DOI:10.11721/cqnuj20220510

给定匹配数的图的代数连通度的上界*

朱银芬[1]，王国平[2]
(1. 新疆工程学院 数理学院，乌鲁木齐 830029；2. 新疆师范大学 数学科学学院，乌鲁木齐 830017)

摘要:【目的】确定给定匹配数的 n 个点图的拉普拉斯代数连通度的上界与该上界所对应的极图。【方法】首先，利用图的匹配数与奇连通分支个数的关系与图的变换等方法刻画了给定匹配数的 n 个点图的拉普拉斯代数连通度上界所对应的极图；其次，利用具有相同邻点集的图与对应特征值的关系得到给定匹配数的 n 个点图的拉普拉斯代数连通度上界。【结果】借助图与补图的关系以及拉普拉斯特征方程证明得到给定匹配数的 n 个点图的拉普拉斯代数连通度的上界与该上界所对应的极图是一一对应且唯一确定的，从而同时确定了给定匹配数的 n 个点图的拉普拉斯代数连通度的上界以及此上界所对应的极图。【结论】用全新的方法同时确定了给定匹配数的 n 个点图的拉普拉斯代数连通度的上界以及此上界所对应的极图，克服了以往利用图的最小度，最大连通度与代数连通度的关系只刻画了给定匹配数的图中具有最大代数连通度的图类特征，但无法得到此类图的连通度的上界这一弊端。

关键词:拉普拉斯矩阵；代数连通度；匹配数
中图分类号:O157.5　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2022)06-0086-06

设图 $G=(V,E)$ 中的点集是 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$。点 v_i 所关联的边的个数被定义为点 v_i 的度，且记作 $d_G(v_i)$。若点 v_i 与点 v_j 由一条边连接，则 v_i 与 v_j 相互邻接。$\boldsymbol{A}(G)=(a_{ij})$ 表示 G 的邻接矩阵，若 v_i 与 v_j 邻接，那么 $a_{ij}=1$，否则 $a_{ij}=0$。由于图 G 是简单连通图，即 $\boldsymbol{A}(G)$ 是(0,1)的实对称矩阵。对角线上元素为 $d_G(v_i)$ 的 n 阶对角矩阵被记作 $\boldsymbol{D}(G)$，那么，图 G 的拉普拉斯矩阵为 $\boldsymbol{L}(G)=\boldsymbol{D}(G)-\boldsymbol{A}(G)$。且 $\boldsymbol{L}(G)$ 是半正定的实对称矩阵，将它的特征值做如下排序：

$$\lambda_1(\boldsymbol{L}(G))\geqslant\lambda_2(\boldsymbol{L}(G))\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\geqslant\lambda_n(\boldsymbol{L}(G))=0,$$

其中：$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 被称为 G 的代数连通度。

Fiedler[1]最早提出图 G 的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 定义，并且给出了关于 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 的性质。Merris[2]证明了若图 G 的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))>0$ 当且仅当该图是连通的。关于图 G 的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 的研究近年来受到了广泛的关注。Lu 等人[3]用图的直径以及边数刻画了图 G 的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 的下界。Grone 和 Merris[4]得到了 n 个点的图 G 中树的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 的界，此后他们又确定了给定度序列的图 G 的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 的下界[5]。Kirkland[6]证明了给定图 G 的割点的数量的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 的上界，并且刻画了 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 取到上界所对应的极图。Mohar[7]借助图 G 的直径与点数参数确定了 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 的下界。Chung[8]也确定了图 G 的 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))$ 与它的直径 d 的关系为 $d\leqslant\left\lceil\dfrac{\ln(n-1)}{\ln(1-l_{n-1})}\right\rceil$。Zhu[9]利用图的最小度，最大连通度与代数连通度的关系刻画了给定匹配数的图中具有最大代数连通度的图类特征，但由于以上方法的局限性并未得到此类图的连通度的上界。本文采用了一种新方法，不但刻画了此类图中的极图，而且得到了这个极图的代数连通度的一个上界。

