} 与 J_{-} 满足性质 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}s\varphi}J_3\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}s\varphi}=J_3\pm s$ 以及 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}s\varphi}J_3^2\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}s\varphi}=(J_3\pm s)^2$，于是可以计算出形状不变性的势代数形式：

$$J_{+}J_{-}-J_{-}J_{+}=f(J_3)。\tag{5}$$

根据这个形状不变关系，也可以得出方程的本征值和本征波函数，及求出对应薛定谔方程的精确解。

超对称量子力学中对于任何一个势，它可能会有另外的一个势与它具有相同的能级、反射系数和透射系数，此即为同谱超势[6,11,15]。设存在另一个超势 $\hat{W}(x,a)$，它与超势 $W(x,a)$ 可产生相同的伴势：$V_{+}(x)=\hat{W}^2(x,a)+\hat{W}'(x,a)$，这里：

$$\hat{W}(x,a)=W(x,a)+f(x),\tag{6}$$

且有 $f(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln I(x)+\lambda]$。其中：

$$I(x)=\int\mathrm{d}x\,\mathrm{e}^{-\int 2W(x)\mathrm{d}x}。\tag{7}$$

将(6)式代入(5)式可得：

$$\hat{V}_{-}(x,\lambda)=V_{-}(x)-2\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln[I(x)+\lambda]。\tag{8}$$

λ 取不同的值便对应着不同的势，所有的势可构成一个集合。因此将 λ 取不同值的所有势构成一个同谱势族

$\hat{V}_-(x,\lambda)$:当 $\lambda\to\pm\infty$ 时,$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[\ln I(x)+\lambda]$ 和 $2\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\ln[I(x)+\lambda]$ 均趋近于 0,有 $\hat{W}(x)\to W(x)$ 和 $\hat{V}_-(x,\lambda)\to V_-(x)$,由此看出,原势 $V_-(x)$ 也是势族中的一个势。

对于一维情况,进一步研究同谱势的基态波函数,结合(4)式,可得:

$$\hat{\psi}_0^{(-)}(x)\sim \mathrm{e}^{-\int W(x)\mathrm{d}x}=\frac{\psi_0^{(-)}(x)}{I+\lambda}。\tag{9}$$

为了避开奇异势的出现,λ 的取值范围应满足 $\lambda\neq -I$。

2 Pöschl-Teller Ⅰ势的势代数

Pöschl-Teller Ⅰ势的超势 $W(x)$ 为[6]:$W(x)=A\tan x-B\cot x$,$0<x<\dfrac{\pi}{2}$。它的函数图像如图 1 所示。

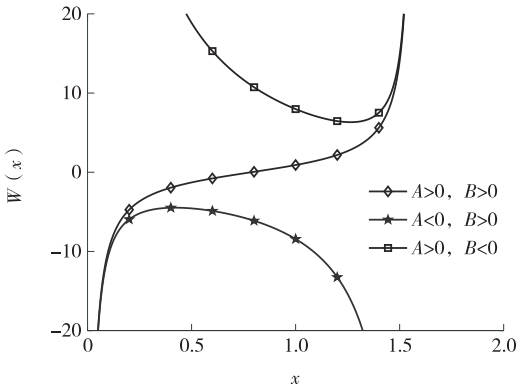

图 1　Pöschl-Teller Ⅰ势的超势图

Fig. 1　Superpotential of Pöschl-Teller I potential

由图 1 可知,Pöschl-Teller Ⅰ势的参数 A、B 取值情况与超对称性之间的关系为:当 $A>0,B>0$ 时,Pöschl-Teller Ⅰ势的超对称性完整;当 $A>0,B<0$ 或 $A<0,B>0$ 时,Pöschl-Teller Ⅰ势的超对称性破缺。它的伴势 $V_\pm(x)$ 为:

$$V_-(x,A,B)=-(A+B)^2+(A-1)A\sec^2x+(B-1)B\csc^2x,$$
$$V_+(x,A,B)=-(A+B)^2+(A+1)A\sec^2x+(B+1)B\csc^2x。$$

