运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20230118

固定区间下的可中断单机双代理总加权误工问题*

李中华[1]，唐小敏[3]，赵文平[2,3]，张新功[3]

(1. 乐山师范学院 电子信息与人工智能学院，四川 乐山 614000；2. 重庆巴蜀科学城中学校，重庆 401331；
3. 重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】研究在固定区间内工件可中断的单机双代理排序问题。【方法】每个代理都有各自对应的工件集合以及目标函数，它们只能共同使用 1 台机器来完成各自工件的加工，每个代理的目标都是最小化各自的目标函数。第一个代理工件可中断且到达时间与工期满足一致性关系，目标函数为总加权误工费用；第二个代理中工件位于固定时间窗口内进行加工。【结果】排序的目的是为了第二个代理中工件满足加工时间区间等于固定区间条件下，使得第一个代理的目标函数达到最小化。【结论】利用了分块的原则，给出了最优性质刻画和复杂性分析，以及设计了一个伪多项式时间动态规划算法。

关键词:双代理排序；总权误工；动态规划算法

中图分类号:O223　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)01-0015-06

多代理排序问题由 Agnetis 等人[1]提出，他们系统地提出了双代理排序模型，排序的目标是找到一个序列，在第二个代理的目标函数值不超过给定上界的情况下，第一个代理的目标函数值最小，考虑的目标函数有最大费用函数、总完工时间及误工工件数等。Leung 等人[2]考虑了工件允许中断的双代理排序问题、固定区间问题以及可用性约束问题。Emmons[3]证明在单台机器下，具有相等工期的总误工问题按照 SPT 规则排列是最优的，工时相等的总误工问题按照 EDD 规则排列是最优的，工期与加工时间一致时的总误工问题最优排序规则为 EDD 或 SPT 序。Tian 等人[4-5]利用分块原则和 Lawler 分别研究带有到达时间且工件可中断的等长工时的总误工问题和到达时间与工期一致时的可中断排序问题。陈秋宏等人[6]研究了带有固定区间的可中断总误工双代理排序问题，第一个代理中工件可中断，第二个代理工件固定时间窗口加工，利用分块原则给出了固定区间等于加工时间的伪多项时间动态规划算法，以及给出了固定区间大于加工时间的时间复杂度分析。Lawler[7]证明单机情况下总加权误工问题是强 NP 难的，Cheng 等人[8]提供了针对该问题的 $O(n^2)$时间逼近算法，并讨论总加权误工的两种排序模型：一是工期与工时是线性相关的，并且权重与工时也成正比关系；二是工期与工时线性相关，给出一个伪多项式算法。张新功等人[9]研究共同工期下的双代理单机排序问题，采用动态规划方法分别给出最优性质和相应的伪多项式时间算法。林浩等人[10]考虑工期分配的双目标排序问题。关于工期分配与加权误工数的单机双指标排序问题，针对约束形式及 Pareto 优化形式进一步研究了更多的模型。陈如冰等人[11]考虑工件具有加工位置上限的总加权误工的单机排序问题，证明相同工期时是一般意义下 NP 难的，并给出了一个伪多项式时间可解的算法，具有单位权重时，该排序问题是强 NP 难的。更多关于工期相关的问题可以参见文献[12-15]。

本文研究带有固定区间的单机双代理排序问题，第一个代理工件加工可中断，代理 A 的目标函数为总权误工费用，代理 B 的工件在固定时间窗口加工，在保证代理 B 的工件加工可行性的前提下，尽可能使得代理 A 的目标函数值更小。本文给出了最优性质刻画，并提出了一个伪多项式时间算法。

---

* **收稿日期**:2022-05-24　　**修回日期**:2022-11-09　　**网络出版时间**:2023-02-27　11:34

资助项目:国家自然科学基金重大项目(No. 11991022)；国家自然科学基金面上项目(No. 11971443)；重庆市教育委员会重点项目(No. KJZD-K202000501)；重庆市科学技术局项目(No. cstc2021jcyj-msxmX0229)；最优化理论与方法及其应用创新创业示范团队项目(No. CQYC20210309536)；川西南空间效应探测与应用四川省高等学校重点实验室基金(No. YBXM202201001)

第一作者简介:李中华，男，教授，研究领域为数据挖掘、系统科学，E-mail: lizhonghua@lsnu. edu. cn；**通信作者**:赵文平，男，高级教师，E-mail:zwpbk2003@126. com