1 相关引理

引理 1[10]　设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵，$\boldsymbol{M}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 $s(s<n)$ 阶主子阵，那么有 $\lambda_{i+n-s}(\boldsymbol{A})\leqslant\lambda_i(\boldsymbol{M})\leqslant\lambda_i(\boldsymbol{A})$ (1≤

* **收稿日期**:2022-02-17　**修回日期**:2022-08-22　**网络出版时间**:2022-09-19 13:46
资助项目:国家自然科学基金(No.11461071；No.11661077)；新疆维吾尔自治区天山英才(No.2018xgytsyc2-5)；新疆工程学院科研育人项目(No.2019xgy70211)
第一作者简介:朱银芬，女，讲师，研究方向为图论，E-mail：523222591@qq.com；**通信作者**:王国平，男，教授，博士，E-mail:xj.wgp@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20220919.1006.002.html

$i\leqslant s$)其中 λ_i 是 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 大特征值。

引理 2[11]　设 uv 是图 H 的一条边,若图 $G=H-uv$,那么图 G 与 H 的特征值就有如下的关系:

$$\lambda_1(H)\geqslant\lambda_1(G)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_{n-2}(G)\geqslant\lambda_{n-1}(H)\geqslant\lambda_{n-1}(G)\geqslant\lambda_n(H)=\lambda_n(G)=0。$$

若有 $X\subset V(G)$,那么图 G 的子图 $G-X$ 是将图 G 的 X 中的点与 X 中点相关联的边同时删除后得到的,若只删除 X 中点相关联的部分边得到的图则被称为 G 的生成子图。图 G 的一个匹配是指图 G 中不相邻的边的集合,那么图 G 的匹配数是指所有匹配中含有最大的边数。图 G 的奇连通分支是指它所含的点数是奇数的连通分支;若此连通分支具有偶数个点,那么,称此连通分支是偶连通分支。

引理 3[12-13]　若图 G 是匹配数为 m 点数为 n 的图,那么

$$n-2m=\max\{o(G-X)-|X|:X\subset(G)\},$$

其中 $o(G-X)$是图 $G-X$ 的奇连通分支的个数。

$N_G(u)$表示点 u 在 G 中的邻点集且 u 在 G 中的度用 $d_G(u)$表示,那么就有 $d_G(u)=|N_G(u)|$。若 u 和 v 是图 G 中不同的 2 个点,有 $N_G(v)=N_G(u)$,则 u 与 v 被称为 G 中的同邻点。

引理 4　设 G 是点数为 n 的图,$\{v_1,v_2,\cdots,v_P\}$是图 G 中的同邻点构成的集合,令 $w=d_G(v_i)$其中 $i\in\{1,2,\cdots,p\}$,那么就有 w 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值,且重数至少为 $p-1$。

证明　因为 $d_G(v_1)=d_G(v_2)=\cdots=d_G(v_P)=w$,即 $\boldsymbol{L}(G)-w\boldsymbol{I}_n$ 有 p 个相同的行(或列),这表明 w 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值,且重数至少为 $p-1$。

如果图 G 的一个子图 Y 是完全图,那么 Y 就被称为是 G 的一个团。

引理 5　设 G 是点数为 n 的图,K 是图 G 中的一个团,且有 $V(K)=\{v_1,v_2,\cdots,v_q\}$,如果 $N_G(v_i)-V(K)=N_G(v_j)-V(K)(1\leqslant i,j\leqslant q)$。令 $t=d_G(v_i)$ 其中 $i\in\{1,2,\cdots,q\}$。那么 $t+1$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值,且重数至少为 $q-1$。

证明　因为对于所有的 $1\leqslant i,j\leqslant q$ 都有 $N_G(v_i)-V(K)=N_G(v_j)-V(K)$,所以就有:

$$d_G(v_i)=d_G(v_j)=t\geqslant 1。$$

容易看到 $\boldsymbol{L}(G)-(t+1)\boldsymbol{I}_n$ 有 q 个相同的行(或列),这表明 $t+1$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值,且重数至少为 $q-1$。

