运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20230116

基于 Benson 标量化方法的多目标优化问题解集刻画*

钟　游，高　英
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】基于 Benson 标量化方法研究多目标优化问题有效解集和真有效解集空性的刻画。【方法】利用标量化方法和稠密性结果研究多目标优化问题有效解集和真有效解集的空性刻画。【结果】首先得出了自然锥序下 Benson 标量化问题无界的等价刻画，并在此基础上给出了多目标优化问题有效解集和真有效解集为空集的必要条件。其次得到了字典序下有效解集和 Borwein 真有效解集为空集的条件，同时对假设条件进行举例说明。最后给出了一般锥序下 Benson 标量化问题无界的必要条件，以及多目标优化问题有效解和 Benson 标量化问题最优解的关系。【结论】针对凸和非凸多目标优化问题给出解集的空性刻画。

关键词:多目标优化;Benson 标量化方法;解集刻画

中图分类号:O221.2　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)01-0088-07

在金融投资、交通运输、企业管理等诸多领域中，通常会遇到需要同时优化多个目标的情形。这类问题是在一定约束条件下对一个向量值映射进行极小化或极大化处理，并称为多目标优化问题。多目标优化问题最早是由法国经济学家 Pareto 在经济福利问题中提出，并在文献[1]中引进 Pareto 最优的概念。经典的 Pareto 有效解就是利用“找不到比之更好的就是最好的”思想提出来的[2]。由于多目标优化问题的有效解可能不具有标量化性质且有效解集一般比较大。因此，许多学者提出了各种类型的真有效解对有效解进行限制。Geoffrion 于 1968 年在文献[3]中基于有界权衡提出一类真有效解，称为 Geoffrion 真有效解。随后，Benson[4] 和 Henig[5] 针对多目标优化问题分别提出了 Benson 真有效解和 Henig 真有效解的概念。由于直接求解多目标优化问题比较困难，故大多数情况下是将多目标优化问题转化为数值优化问题进行求解，该方法称为标量化方法。标量化方法分为线性和非线性标量化方法，其中，针对满足一定凸性条件的多目标优化问题通常采用线性标量化方法[6]。对于非凸的多目标优化问题，主要运用非线性标量化方法进行求解。非线性标量化方法的研究是非常广泛的，如 ε-约束法[7]、混合法[8]和 Pascoletti-Serafini 法[9]等。特别地，Benson[10] 引入了一种 Benson 标量化方法，并在凸性条件下给出了有效解集和真有效解集空性的刻画。随后，Guddat 等人在文献[11]中结合加权标量化方法和 Benson 标量化方法给出了一个混合模型。文献[12]得到了多目标优化问题有效解与 Benson 标量化问题最优解之间的关系。最近，Soleimani-Damaneh 和 Zamani 在文献[13-14]中给出了没有凸性条件假设下真有效解集的空性的刻画。并将自然锥序下 Benson 标量化方法的模型推广到了一般锥序，研究了一般锥序下真有效解集的空性刻画。

在文献[10,14]的基础上，本文主要讨论了多目标优化问题有效解集和真有效解集的空性刻画。首先给出了一些基本的概念和定理，讨论自然锥序下 Benson 标量化问题无界的等价刻画。再利用紧性条件下有效解集的非空性，得到了多目标优化问题有效解集为空集的必要条件。结合真有效解集的稠密性条件，得到了真有效解集为空集的必要条件。进一步，利用有效解集和真有效解集之间的的关系，得到了 Borwein 真有效解集和字典锥序下有效解集为空集的条件。最后给出了一般锥序下 Benson 标量化问题无界的必要条件，以及多目标优化问题有效解和 Benson 标量化问题最优解的关系。

* **收稿日期**:2022-10-17　　**网络出版时间**:2023-02-24　09:37

资助项目:国家自然科学基金(No. 12171063);重庆市科学技术研究重点项目(No. KJZDK202001104);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆市自然科学基金(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114);重庆市留学人员回国创业创新支持计划(No. cx2020096)

第一作者简介:钟游，女，研究方向为多目标优化理论，E-mail:zhongyou19981228@163.com;**通信作者**:高英，女，教授，博士，E-mail:gaoyingimu@163.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230223.1618.004.html