网络出版地址:https://kns. cnki. net/kcms/detail/50. 1165. n. 20230224. 1506. 002. html

1 问题描述与最优性质

本文考虑的模型正式描述如下:存在两个代理,不妨令 A 和 B 各自工件在单台机器上进行加工,每个代理具有的目标函数 f^{A} 和 f^{B}。假设代理 X 的工件集为 $J^X=\{J_1^X,J_2^X,\cdots,J_{n_{\mathrm{A}}}^X\}$,$X\in\{\mathrm{A},\mathrm{B}\}$。进一步 p_j^X,r_j^X,w_j^X 和 d_j^X 分别表示工件 J_j^X 的加工时间、到达时间、权重和工期。

在双代理排序中三参数表示法为 $\alpha|\beta^{\mathrm{A}},\beta^{\mathrm{B}}|\gamma^{\mathrm{A}}:\gamma^{\mathrm{B}}$,其中:$\beta^X$ 表示代理 X 的工件特征参数,γ^X 表示代理 X 的目标函数。目标是在可行排序中找到代理 A 的工件可中断情形下,代理 B 工件的目标函数值不超过给定值的前提下,代理 A 的目标函数值最小的排序方案。本文研究的问题可表示为:

$$1|(r_j^{\mathrm{A}},d_j^{\mathrm{A}}),\mathrm{pmtn}^{\mathrm{A}},p_j^{\mathrm{B}}=d_j^{\mathrm{B}}-r_j^{\mathrm{B}}|\sum w_i^{\mathrm{A}}T_i^{\mathrm{A}}:\mathrm{fsbl}^{\mathrm{B}}。$$

其中:$T_i^{\mathrm{A}}=\max\{C_i^{\mathrm{A}}-d_i^{\mathrm{A}},0\}$表示代理 A 中工件 J_i^{A} 的误工费用,$p_j^{\mathrm{B}}=d_j^{\mathrm{B}}-r_j^{\mathrm{B}}$ 意味着代理 B 的工件 J_j^{B} 到达后需要立即加工,$\mathrm{fsbl}^{\mathrm{B}}$ 表示代理 B 的工件排在固定区间内是可行的。

假设所有工件都按照 ERD 规则(与之相关联的 EDD 规则、SPT 规则排列)。因此先到的工件具有较小的指标,即若 $r_i<r_j$,则 $i<j$;若有相同到达时间,工件按照 EDD 规则排列,那么工期较小的具有较小的指标,即若 $r_i=r_j$ 且 $d_i<d_j$,则 $i<j$;如果有两个或者两个以上的工件同时到达并且有相同工期,工件按照 SPT 规则排列,那么加工时间较小的具有较小的指标,即若 $r_i=r_j$,$d_i=d_j$ 且 $p_i\leqslant p_j$,则 $i<j$。

引理 1[5] 一个块 $B\subseteq N$ 被定义为从 $r(B)=\min\limits_{j\in B}\{r_j\}$开始到 $t(B)=r(B)+P(B)$,$P(B)=\sum\limits_{i\in B}p_i$,加工没有空闲的最小工件集,使得每一个工件 $i\notin B$ 的完工时间既不超过 $r(B)(C_i\leqslant r(B))$,也不会在 $t(B)$之前到达,即 $r_i\leqslant t(B)$。一个子块 $B_i\subseteq B$ 被定义为当块 B 中所有删除某些工件之后还能成为块的最小工件集;一个子块被称为最优的当且仅当 B_i 中的工件在$[r(B_i),t(B_i)]$加工时是一个最优的序列。

引理 2[5] 若块 B 中 m 个工件都已按照 ERD(或 WSPT 或 EDD 或 SPT)规则排列,设工件 k 满足 $p_k=\max\limits_{j\in B}\{p_j\}$且在块 B 中所有工件中指标最大,而工件集 $B\backslash\{k\}$被分成了若干子块 B_i,$i=1,2,\cdots,|B_i|$,再令 l 为子块 B_1 中的最大指标,那么存在最优排序:

1) 存在一个整数 δ 满足 $0\leqslant\delta<l-k$,当工件 J_j 满足 $j\leqslant k+\delta$ 且 $j\neq k$ 时,工件 J_j 排在工件 J_k 之前加工,当工件 J_j 满足 $j>k+\delta$ 时,工件 J_j 排在工件 J_k 之后加工;