证毕

令图 G 的补图记作 $\overline{G}$。

引理 6[2]　设 G 是点数为 n 的连通图,设图 G 与 $\overline{G}$ 的拉普拉斯谱分别是 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n=0$ 和 $\overline{\lambda_1}\geqslant\overline{\lambda_2}\geqslant\cdots\geqslant\overline{\lambda_n}=0$。那么就有 $\lambda_i+\overline{\lambda_{n-i}}=n$ $(1\leqslant i\leqslant n-1)$。

引理 7　设 G 是点数为 n 的连通图,若 $\overline{G}$ 有 μ 个连通分支,那么 n 是 $\boldsymbol{L}(\overline{G})$的一个特征值且重数是 $\mu-1$。

证明　由于图 $\overline{G}$ 有 μ 个连通分支,因此,0 作为 $\boldsymbol{L}(\overline{G})$的特征值,它的重数是 μ。由引理 6 得到 n 作为 $\boldsymbol{L}(G)$的特征值,它的重数是 $\mu-1$。

设 G_1 与 G_2 是点不相交的 2 个图,将它们的并记为 $G_1\cup G_2$;用 $G_1\vee G_2$ 表示将图 $G_1\cup G_2$ 的 G_1 中的每一个点连接 G_2 中的每一个点所得到的图。　证毕

引理 8　i) 若图 $G=K_m\vee\overline{K_{n-m}}(n>m)$,则 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))=m$;

ii) 若图 $G=K_{a,b}(b>a;a+b=n)$,则 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))=a$。

证明　i) 首先可以注意到,图 $G=K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 中 $V(\overline{K_{n-m}})$的 $n-m$ 个点都是同邻点,它们有相同的度 m。由引理 4 可知 m 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值且重数至少为 $n-m-1$。且注意到,$\overline{G}$ 中有 $m+1$ 个连通分支。根据引理 7 得到 n 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值且重数是 m。经过简单的计算,得 $K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 的拉普拉斯特征多项式 $f_{L(G)}(\lambda)=\lambda(\lambda-m)^{n-m-1}(\lambda-n)^m$。由于 $n>m$,于是得到 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_m\vee\overline{K_{n-m}}))=m$。

ii) 由引理 4 可知 a 与 b 分别是 $\boldsymbol{L}(G)$的 2 个特征值且重数至少分别为 $b-1$ 和 $a-1$。设图 $H=K_a\cup K_b$,那么由此可知,0 作为 $\boldsymbol{L}(H)$的特征值,且重数为 2。注意到,图 $\overline{H}=G$。根据引理 6 得到了 $a+b$ 是 $\boldsymbol{L}(\overline{H})$的一个特征值且重数为 1。因为 $b>a$,所以就有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_{a,b}))=a$。　证毕

若删除连通图 G 中的一些点,使得剩余的点构成的子图不连通的最小点数被称为图 G 的点连通度,这里记

为 $\kappa(G)$。

引理 9[1] 设图 G 是 n 个点的非完全图,即有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant\kappa(G)$。图 G 的最大度记作 $\Delta(G)$。

引理 10[5] 设图 G 至少有一条边,则有 $\lambda(\boldsymbol{L}(G))\geqslant\Delta(G)+1$。

2 定理及推论

图 G_n^m 为点数为 n,匹配数为 m 的图类。

定理 设图 $G\in G_n^m$,那么就有:

i) 若 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$,则 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant n$,当且仅当 $G\cong K_n$ 时取到等号。

ii) 若 $1\leqslant m\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$,则 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant m$,当且仅当 $G\cong K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 或者 $G\cong G'\vee\overline{K_{n-m}}$ 时取到等号,其中 G'是 K_m 的生成子图。

证明 i) 设 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$,由引理 2 可知,$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_n))=n$。

下面需证明:若 $G\ncong K_n$,则 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<n$。假定 u 与 v 是 K_n 中的 2 个点。若 $G\cong K_n-uv$,则 u 与 v 是 G 中的同邻点,且 $d_G(u)=d_G(v)=n-2$。由引理 4 得到 $n-2$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值。因此,就有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant n-2<n$。