1 预备知识

$\mathbf{R}^n$ 表示 n 维欧几里得空间,$\mathbf{R}^n_+$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 的非负象限,即 $\mathbf{R}^n_+=\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n: x_j\geqslant 0,\forall j=1,2,\cdots,n\}$。

设 $C\subseteq\mathbf{R}^n$ 是点凸锥,给定向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$,定义基于锥 C 的序关系:

$$\boldsymbol{x}\leqslant_C\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in C;\boldsymbol{x}<_C\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{y}-\boldsymbol{x}\in\operatorname{int}C。$$

C 的正极锥和严格正极锥分别定义为:

$$C^+:=\{\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n:\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{d}\rangle\geqslant 0,\forall\boldsymbol{d}\in C\},\ C^{s+}:=\{\boldsymbol{v}\in\mathbf{R}^n:\langle\boldsymbol{v},\boldsymbol{d}\rangle>0,\forall\boldsymbol{d}\in C\backslash\{0\}\}。$$

设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 非空,cl A 是 A 的闭包。$\overline{x}\in\mathrm{cl}\,A$,$T(A,\overline{\boldsymbol{x}})$是 A 在$\overline{\boldsymbol{x}}$ 点处的切锥。

文献[12]中给出了字典锥的定义:$\mathrm{C}^{\mathrm{k}}_{lex}:=\{0\}\cup\{\boldsymbol{d}\in\mathbf{R}^n\mid\exists i\in\{1,\cdots,n\},\mathrm{s.t.}\,d_i>0,d_j=0,\forall j<i\}$。

考虑多目标优化问题(MOP):

$$\min f(\boldsymbol{x})=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))^{\mathrm{T}},\boldsymbol{x}\in X,$$

其中:$f:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R}^m$,$X\subseteq\mathbf{R}^n$。

定义 1[12]　设 $f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{I}}_k:=\min f_k(x),\boldsymbol{x}\in X,k=1,\cdots,m$,则称 $f(\boldsymbol{x})^{\mathrm{I}}=(f(x)^{\mathrm{I}}_1,\cdots,f(x)^{\mathrm{I}}_m)$是多目标优化问题的理想点。

下面给出多目标优化问题有效解和真有效解的概念,以下定义中假设 C 是点凸锥。

定义 2[12]　设$\hat{\boldsymbol{x}}\in X$,若$(f(\hat{\boldsymbol{x}})-C)\cap f(X)=\{f(\hat{\boldsymbol{x}})\}$,则称$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为问题(MOP)关于锥 C 的有效解。特别地,$C=\mathbf{R}^m_+$时,$\hat{\boldsymbol{x}}$ 称为 Pareto 有效解。

定义 3[12]　设$\hat{\boldsymbol{x}}\in X$,若$(f(X)-f(\hat{\boldsymbol{x}}))\cap(-C^k_{\mathrm{lex}})=\{0\}$,则称$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为问题(MOP)在字典序下的有效解。

定义 4[3-5]　设$\hat{\boldsymbol{x}}\in X$,则:

1) 若存在 $M>0$ 使得对任意满足 $f_i(\boldsymbol{x})<f_i(\hat{\boldsymbol{x}})$的 i 和 $\boldsymbol{x}\in X$,至少存在一个 j 使得 $f_j(\hat{\boldsymbol{x}})<f_j(\boldsymbol{x})$且 $\dfrac{f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\boldsymbol{x})}{f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\hat{\boldsymbol{x}})}\leqslant M$,则称$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为问题(MOP)的 Geoffrion 真有效解。

2) 若 $\mathrm{cl}(\mathrm{cone}(f(X)+C-f(\hat{\boldsymbol{x}})))\cap(-C)=\{0\}$,则称$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为问题(MOP)关于锥 C 的 Benson 真有效解。

3) 若存在内部非空的闭点凸锥 K,满足 $C\backslash\{0\}\subseteq\mathrm{int}(K)$且$(f(\hat{\boldsymbol{x}})-K)\cap f(X)=\{f(\hat{\boldsymbol{x}})\}$,则称$\hat{\boldsymbol{x}}$ 为问题(MOP)关于锥 C 的 Henig 真有效解。