2) 当工件 J_j 满足 $j\leqslant l$ 且 $j\neq k$ 时,工件 J_j 排在工件 J_l 之后,工件 J_k 之前加工。

2 加工时间等于固定区间总加权误工问题

当代理 B 中工件满足 $r_1^{\mathrm{B}}<d_1^{\mathrm{B}}\leqslant r_2^{\mathrm{B}}<d_2^{\mathrm{B}}<\cdots\leqslant r_{n_2}^{\mathrm{B}}<d_{n_2}^{\mathrm{B}}$,即代理 B 工件位于固定时间窗口加工时,有以下定理成立:

定理 1 问题 $1|(r_j^{\mathrm{A}},d_j^{\mathrm{A}}),\mathrm{pmtn}^{\mathrm{A}},p_i^{\mathrm{B}}=d_i^{\mathrm{B}}-r_i^{\mathrm{B}}|\sum w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}:\mathrm{fsbl}^{\mathrm{B}}$ 中,代理 A 中的工件可以中断,且 $w_{j+1}^{\mathrm{A}}\leqslant w_j^{\mathrm{A}}$,代理 B 中的工件在固定时间区间加工时,存在一个最优排序:

1) 当代理 B 中工件使得两个相邻代理 A 工件误工时,若工件 J_j^{A}、J_{j+1}^{A}、J_i^{B} 满足 $p_j^{\mathrm{A}}\leqslant p_{j+1}^{\mathrm{A}}$或者 $p_i^{\mathrm{B}}+p_j^{\mathrm{A}}\leqslant p_{j+1}^{\mathrm{A}}$,那么代理 A 的工件均按照引理 2 排列;

2) 当代理 B 中工件使得两个相邻代理 A 工件误工时,若工件 J_j^{A}、J_{j+1}^{A}、J_i^{B} 满足 $p_j^{\mathrm{A}}>p_{j+1}^{\mathrm{A}}$ 或者 $p_i^{\mathrm{B}}+p_j^{\mathrm{A}}>p_{j+1}^{\mathrm{A}}$,且工件 J_{j+1}^{A} 到达就加工,那么代理 A 中其余的工件均按照引理 2 排列。

证明 设代理 A 包含 n_1 个工件,代理 B 包含 n_2 个工件,把已到达的工件按照引理 1 划分成块,将块 B_i 中排列在工件 J_k^{A} 之前加工的代理 A 与代理 B 中的工件集合记为 N_{k-1},将排列在工件 J_k^{A} 之后的代理 A 与代理 B 中工件的集合记为 H,这样块 B_i 就被划分成了两个集合,那么当块 B_i 的排序方式达到最优时,整个序列的排列方式也可达到最优,故有如下讨论:

1) 工件 J_i^{B} 从一开始就到达,把块 B_1 看成由代理 A 和代理 B 的工件组成,那么想要使得代理 A 的总加权误工最小,需使得每一个块 B_i 的总加权误工最小。注意到工件 J_i^{B} 在固定时间窗口进行加工,那么若代理 A 中工件的总加权误工最小,需要使得代理 A 中的工件按照引理 2 排列即可。

2) 工件 J_i^{B} 不是从一开始就到达,但在工件 J_k^{A} 之前到达,分以下几种情况讨论:

2.1）工件 J_i^{B} 到达不中断任何一个代理 A 中工件的加工，因为 $p_k^{\mathrm{A}}=\max\limits_{j\in B_1}\{p_j^{\mathrm{A}}\}$，而工件 J_i^{B} 并没有影响代理 A 中工件的加工时间，只是让代理 A 中工件的完工时间延长。又因为工件 J_i^{B} 是在固定时间窗口加工，故工件 J_i^{B} 并不会影响代理 A 中工件的加工顺序，故代理 A 中工件此时依然按照引理 2 的排列最优。