若 G 是 K_n-uv 的生成子图,那么由引理 2 得 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_n-uv))$;进而有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<n$。

ii) 设 $1\leqslant m\leqslant\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor-1$,由引理 3 可知存在某个 $X_0\subseteq V(G)$使得 $n-2m=o(G-X_0)-|X_o|$。

记 $|X_0|=s$,$o(G-X_0)=k$。这时 $n-2m=k-s$。若 $s=0$,则由于 G 是连通图,故有 $k=1$,从而 $m=\frac{n-1}{2}$,这表明 n 是奇数,于是 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$,这一矛盾说明 $s\geqslant1$。若 $k\leqslant2$,则由上面的讨论可以看出 $s=1$ 或者 $s=2$。这样也有 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$,这一矛盾说明 $k\geqslant3$。

若 $k-s=1$,则 $n-2m=1$,于是 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。这一矛盾说明 $k-s\geqslant2$。通过上面的论证可以得到,若 $s=0$ 或 $k\leqslant2$ 或 $k-s=1$,那么 $m=\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor$。因此,下面认为$\begin{cases}k\geqslant3\\s\geqslant1\\k-s\geqslant2\end{cases}$。

设 $G-X_0$ 的所有连通分支为 $H_1,H_2,\cdots,H_k,H_{k+1},\cdots,H_t$,其中 $H_1,H_2,\cdots,H_k$ 是 $G-X_0$的奇连通分支,$H_{k+1},\cdots,H_t$是 $G-X_0$的偶连通分支。

下面将针对 s 与 m 的大小关系展开论证。

若 $s>m$,则由 $n-2m=k-s$ 得到 $k>n-m$,这样就 $n\geqslant k+s>m+(n-m)=n$,这一矛盾表明 $s\leqslant m$。首先假设 $s<m$。接下来将分为以下 2 种情形进行讨论。

1) $t=k$。这时,$G-X_0$ 的所有连通分支 $H_1,H_2,\cdots,H_k$,都为奇连通分支。设 $|V(H_i)|=n_i$,则 n_i 是奇数 $(i=1,2,\cdots,k)$。在 $G\cong K_s\vee(K_{n_1}\cup K_{n_2}\cup\cdots\cup K_{n_k})$的情况先进行验证。为方便书写,不妨假定 $n_1\leqslant n_2\leqslant\cdots\leqslant n_k$。若 $n_1=\cdots=n_k=1$ 则 $n=k+s$。注意到 $n-2m=k-s$。这样就有 $s=m$,这与 $s<m$ 矛盾。因此可以令 p 是$\{1,2,\cdots,k\}$中满足 $n_p\geqslant3$ 的最小数,那么就有 $n_1=\cdots=n_{p-1}=1$。设 $V(K_s)=\{v_1,v_2,\cdots,v_s\}$,并设 u_i 为 $K_{n_i}(i\leqslant s)$中与 v_i 邻接的一个点。设 M_i 是 $K_{n_i}(p\leqslant i\leqslant s)$不覆盖 u_i 的最大匹配,而 M_j 是 $K_{n_j}(s+1\leqslant j\leqslant k)$的最大匹配。令 $M=\{v_1u_1,v_2u_2,\cdots,v_su_s\}\cup M_p\cup M_{p+1}\cup\cdots\cup M_k$。明显可以看出,$M$ 就是 G 的一个匹配。这样就有 $m\geqslant|M|=s+\sum_{i=p}^{k}|M_i|=s+\sum_{i=p}^{k}\frac{n_i-1}{2}$。注意到,当 $p\leqslant i\leqslant k$ 时,$n_i\geqslant n_p$。因此,$m\geqslant|M|=s+\frac{n_p-1}{2}$·

$(k-p+1)$。

若 $p\geqslant 3$,则 $n_1=n_2=1$。设 u 与 v 分别是 K_{n_1} 与 K_{n_2} 的点,且 $d_G(v)=d_G(u)=s$。