可看出伴随势 $V_\pm(x)$ 的形状不变性关系有以下 3 种形式:

$$V_+(x,A,B)=V_-(x,A+1,B+1)+(A+B+2)^2-(A+B)^2,\tag{10}$$
$$V_+(x,A,B)=V_-(x,A+1,-B)+(A+1-B)^2-(A+B)^2,\tag{11}$$
$$V_+(x,A,B)=V_-(x,-A,B+1)+(B+1-A)^2-(B+A)^2。\tag{12}$$

基于上述形状不变性,可以定义如下算符 $J_3^{(A)}=k_A-\dfrac{\mathrm{i}}{s_A}\partial_{\varphi A}$,$J_3^{(B)}=k_B-\dfrac{\mathrm{i}}{s_B}\partial_{\varphi B}$,其中 k_A,k_B 为任意常数,s_1,s_2 的值由(10)~(12)式中参数的加性常数决定。例如在(10)式中,由于加性常数 $A=A+1,B=B+1$,因此 $s_1=1$,$s_2=1$。

下面根据参数的取值分 3 种情况来讨论:

i) $A>0,B>0$。此时 $J_3^{(1)}=k_1-\mathrm{i}\partial_{\varphi 1}$,$J_3^{(2)}=k_2-\mathrm{i}\partial_{\varphi 2}$,且 $\mathcal{A}^\pm$ 可以定义为:

$$\mathcal{A}^\pm=\mp\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+(k_1-J_3^{(1)})\tan x-(k_2-J_3^{(2)})\cot x。$$

此时,J_+ 与 J_- 分别为:

$$J_+=\mathrm{e}^{\mathrm{i}s\varphi}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+(k_1-J_3^{(1)})\tan x-(k_2-J_3^{(2)})\cot x\right],$$
$$J_-=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+(k_1-J_3^{(1)})\tan x-(k_2-J_3^{(2)})\cot x\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\varphi}。$$

利用 J_+ 与 J_- 满足性质 $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}s\varphi}J_3\mathrm{e}^{\mp\mathrm{i}s\varphi}=J_3\pm s$,可以得出:

$$J_+J_-=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-(k_1-J_3^{(1)}+1)\sec^2x-(k_2-J_3^{(2)}+1)\csc^2x+(k_1-J_3^{(1)}+1)^2\tan^2x+$$
$$(k_2-J_3^{(2)}+1)^2\cot^2x-2(k_1-J_3^{(1)}+1)(k_2-J_3^{(2)}+1),\tag{13}$$
$$J_-J_+=-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}-(k_1-J_3^{(1)})\sec^2x-(k_2-J_3^{(2)})\csc^2x+(k_1-J_3^{(1)})^2\tan^2x+$$
$$(k_2-J_3^{(2)})^2\cot^2x-2(k_1-J_3^{(1)})(k_2-J_3^{(2)})。\tag{14}$$

由(13)、(14)式可以得出：

$$J_+J_--J_-J_+=-4k_1-4k_2+4J_3^{(1)}+4J_3^{(2)}-4。$$

设 $k_1=k_2=-\frac{1}{2}$，可得：

$$[J_+,J_-]=4J_3^{(1)}+4J_3^{(2)}。\tag{15}$$

(15)式即为势代数形式的形状不变性。引入 Casimir 算符[16]，该算符与 $J_\pm$ 的关系为：

$$C=J_-J_++G(J_3)=J_+J_-+G(J_3-1)。\tag{16}$$

将(16)式改写为：

$$G(J_3)-G(J_3-1)=J_+J_--J_-J_+。$$

进一步结合(15)式可得：

$$G(J_3^{(1)},J_3^{(2)})-G(J_3^{(1)}-1,J_3^{(2)}-1)=4J_3^{(1)}+4J_3^{(2)}。\tag{17}$$