2.2）工件 J_i^{B} 的到达中断代理 A 中工件 J_j^{A}，其中 $j<k$，那么重新定义被中断的工件 J_j^{A} 与工件 J_i^{B} 组成一个新的工件 $J_{j'}^{\mathrm{A}}$，有 $p_{j'}^{\mathrm{A}}=p_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}$，且工件 $J_{j'}^{\mathrm{A}}$ 的权重等于工件 J_j^{A} 的权重，接下来分为两种情况：

i）若 $p_{j'}^{\mathrm{A}}=p_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}\leqslant p_k^{\mathrm{A}}$，其中 $p_k^{\mathrm{A}}=\max\limits_{j\in B_1}\{p_j^{\mathrm{A}}\}$，即划分工件不变，依然为 J_k^{A}，则若求代理 A 中工件的最小总加权误工，依然按照引理 2 排列最优。

ii）若 $p_{j'}^{\mathrm{A}}=p_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}>p_k^{\mathrm{A}}$，则 $p_{j'}^{\mathrm{A}}=\max\limits_{j\in B_1}\{p_j^{\mathrm{A}}\}$，即工件 $J_{j'}^{\mathrm{A}}$ 为代理 A 的一个新的划分工件，由于工件 $J_{j'}^{\mathrm{A}}$ 包含了代理 B 中工件 J_i^{B} 不能被中断或者移动，则有：

a）代理 A 中工件 J_j^{A} 和工件 J_{j+1}^{A} 在工件 J_i^{B} 到达之后都不误工，且整个序列中的工件按照 ERD 规则排列，那么总加权误工问题等价于从工件 J_{j+2}^{A} 开始计算，那么代理 A 中工件依然按照引理 2 排列最优。

b）代理 A 中工件 J_j^{A} 和工件 J_{j+1}^{A} 在工件 J_i^{B} 到达之后都为误工工件，令最开始的序列为 σ，如果工件 J_{j+1}^{A} 比工件 J_i^{B} 先到达，那么工件 J_j^{A} 和工件 J_{j+1}^{A} 的总加权误工费用为：

$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\sigma)+w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(C_j^{\mathrm{A}}(\sigma)-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(C_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)-d_{j+1}^{\mathrm{A}})=$$
$$w_j^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_j^{\mathrm{A}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}-d_{j+1}^{\mathrm{A}})。$$

又因为 $r_{j+1}^{\mathrm{A}}\leqslant r_i^{\mathrm{B}}$，利用二交换法证明总加权误工最小。交换工件 J_j^{A} 与工件 J_{j+1}^{A} 得到新的序列 π，则工件 J_j^{A} 与工件 J_{j+1}^{A} 的总加权误工为：

$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)+w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(C_j^{\mathrm{A}}(\pi)-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot\max\{C_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)-d_{j+1}^{\mathrm{A}},0\}。$$

若在序列 π 中，工件 J_{j+1}^{A} 依旧误工，则有：

$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)+w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(C_j^{\mathrm{A}}(\pi)-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(C_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)-d_{j+1}^{\mathrm{A}})=$$
$$w_j^{\mathrm{A}}\cdot(p_i^{\mathrm{B}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{\mathrm{A}}+r_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(p_i^{\mathrm{B}}+r_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}-d_{j+1}^{\mathrm{A}})。$$

进而有：

$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\sigma)+w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)-w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)-w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)=w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(p_j^{\mathrm{A}}+r_j^{\mathrm{A}}-r_{j+1}^{\mathrm{A}})-w_j^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}=$$
$$w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}-r_{j+1}^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot p_j^{\mathrm{A}}-w_j^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}。$$

因为 $r_{j+1}^{\mathrm{A}}>r_j^{\mathrm{A}}$，故当 $w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot p_j^{\mathrm{A}}-w_j^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}>|w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}-r_{j+1}^{\mathrm{A}})|$ 时，要求工件 J_{j+1}^{A} 从到达便开始加工，而剩下的工件按照引理 1 排列即为最优；若 $w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\sigma)+w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)-w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)-w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)\leqslant 0$，当 $w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot p_j^{\mathrm{A}}-w_j^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}\leqslant|w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}-r_{j+1}^{\mathrm{A}})|$ 时，按照引理 2 排列即为最优。在序列 π 中工件 J_{j+1}^{A} 依旧误工，有：

$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)+w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(p_i^{\mathrm{B}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{\mathrm{A}}+r_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}})。$$

进而有：

$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\sigma)+w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)-w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)-w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)=w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(p_i^{\mathrm{B}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{\mathrm{A}}+r_j^{\mathrm{A}}-d_{j+1}^{\mathrm{A}})-w_j^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}\leqslant$$
$$w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(p_i^{\mathrm{B}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{\mathrm{A}}+r_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}})-w_j^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}=w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(p_i^{\mathrm{B}}+p_j^{\mathrm{A}}+r_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}-w_j^{\mathrm{A}}\cdot p_{j+1}^{\mathrm{A}}。$$