由引理 4 便可得 s 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值,且重数至少是 1。可得到 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant s<m$。

若 $p=2$,那么 $n_1=1$,而对于所有的 $2\leqslant i\leqslant k$ 都有。且注意到 $k\geqslant 3$,由:

$$m\geqslant |M|=s+\frac{n_p-1}{2}(k-p+1),$$

得到 $m\geqslant s+2$。此时,$\kappa(G)=s$,$n_i\geqslant 3$,由引理 9 得到 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant\kappa(G)=s<s+2\leqslant m$,即有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。

若 $p=1$,则对于所有的 $1\leqslant i\leqslant k$ 都有 $n_i\geqslant 3$。下面将针对 $k\geqslant 3$ 的取值情况进行分类讨论。

若 $k\geqslant 4$,设 u 和 v 是 K_{n_1} 中不相同的两个点,则 $d_G(v)=d_G(u)=s+n_1-1$。由引理 5 可得到 $s+n_1$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值,且重数至少是 n_1-1。又由 $m\geqslant s+\frac{k(n_1-1)}{2}$,得到 $m\geqslant s+2(n_1-1)\geqslant s+n_1+1$。这表明,$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant s+n_1<s+n_1+1\leqslant m$,即有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。

当 $k=3$ 且 $n_3=3$ 时,由 $m\geqslant s+\frac{n_p-1}{2}(k-p+1)$,得到 $m\geqslant s+3$,此时仍有 $\kappa(G)=s$,由引理 9 得到 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant\kappa(G)=s<s+3\leqslant m$,即 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。

当 $k=3$ 且 $n_3\geqslant 5$ 时,设 u 和 v 是 K_{n_1} 中不同的 2 个点。且它的邻点集有 $N_G(v)-V(K_{n_1})=N_G(u)-V(K_{n_1})$,即有 $d_G(v)=d_G(u)=s+n_1-1$。由引理 5 可知 $s+n_1$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$的一个特征值,且重数至少是 n_1-1。由 $m\geqslant s+\frac{k(n_1-1)}{2}$,得到 $m\geqslant s+2(n_1-1)\geqslant s+n_1+1$。进一步得到 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant s+n_1<s+n_1+1\leqslant m$,即有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。

综上所述,当 $G\cong K_s\vee(K_{n_1}\cup K_{n_2}\cup\cdots\cup K_{nk})$时,$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。

当 $G\ncong K_s\vee(K_{n_1}\cup K_{n_2}\cup\cdots\cup K_{nk})$时,因为 G 是 $K_s\vee(K_{n_1}\cup K_{n_2}\cup\cdots\cup K_{nk})$的生成子图,所以由引理 2 可知,$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<K_s\vee(K_{n_1}\cup K_{n_2}\cup\cdots\cup K_{nk})$,进而有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。

2) $t>k$。在这种情形下,$G-X_0$ 不仅有 k 个奇连通分支,且有 $t-k$ 个偶连通分支。对所有的 $k+1\leqslant j\leqslant t$,设 u_j 是 H_j 上的一个点,在 G 中连接每一个 u_j 和 H_1 中的一个点 v_1,这时得到的图记为 G''。显然 $G''-X_0$ 的 k 个连通分支都是奇的,且 G''的匹配数 $m(G'')\geqslant m$。

由引理 3 就有 $n-2m\geqslant n-2m(G'')\geqslant o(G''-X_0)-|X_0|=o(G-X_0)-|X_0|=n-2m$,表明 $m(G'')=m$,即 $G''\in G_n^m$。

情形 1 已经表明,$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G''))<m$。由引理 2 知 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G''))$,于是就有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。至此,便证明了当 $s<m$ 时,都有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))<m$。假设 $s=m$,则由于 $n-2m=k-s$,得到 $k=n-m$。并且由于有 $n=|X_0|+\sum_{i=1}^{t}|V(H_i)|=m+\sum_{i=1}^{t}|V(H_i)|$,所以 $t=k=n-m$。这意味着 $G-X_0$ 的所有连通分支都是由单个孤立点构成的。