此时需找出 $G(J_3^{(1)},J_3^{(2)})$ 的表达式。对此采用待定系数法，设：

$$G(J_3^{(A)},J_3^{(B)})=A(J_3^{(A)})^2+B(J_3^{(B)})^2+CJ_3^{(A)}J_3^{(B)}+DJ_3^{(A)}+EJ_3^{(B)}+F。\tag{18}$$

将(18)式代回至(17)式，可得：

$$(2A+C)J_3^{(1)}+(2A+C)J_3^{(2)}+D+E-C-A-B=4J_3^{(1)}+4J_3^{(2)}。$$

比较方程两边系数可得：

$$A=B=1,C=2,D=E=2,F\text{ 为任意常数。}$$

不妨设 $F=0$，有：

$$G(J_3^{(1)},J_3^{(2)})=(J_3^{(1)}+J_3^{(2)})(J_3^{(1)}+J_3^{(2)}+2)。\tag{19}$$

设：

$$J_3^{(1)}|h_1\rangle=h_1|h_1\rangle,J_3^{(2)}|h_2\rangle=h_2|h_2\rangle,$$
$$J_-|h\rangle=a(h)|h-1\rangle,J_+|h\rangle=a(h+1)|h+1\rangle。$$

则：

$$J_+J_--J_-J_+=|a(h)|^2-|a(h+1)|^2=G(h)-G(h-1)。\tag{20}$$

令 $h=h_{\min}$ 为基态，则 $J_-|h_{\min}\rangle=a(h_{\min})|h-1\rangle=0$，由此可得 $a(h_{\min})=0$，结合(20)式，有：

$$|a(h_{\min}+1)|^2=G(h_{\min}-1)-G(h_{\min})。\tag{21}$$

再将(21)式代入(20)中，可得 $|a(h_{\min}+2)|^2=G(h_{\min}-1)-G(h_{\min}+1)$，重复迭代得到：

$$|a(h_{\min}+n)|^2=G(h_{\min}-1)-G(h_{\min}+n-1),n=1,2,3\cdots$$

又令 $h_{\min}+n=h$，则有：

$$|a(h)|^2=G(h-n-1)-G(h-1),n=1,2,3\cdots$$

结合 Pöschl-Teller Ⅰ势的哈密顿伴量和(14)式，有：

$$H_-\left(x,-\frac{1}{2}-h_1+1,-\frac{1}{2}-h_2+1\right)|\varphi\rangle=\left\{-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}+\left(-\frac{1}{2}-h_1+1\right)\left(-\frac{1}{2}-h_1\right)\sec^2x+\right.$$
$$\left.\left(-\frac{1}{2}-h_2+1\right)\left(-\frac{1}{2}-h_2\right)\csc^2x-(h_1+h_2-1)^2\right\}|\varphi\rangle=J_+J_-|\varphi\rangle。$$

又由于：

$$J_+J_-|\varphi\rangle=|a(h)|^2=G(h_1-n-1,h_2-n-1)-G(h_1-1,h_2-1)。\tag{22}$$

则：

$$H_-\left(x,-\frac{1}{2}-h_{1,2}+1\right)|\varphi\rangle=G(h_1-n-1,h_2-n-1)-G(h_1-1,h_2-1)。\tag{23}$$

根据(19)式,有:

$$G(h_{1,2}-n-1)-G(h_{1,2}-1)=(h_1-2n-2+h_2)(h_1-2n+h_2)-(h_1-2+h_2)(h_1+h_2)。\tag{24}$$