又 $w_j^{\mathrm{A}}\leqslant w_{j+1}^{\mathrm{A}}$，故上式小于 0，即工件按照引理 2 排列即为最优。

c）代理 A 中工件 J_j^{A} 和工件 J_{j+1}^{A} 在工件 J_i^{B} 到达之后且仅有一个工件是误工的。若工件 J_j^{A} 为误工工件，且工件 J_j^{A} 的加权误工最小，那么只需工件 J_j^{A} 的总完工时间最小，则工件按照 ERD 规则排列即为最优，令初始序列为 σ，交换过后的序列为 π，那么工件 J_j^{A} 的总加权误工为：

$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\sigma)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(C_j^{\mathrm{A}}(\sigma)-d_j^{\mathrm{A}})=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}}),$$
$$w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(C_j^{\mathrm{A}}(\pi)-d_j^{\mathrm{A}})=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}})。$$

则 $w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\sigma)-w_j^{\mathrm{A}}T_j^{\mathrm{A}}(\pi)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(-p_{j+1}^{\mathrm{A}})<0$。即工件按照序列 σ 排列时最优。

若工件 J_{j+1}^{A} 为误工工件，同样令初始序列为 σ，交换过后的序列为 π，那么工件 J_{j+1}^{A} 的总加权误工为：

$$w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)=w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(C_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)-d_{j+1}^{\mathrm{A}})=w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(p_i^{\mathrm{B}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{\mathrm{A}}+r_j^{\mathrm{A}}-d_{j+1}^{\mathrm{A}})。$$
$$w_{j+1}^{\mathrm{A}}T_{j+1}^{\mathrm{A}}(\pi)=w_j^{\mathrm{A}}\cdot(C_j^{\mathrm{A}}(\sigma)-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(C_{j+1}^{\mathrm{A}}(\sigma)-d_{j+1}^{\mathrm{A}})=$$
$$w_j^{\mathrm{A}}\cdot(r_j^{\mathrm{A}}+p_i^{\mathrm{B}}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{\mathrm{A}}-d_j^{\mathrm{A}})+w_{j+1}^{\mathrm{A}}\cdot(r_{j+1}^{\mathrm{A}}+p_j^{B}+p_{j+1}^{\mathrm{A}}-d_{j+1}^{\mathrm{A}})。$$

由于 $w_j^A \leqslant w_{j+1}^A$,$d_j^A \leqslant d_{j+1}^A$,$p_j^A \leqslant p_{j+1}^A$,故上式小于 0。

3) 工件 J_i^B 刚好在工件 J_k^A 加工的时候到达,其中 $p_k=\max_{j\in B} p_j$,则工件 J_k^A 和工件 J_i^B 视为一个新的工件 $J_{k'}^A$,且有 $p_{k'}^A=p_k^A+p_i^B>p_k^A$,那么把工件 $J_{k'}^A$ 看成一个新的划分工件,而工件 J_i^B 在固定窗口加工,故工件按照引理 1 排列为最优。

4) 工件 J_i^B 在工件 J_k^A 之后到达,但在 $t(B_1)=r(B_1)+p(B_1)$ 之前到达,那么:

4.1) 工件 J_i^B 没有中断代理 A 中的工件加工,则不会影响代理 A 中工件排序,按照引理 2 排列为最优。

4.2) 工件 J_i^B 到达中断工件 J_j^A 的加工,其中 $i>k$,那么重新定义被中断的工件 J_j^A 与工件 J_i^B 组成一个新的工件 $J_{j'}^A$,有 $p_{j'}^A=p_j^A+p_i^B$,且工件 $J_{j'}^A$ 的权重视为与工件 J_j^A 的权重相同,有以下两种情况:

i) 若 $p_{j'}^A=p_j^A+p_i^B \leqslant p_k^A$,其中 $p_k^A=\max_{j\in B_1}\{p_j^A\}$,划分工件不变依然为 J_k^A,接下来再划分集合 $B\backslash\{k\}$,而代理 A 中的工件前移,若工件 J_k^A 前移之后,代理 B 的工件中断工件 J_g^A,此时把代理 B 的工件 J_i^B 和工件 J_j^A 视为属于代理 A 的一个新的工件,依然按照引理 2 排列最优。若工件 J_k^A 前移之后,代理 B 的工件没有中断代理 A 中的任何工件,则代理 B 中的工件不影响代理 A 中工件的排列顺序。