若 $G\cong K_m\vee\overline{K_{n-m}}$,则由引理 8 的结论 i)可知,$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_m\vee\overline{K_{n-m}}))=m$。

若 $G\ncong K_m\vee\overline{K_{n-m}}$,则 G 是 $K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 的生成子图。由引理 2 可知,$\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_m\vee\overline{K_{n-m}}))=m$。

若 $G\cong G'\vee\overline{K_{n-m}}$,则 $K_{m,n-m}$ 是 G 的生成子图,而 G 又是 $K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 的生成子图。由引理 2 与引理 8 可知:

$$m=\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_m\vee\overline{K_{n-m}}))\geqslant\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\geqslant\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(K_{m,n-m}))=m,$$

即有 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))=m$。

若 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))=m$,那么由第一部分的论证可得,$s=m$ 且 $t=k$;进而由上面的论证便可以确定 $G\cong K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 或 G 是 $K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 的生成子图。接下来则只需要用反证法说明:若 $G\ncong K_m\vee\overline{K_{n-m}}$,那么一定有 $G\cong G'\vee\overline{K_{n-m}}$。

假定 G 是经过删去 $K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 的一条边 uv 得到的,其中 $v\in V(K_m)$。那么 $\overline{G}=\overline{K_m}\cup K_{n-m}+uv$。

设 $\boldsymbol{X}=(x(v_1),\cdots,x(v_n))^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{L}(\overline{G})$ 对应于 $\lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))$ 的一个特征向量。

令 v_1 与 v_2 是 $V(K_{n-m}\backslash\{u\})$ 中2个不同的点，$S=\sum_{w\in V(K_{n-m})\backslash\{v_1,v_2,u\}}x(w)$。则由相应的特征方程有：

$$\begin{cases}\lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))x(v_1)=(n-m-1)x(v_1)-x(v_2)-x(u)-S\\ \lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))x(v_2)=(n-m-1)x(v_2)-x(v_1)-x(u)-S\end{cases}。$$

于是有 $(\lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))-(n-m))(x(v_1)-x(v_2))=0$。引理10表明，$\lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))>n-m$。因此可得到 $x(v_1)=x(v_2)$。这样，对任意的 $w\in V(K_{n-m}\{u\})$ 便可令 $x(w)=x_1$，$x(u)=x_2$ 且 $x(v)=x_3$。由特征方程 $\lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))x(v_i)=\sum_{v_i\sim v_j}(x(v_i)-x(v_j))$，可以得到：

$$\begin{cases}\lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))x_1=x_1-x_2\\ \lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))x_2=(n-m)x_2-(n-m-1)x_1-x_3\\ \lambda(\boldsymbol{L}(\overline{G}))x_3=x_3-x_2\end{cases}。$$

令 $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ m+1-n & n-m & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$，那么 $\boldsymbol{M}$ 的特征值也是 $\boldsymbol{L}(\overline{G})$ 的特征值。

经过简单的计算，可以确定，$n+1-m$ 是 $\boldsymbol{M}$ 的一个特征值，它也是 $\boldsymbol{L}(\overline{G})$ 的一个特征值。由引理6可知 $m-1$ 是 $\boldsymbol{L}(G)$ 的一个特征值。这表明 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))\leqslant m-1$，这与 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))=m$ 矛盾。因此，若 $\lambda_{n-1}(\boldsymbol{L}(G))=m$，则 $G\cong K_m\vee\overline{K_{n-m}}$ 或 $G\cong G'\vee\overline{K_{n-m}}$。

至此，完成了定理的证明。 证毕

参考文献：

[1] FIEDLER M. Algebraic connectivity of graphs[J]. Czechoslovak Mathematicae,1973,23:298-305.

[2] MERRIS R. Laplacian matrices of graphs[J]. Linear Algebra Applications,1994,197:143-176.

[3] LU M, ZHANG L, TIAN F. Lower bounds of the Laplacian spectrum of graphs based on diameter[J]. Linear Algebra Applications,2007,420:400-406.