最后,在(24)式中,令$-\frac{1}{2}-h_1+1=A$,$-\frac{1}{2}-h_2+1=B$,即$h_1=\frac{1}{2}-A$,$h_2=\frac{1}{2}-B$并代回(23)、(24)式,得:

$$E_n^{(-)}(x,A,B)=(A+B+2n)^2-(A+B)^2。$$

此即为情况i)的能级。

ii) $A>0$,$B<0$。在该条件下,超对称性破缺,已无零能基态,也就无法应用上述步骤进行求解。此时要求解能量本征值谱,需要结合(10)式采用两步法通过调整参数来确定[6]。首先要调整参数,由于$A>0$,$B<0$,取$B=-B$则可再次满足$B>0$,此时伴势$V_-(x,A+1,-B)$满足超对称性,可利用(24)式进行计算,即在(24)式中令$h_A=\frac{1}{2}-(A+1)$,$h_B=\frac{1}{2}-(-B)$可得:$E_n^{(-)}(x,A+1,-B)=(A+1-B+2n)^2-(A+1-B)^2$。

根据(10)式的形状不变性关系,只需重新构造势代数$J_\pm$并找出它的对易关系。此时$J_3^{(1)}=k_1-\mathrm{i}\partial_{\varphi 1}$,$J_+J_-$里的参数为$(x,A+1,-B)$,$J_-J_+$里的参数为$(x,A,B)$,即:

$$J_+J_-(x,A+1,-B)\varphi=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+(k_1-J_3^{(1)})\tan x+B\cot x\right]\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+(k_1-J_3^{(1)})\tan x+B\cot x\right]\mathrm{e}^{-i\varphi}\varphi=$$
$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+(k_1-J_3^{(1)}+1)(k_1-J_3^{(1)})\sec^2x\varphi+B\csc^2x\varphi-$$
$$(k_1-J_3^{(1)}+1)^2\varphi+2B(k_1-J_3^{(1)}+1)\varphi+B\cot^2x\varphi,$$
$$J_-J_+(x,A,B)\varphi=\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+(k_1-J_3^{(1)})\tan x-B\cot x\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\left[-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+(k_1-J_3^{(1)})\tan x-B\cot x\right]\varphi=$$
$$-\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}x^2}+(k_1-J_3^{(1)})(1+k_1-J_3^{(1)})\sec^2x\varphi+B\csc^2x\varphi-(k_1-J_3^{(1)})^2-2B(k_1-J_3^{(1)})\varphi+B\cot^2x\varphi。$$

进而可以得出:$J_+J_--J_-J_+=(2B-1)(2k_1-2J_3^{(1)}+1)$。此时设$k=-\frac{1}{2}$,可得:$J_+J_--J_-J_+=-2J_3^{(1)}(2B-1)$,即为该条件下势代数形式的形状不变性关系。同时$J_3^{(1)}$的本征值仍为$h_1$,令$h_1=\frac{1}{2}-(A+1)$,则有:

$$\{J_+J_--J_-J_+\}|\varphi\rangle=-2J_3^{(1)}(2B-1)|\varphi\rangle=-2(2B-1)h_1|\varphi\rangle=(2B-1)(1+2A)|\varphi\rangle,$$

从而:

$$E_n^{(+)}(A,B)=E_n^{(-)}(x,A+1,-B)+(1-2B)(1+2A)。$$

根据破缺条件下的能级关系$E_n^{(+)}(A,B)=E_n^{(-)}(A,B)$,故在该情况下的能级为:

$$E_n^{(-)}(A,B)=(A+1-B+2n)^2-(A+B)^2。$$

iii) 当$A<0$,$B>0$时,与情况ii)同理,仍采用两步法,取$A=-A$,重复上述步骤,即得:$E_n^{(-)}(A,B)=(B+1-A+2n)^2-(A+B)^2$。

3 Pöschl-Teller I势的同谱势

超对称量子力学中对于任何一个势,它可能会有另外的一个势与它具有相同的能级、反射系数和透射系数,此即为同谱超势。同谱超势的求解可极大地丰富可精确求解势的数目。下面以本文第1节同谱势的推导过程为依据,计算Pöschl-Teller I势的同谱势。

3.1 计算$I(x)$

利用(7)式,有:

$$I(x)=-\frac{\cos^{1+2A}x\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+A,\frac{1}{2}-B,\frac{3}{2}+A,\cos^2x\right)\sin^{1+2B}x\sin(x^2)^{-\frac{1}{2}-B}}{1+2A}。\tag{25}$$