ii) 若 $p_{j'}^A=p_j^A+p_i^B>p_k^A$,那么 $p_{j'}^A=\max_{j\in B_1}\{p_j^A\}$,即工件 $J_{j'}^A$ 为代理 A 的一个新的划分工件,并把工件 J_j^A 之前的工件按照引理 1 的规则排列,令 $N_{i-1}=\{1,\cdots,i-1\}$,若要使得 $w_{N_{i-1}}T_{N_{i-1}}$ 最小,那么按照引理 1 排列,选取 $p_k^A=\max_{j\in B_1}\{p_j^A\}$,A 代理中的工件前移,按照 ERD 规则进行排列。

5) 工件 J_i^B 是块 B 中最后一个完工的工件,则问题可简化为求最小化代理 A 工件的总加权误工,此时 A 代理中工件按照引理 2 排列为最优。

综上所述,对于 $p_j^A>p_{j+1}^A$ 或者 $p_j^A+p_i^B>p_{j+1}^A$ 的误工工件,若使其一到达就开始加工,那么所有工件按照引理 2 的方式进行排列即为最优。

3 问题的动态规划算法

1) 把代理 A,B 中的工件按照 ERD(或 WSPT 或 EDD 或 SPT)规则排列,代理 B 中的工件在固定区间内加工。

2) 把代理 A 中的工件 J_k^A 看成一个划分工件,其中 $p_k^A \geqslant p_i^B$。

2.1) 如果代理 B 中工件 J_i^B 的到达中断了代理 A 中 $A\backslash\{k\}$ 的工件,那么把代理 A 中被中断的工件 J_j^A 与代理 B 中的工件 J_i^B 视为代理 A 的一个新的工件,记为 $J_{k'}^A$,且 $p_{k'}^A=p_j^A+p_i^B$。

i) 如果有 $p_{k'}^A=p_j^A+p_i^B \leqslant p_k^A$,工件按照引理 1 排列。

ii) 如果有 $p_{k'}^A=p_j^A+p_i^B>p_k^A$,那么工件 J_{j+1}^A 到达就加工,进而继续加工工件 J_j^A,其余工件按照引理 1 的顺序进行加工。

2.2) 如果代理 B 中工件 J_i^B 的到达中断了代理 A 工件 J_k^A,那么令 $p_{k'}^A=p_j^A+p_i^B>p_k^A$,此时选取把工件 $p_{k'}^A$ 视为一个新的划分工件,由于工件 J_i^B 不能移动,故后面的工件前移,转 2.1)。

3) 把块 $B\backslash\{k\}$ 分成若干子块,第一个子块记为 B_1,记 l 是块 B_1 中代理 A 工件的最大指标,则 $r(B_1)=r(B)$。对于 $\delta=0,1,\cdots,l-k-1$,用 S_k^δ 表示以下排序:

3.1) 已知代理 B 中工件在固定窗口排列,而代理 A 中工件集合 $\{J_1,\cdots,J_{k+\delta}\}\backslash\{J_k\}$ 从 r^A 时间开始加工,且有:

$$r^A=\begin{cases} r(B_1), & r_{B_{i1}}^A<r_{B_{i1}}^B \\ C_i^B, & r_{B_{i1}}^A \geqslant r_{B_{i1}}^B \end{cases}$$

表示块 B_1 中第一个代理 A 工件开始加工时间,$r_{B_{i1}}^X$ 为块 B_i 中代理 X 的首个工件到达时间,下一步排列:

3.2) 代理 A 中工件 J_k^A,完工时间为 $C_k^A(\delta)=r^A+\sum_{j\leqslant k+\delta} p_j^A+\sum_{i=1}^{m} p_i^B$,其中 m 为在 r^A 之后,且在工件 J_k^A 之前加工的代理 B 工件个数,下一步排列:

3.3) 代理 A 中的工件集 $\{J_{k+\delta}^A,\cdots,J_{n_1^A}\}$ 以及其余的代理 B 工件。同样用 S_k^δ 表示以下排列:

3.4）代理A中的工件集$\{J_1,\cdots,J_l\}\backslash\{J_k\}$，它从$r^A$时间开始加工，下一步排列：

3.5）代理A中的工件集$\{J_{l+1},\cdots,J_{n_1}\}\cup\{J_k\}$，它某种顺序从$t(B_1)=r^A+\sum_{j\in B_1}p_j^A+\sum_{i\in B_1}p_i^B$开始加工。