[4] GRONE R,MERRIS R. Algebraic connectivity of trees[J]. Czechoslovak Mathematicae,1987,37:660-670.

[5] GRONE R,MERRIS R. The Laplacian spectrum of a graph II[J]. Discrete Mathematicae,1994,7(2):221-229.

[6] KIRKLAND S. A bound on algebraic connectivity of a graph in terms of the number of cutpoints[J]. Linear and Multilinear Algebra,2000,47:93-103.

[7] MOHAR B. Eigenvalues,diameter,and mean distance in graphs[J]. Graphs and Combinatorics,1991,7:53-64.

[8] CHUNG F. Diameters and eigenvalues[J]. Journal of the American Mathematical Society,1989,2:187-196.

[9] ZHU B. The algebraic connectivity of graphs with given matching number[J]. Graphs and Combinatorics,2013,29:1989-1995.

[10] BROUWER A,HAEMERS W H. Spectra of graphs[M]. New York:Springer,2012.

[11] HEUVEL J. Hamilton cycles and eigenvalues of graphs[J]. Linear Algebra Applications,1995,226:723-730.

[12] BERGE C. Sur le couplage maximum d'un graphe[J]. Comptes rendus de l'Académie des sciences Série I,Mathematicae,1958,247:258-259.

[13] TUTTE W. The factorization of linear graphs[J]. Bulletin of the London Mathematical Society,1947,22:107-111.

[14] DAS K. An improved upper bound for Laplacian graph eigenvalues[J]. Linear Algebra Applications,2003,368:269-278.

[15] GRONE R, MERRIS R, SUNDER V. The Laplacian spectrum of a graph[J]. Siam Journal on Matrix Analysis and Applications,1990,11(2):218-238.

[16] LI J,ZHANG X. On the Laplacian eigenvalues of a graph[J]. Linear Algebra Applications,1998,285:305-307.

[17] MOHAR B. The Laplacian spectrum of graphs[J]. Graph Theory Combinatorics Applications,1991,2:871-898.

[18] MERRIS R. A note on Laplacian graph eigenvalues[J]. Linear Algebra Applications,1998,285:33-35.

[19] ROJO O, SOTO R, ROJO H. An always non-trivial upper bound for Laplacian graph eigenvalues[J]. Linear Algebra

Applications,2000,312:155-159.

Upper Bounds of Algebraic Connectivity of a Graphs in Terms of Matching Number

ZHU Yinfen[1],WANG Guoping[2]

(1. School of Mathematical Physics, Xinjiang University of Engineering, Urumqi 830023;
2. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi 830054, China)

Abstract: [**Purposes**]Characterizing the extremal graphs with the upper bounds of algebraic connectivity among all graphs of n-vertex graphs in terms of matching number. [**Methods**]First, according to the relation between the matching number and the number of odd-connected branches of the graph and the transformation of the graph characterize the extremal graphs with the upper bounds of algebraic connectivity among all graphs of n-vertex graphs in terms of matching number. Then, the upper bound of the Laplacian algebraic connectivity of n-vertex graphs in terms of matching number is obtained by using the relation between graphs with the same set of adjacent vertices and their eigenvalues. Finally, by using the relation between graph and its complement graph and Laplace characteristic equation, it is proved that the upper bound of the Laplacian algebraic connectivity of n-vertex graphs in terms of matching number is projectively and uniquely determined with the corresponding the extremal graphs. [**Findings**]The paper got both the upper bound of Laplacian algebraic connectivity of n-vertex graphs in terms of matching number and the corresponding the extremal graphs. [**Conclusions**]It determines the extremal graphs with the upper bounds of algebraic connectivity among all graphs of n-vertex graphs in terms of matching number by a new method. At the same time, the method overcomes the problem that the graph class features with maximum algebraic connectivity in terms of matching numbers are characterized by the relation between smallest degree, maximum connectivity and algebraic connectivity of a graph, the upper bound of the connectivity of such graphs cannot be obtained.

Keywords: Laplacian matrix; algebraic connectivity; matching number

(责任编辑 许 甲)