为方便计算,取$A=2$,$B=1$,得:

$$I(x,A=2,B=1)=-\frac{1}{2}\cos^2x。\tag{26}$$

由(26)式可计算出 $I(x)$ 在 $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$ 上的取值范围为 $I\in\left[-\frac{1}{2},0\right]$，从而进一步确定 λ 的取值范围为：$\lambda\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{1}{2},\infty\right)$。

3.2 计算 Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱超势 $\hat{W}(x)$

根据(13)、(25)以及(26)式，进一步得到同谱超势 $W(x)$ 为：

$$\hat{W}(x)=\left\{\cos^{2A}x\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2}+A,\frac{1}{2}-B,\frac{3}{2}+A,\cos^2x\right)\sin^{2B}x\sqrt{\sin^2x}(-B\cos^2x+A\sin^2x)+\frac{1}{2}(1+2A)\sin^{2B}x[-A\lambda+B\lambda+(A+B)\lambda\cos 2x-2\cos^{1+2A}x\sin^{1+2B}x]\tan x\right\}/(\cos^{1+2A}x\sin^{1+2B}x\sqrt{\sin^2x})。\tag{27}$$

将 $A=\frac{1}{2}$，$B=\frac{1}{2}$ 代入(27)式得：

$$\hat{W}\left(x,A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(-\cot x-\frac{4\cos x\sin x}{-2\lambda+\cos^2x}+\tan x\right)。\tag{28}$$

根据(28)式可画出它的同谱超势图(图 2)。

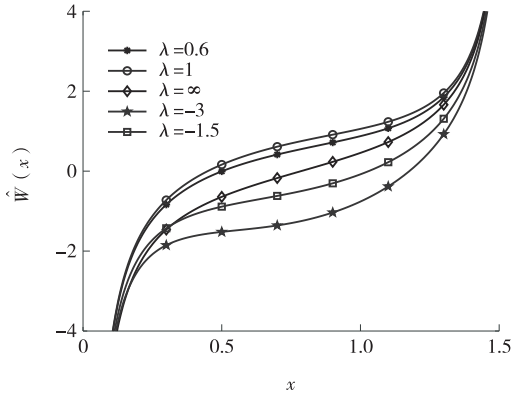

图 2　Pöschl-Teller Ⅰ势的部分同谱超势图

Fig. 2　Partial isospectral super potential of the Pöschl-Teller Ⅰ potential

3.3 计算 Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱伴势 $\hat{V}_-(x)$

由(8)式，可得 Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱伴势 $\hat{V}_-(x)$：

$$\hat{V}_-(x)=\frac{7+8(1-2\lambda)\lambda-\cos 2x(-6+24\lambda+\cos 2x)}{(1-4\lambda+\cos 2x)^2}-\frac{\csc^2x+\sec^2x}{4}。\tag{29}$$

同样，根据(29)式可画出 Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱伴势图(图 3)。

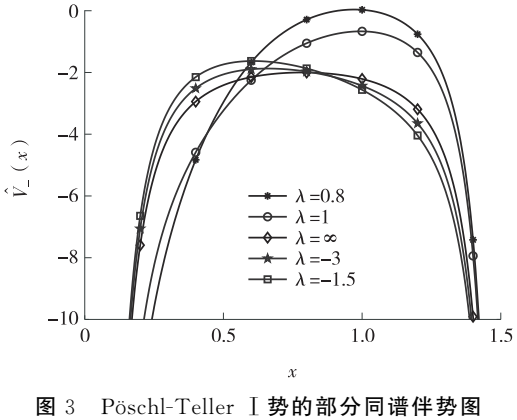

图 3　Pöschl-Teller Ⅰ势的部分同谱伴势图

Fig. 3　Partial isospectral partner potential of the Pöschl-Teller Ⅰ potential

3.4 **计算 Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱基态波函数 $\hat{\psi}_0^{(-)}(x)$**