综上所述，在1)中，用$B(i,j,k)$来表示块B中，代理A的首个加工工件是工件J_i^A，最后一个加工工件是工件J_j^A，加工时间最长的是工件J_k^A。由于代理A中有n_1个工件，故$B(1,n_1,k)=\{j\mid 1\leqslant j\leqslant n_1,p_j^A\leqslant p_k^A\}$，且令第一次迭代$B(1,n_1,\varnothing)=B$。令$WT(B(B(1,n_1,k)t^A)$为代理A中集合$B(1,n_1,k)$中工件的总加权误工，$t^A$指工件从时间$t^A$时刻起开始加工，那么：

$$WT(B(1,n_1,k),t^A)=\sum_{j\in B(1,n_1,k)}w_j^AT_j^A,$$

在2)中，重新定义了代理A的一个新的划分工件J_k^A以及对应指标l'。在3)中，将块B划分成子块B'，且它包含代理A中指标相邻的工件集$\{J_i^A,\cdots,J_j^A\}$如3.3)，则令：$B(i,j,k')=\{j'\mid i\leqslant j'\leqslant j,p_{j'}^A\leqslant p_k^A\}$。

若子块B'包含工件集$\{J_i^A,\cdots,J_j^A\}\backslash\{k'\}$如3.1)、3.4)，则令：$B^-(i,j,k')=\{j\mid i\leqslant j'\leqslant j,p_{j'}^A\leqslant p_k^A\}\backslash\{k'\}$。若子块B′包含工件集$\{J_i^A,\cdots,J_j^A\}\cup\{k'\}$如3.5)，则令：$B^+(i,j,k')=\{j'\mid i\leqslant j'\leqslant j,p_{j'}^A\leqslant p_k^A\}\cup\{k'\}$。

递推函数如下：

$$\begin{aligned}WT(B(1,n_1,k),t^A)=&\sum_{j\in B(1,n_1,k)}w_j^A\min\{\min[T(B^-(1,k'+\delta,k'),t^A)+\max(0,C_{k'}^A(\delta)-d_{k'}^A)+\\&T(B^+(k'+\delta+1,n_1,k'),C_{k'}^A(\delta)),T(B^+(1,l',k'),t^A)+T(B^+(l'+1,n_1,k'),t(B_1))]。\end{aligned}$$

其中：$r_{B_{i1}}^A<r_{B_{i1}}^B$，$t^A=r(B_1)$或者$r_{B_{i1}}^A\geqslant r_{B_{i1}}^B$时，$t^A=r(B_1)+C_j^B$，且

$$C_k^A(\delta)=r^A+\sum_{j\leqslant k+\delta}p_j^A+\sum_{i=1}^{m}p_i^B,\ t(B_1)=r^A+\sum_{j\in B_1}p_j^A+\sum_{i\in B_1}p_i^B。$$

由上述可知算法的正确性，下面给出问题的算法复杂度：

由于代理A有n_1个工件，故$B(i,j,k)$的运算时间为$O(n_1^3)$，且$t^A\leqslant P^A\leqslant n_1p_k^A$，这里$P^A$指代理A中工件的总加工时间，且整个算法运行时间为$O(n_1)$，又因为代理B工件在固定窗口内加工，且代理B有$n_2$个工件，则问题

$$1\mid(r_j^A,d_j^A),\mathrm{pmtn}^A,p_i^B=d_i^B-r_i^B\mid\sum w_j^AT_j^A:\mathrm{fsbl}^B$$

的时间复杂度为$O(n_1^4p^A+n_2)$。

4 结束语

本文讨论了固定区间下的可中断单机双代理总加权误工问题，代理A的工件可中断加工，它的目标函数为总加权误工，代理B在固定时间区间进行加工，通过分析证明得到了结果：当代理B中工件的加工时间等于固定区间时，利用分块原则以及Lawler算法，提出了当前问题的一个最优排序以及拟多项式时间动态规划算法和复杂性分析。未来可以考虑固定区间长度大于等于工件加工时间，代理A的工件达到时间和工期具有一般关系的情形，或者其他机器类型。

参考文献：

[1] AGNETIS A, MIRCHANDANI P B, PACCIARELLI D. Scheduling problems with two competing agents[J]. Operations Research, 2004, 52(2): 229-242.