根据(9)式可得它的同谱零能基态波函数 $\hat{\psi}_0^{(-)}(x)$ 为:

$$\hat{\psi}_0^{(-)}(x)=\cos^A x\ \sin^B x/\left\{\lambda-\cos^{1+2A}x\ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}+A,\frac{1}{2}-B,\frac{3}{2}+A,\cos^2 x\right)\sin^{-1+2B}x\ (\sin^2 x)^{\frac{1}{2}-B}(1+2A)^{-1}\right\}。\tag{30}$$

将 $A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}$ 代入(30)式,可得:$\hat{\psi}_0^{(-)}\left(x,A=\frac{1}{2},B=\frac{1}{2}\right)=-\frac{2\sqrt{\cos x}\sqrt{\sin x}}{-2\lambda+\cos^2 x}$。图4给出了 Pöschl-Teller Ⅰ势的部分同谱零能基态波函数图。从图4中可以看出当 $\lambda\to\infty$ 时,同谱零能基态波函数变为原始势零能基态波函数,即 $\hat{\psi}_0^{(-)}(x)\to\psi_0^{(-)}(x)=\cos^2 x\sin x$。

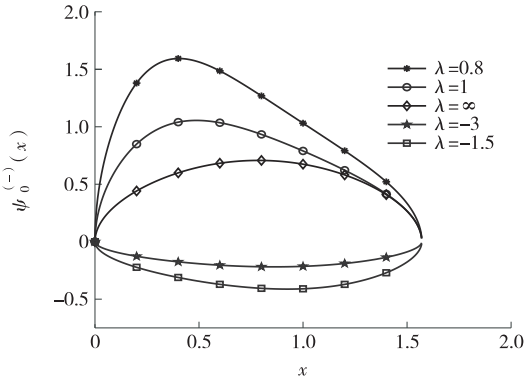

图4 Pöschl-Teller Ⅰ势的部分同谱零能基态波函数图

Fig. 4 Partial isospectral wave function of the Pöschl-Teller Ⅰ potential

4 总结

本文基于超对称量子力学理论,从势代数和同谱势两个方面对双参数 Pöschl-Teller Ⅰ势展开了研究:一方面,此前虽已存在采用构造势代数的方法求解能级,但仅是针对单参数的超势,这对于势代数的应用研究还不够深入,基于此本文进一步研究了势代数法在双参数势 Pöschl-Teller 势在超对称和超对称破缺两种情况下的能级求解的应用;另一方面,Pöschl-Teller Ⅰ势是超对称量子力学中满足薛定谔方程并能精确求解的为数不多的势中的一种。而同谱势族内的所有同谱势均具有可精确求解的能级和波函数,故本文对 Pöschl-Teller Ⅰ势的同谱势进行了研究,得到了对应的同谱势族从而大大增加可精确求解势的数目。

参考文献:

[1] SPIRIDONOV V. Exactly solvable potentials and quantum algebras[J]. Physical Review Letters,1992,69(3):398.

[2] DUTT R,KHARE A,VARSHNI Y. New class of conditionally exactly solvable potentials in quantum mechanics[J]. Journal of Physics A:Mathematical and General,1995,28(3):099189.

[3] BENBOURENANE J, ELEUCH H. Exactly solvable new classes of potentials with finite discrete energies[J]. Results in Physics,2020,17:103034.

[4] SASAKI R. Exactly solvable quantum mechanics[EB/OL]. (2014-11-11)[2021-12-23]https://arxiv.org/abs/1411.2703.

[5] DUTT R, KHARE A, SUKHATME U P. Supersymmetry, shape invariance, and exactly solvable potentials[J]. American Journal of Physics,1988,56(2):163-168.

[6] GANGOPADHYAYA A, MALLOW J V, RASINARIU C. Supersymmetric quantum mechanics: an introduction[M]. Singapore:World Scientific Publishing Company,2017.

[7] COOPER F,KHARE A,SUKHATME U. Supersymmetry and quantum mechanics[J]. Physics Reports,1995,251(5/6):267-385.

[8] BAGROV V G, SAMSONOV B F. Darboux transformation, factorization, and supersymmetry in one-dimensional quantum mechanics[J]. Theoretical and Mathematical Physics,1995,104(2):1051-1060.

[9] HALL B C. Lie groups,Lie algebras,and representations:an element introduction[M]. New York:Springer,2013.

[10] MIKULSKI D, KONARSKI J, EDER K, et al. Exact solution of the Schrödinger equation with a new expansion of anharmonic potential with the use of the supersymmetric quantum mechanics and factorization method[J]. Journal of Mathematical Chemistry, 2015, 53(9): 2018-2027.

[11] YADAV R K, BANERJEE S, KUMARI N, et al. One parameter family of rationally extended isospectral potentials[J]. Annals of Physics, 2022, 436: 168679.

[12] KHARE A, SUKHATME U P. Scattering amplitudes for supersymmetric shape-invariant potentials by operator methods[J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1988, 21(9): L501.

[13] SU W. Algebraic properties of the shape invariance condition[J]. Chinese Journal of Physics, 2013, 51(5): 918-935.

[14] OHYA S. Algebraic description of shape invariance revisited[EB/OL]. (2017-11-07)[2021-12-23]. https://arxiv.org/abs/1711.02422.

[15] BERGER M S, USSEMBAYEV N S. Isospectral potentials from modified factorization[J]. Physical Review A, 2010, 82(2): 022121.

[16] RASINARIU C, MALLOW J, GANGOPADHYAYA A. Exactly solvable problems of quantum mechanics and their spectrum generating algebras: a review[J]. Open Physics, 2007, 5(2): 111-134.

Study of Potential Algebra of Pöschl-Teller I Potential and Its Isospectral Potential

XIONG Lulin, TAN Xin, LUO Guang

(School of Physics and Electronic Engineering, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The PöschlTellerI potential is one of the few two-parameter potentials in supersymmetric quantum mechanics that satisfies Schr? dinger's equations and can be accurately solved. In order to increase the way to accurately solve the potential, the potential algebra is used to accurately solve its energy level under the condition of supersymmetry integrity and defection. At the same time, the isospectral potential of the Pöschl-Teller is constructed to increase the number of precise solvable potentials. [**Methods**]1) Based on the theory of supersymmetric quantum mechanics, the two-parameter potential algebra of the Pöschl-Teller I potential was studied, and the shape invariance of the potential algebra description is obtained by applying the pending coefficient method and the iterative method. When the supersymmetry is broken, the shape invariance of the potential algebra form is obtained by adjusting the parameters in two steps. 2) Construct a new super-potential family through shape invariance, so that it has the same energy level as the original potential, and make an image of the energy level for accurate comparison. [**Findings**]1) The corresponding energy spectrum when the supersymmetry is calculated and obtained according to the potential algebra. 2) The shape invariance of the potential algebra is obtained by adjusting the parameters in two steps, and the energy spectrum of the potential under the condition of supersymmetric breaking is calculated and obtained. 3) Comparing the images, it is found that the potential family has the same energy level as the original potential. [**Conclusions**]1) Comparing the calculation results obtained by the potential algebra method with the calculation results obtained by solving the Schr? dinger equation, it is found that the two are exactly the same, and it is concluded that the two-parameter potential algebra method is another new way to solve the potential energy level of Pöschl-TellerI. 2) The potential algebra method is still applicable in the case of solving supersymmetric breaking defects. 3) The homologous potential family of the PöschlTellerI potential can greatly enrich the number of precisely solvable potentials. The Pöschl-Teller I potential is one of the few two-parameter potentials in supersymmetric quantum mechanics that satisfies the Schrodinger equation and can be accurately solved.

Keywords: supersymmetry quantum mechanics; solvable potential; isospectral potential family; Pöschl-Teller Ⅰ potential

(责任编辑 许 甲)