[2] LEUNG J Y T, PINEDO M, WAN G H. Competitive two-agent scheduling and its applications[J]. Operations Research, 2010, 58(2): 458-469.

[3] EMMONS H. One-machine sequencing to minimize certain functions of job tardiness[J]. Operations Research, 1969, 17(4): 701-715.

[4] TIAN Z J, NG C T, CHENG T C E. An $O(n^2)$ algorithm for scheduling equal-length preemptive jobs on a single machine to minimize total tardiness[J]. Journal of Scheduling, 2006, 9(4): 343-364.

[5] TIAN Z J, NG C T, CHENG T C E. Preemptive scheduling of jobs with agreeable due dates on a single machine to minimize total tardiness[J]. Operations Research, 2009, 37(5): 368-374.

[6] 陈秋宏，张新功. 带有固定区间的单机双代理可中断总误工问题[J]. 运筹学学报，2019，23(1)：61-71.

CHEN Q H,ZHANG X G. Two-agent preemptive scheduling of jobs with fixed time windows problem about total tardiness on a single machine[J]. Operations Research Transactions,2019,23(1):61-71.

[7] LAWLER E L. A "pseudopolynomial" algorithm for sequencing jobs to minimize total tardiness[J]. Annals of Discrete Mathematics,1977,1:331-342.

[8] CHENG T C E,NG C T,YUAN J J,et al. Single machine scheduling to minimize total weighted tardiness[J]. European Journal of Operational Research,2005,165(2):423-443.

[9] 张新功,崔同欣.共同工期下的总权误工单机双代理排序问题[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2022,39(1):35-40.
ZHANG X G, CUI T X. Single-machine two-agent scheduling problem with common due date to minimize total weighted tardiness[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2022,39(1):35-40.

[10] 林浩,何程.关于工期分配与加权误工数的双指标排序问题[J].工程数学学报,2017,1:73-86.
LIN H, HE C. On bicriteria scheduling of due date assignment and weighted number of tardy jobs[J]. Chinese Journal of Engineering Mathematics,2017,1:73-86.

[11] 陈如冰,原晋江.工件具有加工位置上限最小化加权总误工量的单机排序问题[J].运筹学学报,2020,24(2):131-144.
CHEN R B, YUAN J J. Single-machine scheduling to minimize total weighted late work with positional due-indices[J]. Operations Research Transactions,2020,24(2):131-144.

[12] 万国华.排序与调度的理论,模型和算法[M].北京:清华大学出版社,2019.
WAN G H. Scheduling theory,modelling and algorithm[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2019.

[13] YIN Y Q,WANG D J,CHENG T C E. Due date-related scheduling with two agents:models and algorithms[M]. Singapore: Springer,2020.

[14] CHEN Z L,NICHOLAS G H. Supply chain scheduling[M]. Cham:Springer,2022.

[15] YU S H,WU Z G. A three criteria scheduling problem with two competing agents[J]. Computers & Industrial Engineering, 2021,162:107754.

Operations Research and Cybernetics

Total Weighted Tardiness with Preempted Jobs and Fixed Time Windows on a Single Two-Agent Machine

LI Zhonghua[1], TANG Xiaomin[3], ZHAO Wenping[2,3], ZHANG Xingong[3]

(1. School of Electronic Information and Artificial Intelligence, Leshan Normal University, Leshan Sichuan,614000;
2. Science City Middle School of Chongqing Bashu Secondary School, Chongqing 401331;
3. School of Mathematics Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] Total weighted tardiness problems can be computed by the completion time of jobs after their due date. [**Methods**] It studies two-agent scheduling problems with fixed time windows on a single machine, the objective function is to minimize the total weighted tardiness of the first agent. Two agent scheduling problem means that each agent has its job set, in which it can be processed in the common machine, and is used to minimize the its objective function. Assume that jobs of the first agent is preempted, there exists an agreeable condition for due date and release date. [**Findings**] The jobs of the second agent are processed in some fixed due date window. [**Conclusions**] By the block principle, the time complexity of the proposed problem is put forward and a pseudo-polynomial time dynamic programming algorithm is presented when a fixed time window equals the processing time.

Keywords: two-agent scheduling; total weighted tardiness; dynamic programming algorithm

(责任编辑 许 甲)