注 1　文献[5]指出,在自然锥下,上述 3 个真有效解的定义等价。

为了表示方便,本文分别用 X_{E},$X^{\mathrm{lex}}_{\mathrm{E}}$ 和 $X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{E}}$ 表示问题(MOP)的 Pareto 有效解集、字典序下的有效解集和一般锥序下的有效解集。X_{PE} 和 $X^{\mathrm{C}}_{\mathrm{PE}}$ 分别表示 Geoffrion 真有效解集和一般锥序下的真有效解集。分别用 Y_{N} 和 Y_{PN} 表示问题(MOP)的 Pareto 有效解和 Geoffrion 真有效解对应函数值的集合。分别用 $Y^{\mathrm{C}}_{\mathrm{N}}$ 和 $Y^{\mathrm{C}}_{\mathrm{PN}}$ 表示问题(MOP)在一般锥序下有效解和真有效解对应函数值的集合。

定义 5[15]　设 $\hat{x}\in X$,若 $T(f(X)+C,f(\hat{x}))\cap(-C)=\{0\}$,则称 $\hat{x}$ 为问题(MOP)关于锥 C 的 Borwein 真有效解。

注 2　文献[12]指出,Pareto 有效解、字典序下有效解、Benson 真有效解和 Borwein 真有效解有如下关系:

1) 设 X 为凸集且 $f_k:\mathbf{R}^n\rightarrow\mathbf{R},k=1,\cdots,m$ 为凸函数,则问题(MOP)的 Benson 真有效解和 Borwein 真有效解等价。

2) 字典序下有效解集和 Pareto 有效解集有如下关系:$X^{\mathrm{lex}}_{\mathrm{E}}\subseteq X_{\mathrm{E}}$。反过来包含关系不一定成立,见例 1。

3) 字典序下有效解集和 Geoffrion 真有效解集没有相互包含关系,见例 1 和例 2。

例 1　设 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2\mid x_2\geqslant -x_1\}$且 $f_1(x_1,x_2)=x_1$,$f_2(x_1,x_2)=x_2$,则(0,0)是 Pareto 有效解,但不是字典序下有效解。

例 2　设 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2\mid 0<x_1\leqslant 1,-1\leqslant x_2\leqslant 1\}\cup\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2\mid x_1=0,0\leqslant x_2\leqslant 1\}$且 $f_1(x_1,x_2)=x_1$,$f_2(x_1,x_2)=x_2$,则(0,0)是字典序下有效解,但不是 Geoffrion 真有效解。由例 1 知(0,0)是 Geoffrion 真有效解,但不是字典序下有效解。

定义 6　设 $C\subseteq\mathbf{R}^m$ 是一个凸锥,$Y\subseteq\mathbf{R}^m$ 非空,若:1) $Y+C$ 是闭的,则称集合 Y 为 C-闭的;2) 若 $Y+C$ 是凸

的,则称集合 Y 为 C-凸的。

文献[10]针对问题(MOP)建立了如下 Benson 标量化模型:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{k=1}^{m} l_k, \\ \text{s.t.} \quad & f_k(\boldsymbol{x}^0) - l_k - f_k(\boldsymbol{x}) = 0, k = 1, \cdots, m, \\ & l_k \geqslant 0, k = 1, \cdots, m, \\ & \boldsymbol{x} \in X。\end{aligned} \tag{1}$$

其中:$\boldsymbol{x}^0 \in X$。

Ehrgott 在文献[12]中对问题(1)进行推广,得到了如下模型:

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(\boldsymbol{x}), \\ \text{s.t.} \quad & f_k(\boldsymbol{x}) \leqslant f_k(\boldsymbol{x}^0), k = 1, 2, \cdots, m, \\ & \boldsymbol{x} \in X。\end{aligned} \tag{2}$$

其中:$\boldsymbol{x}^0 \in X, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m > 0$。文献[12]给出问题(MOP)有效解和 Benson 标量化问题最优解之间的关系。文献[13]给出了问题(MOP)有效解集和真有效解集的空性刻画。

引理 1[12] $\boldsymbol{x}^0$ 是问题(2)的最优解当且仅当 $\boldsymbol{x}^0$ 是问题(MOP)的有效解。

引理 2[13] 1) 设 $f(X)$ 是 $\mathbf{R}_+^m$-闭且 $\mathbf{R}_+^m$-凸的。若问题(2)无界,则 $X_E = \varnothing$。2) 若问题(2)无界,则 $X_{PE} = \varnothing$。

注 3 若 $\lambda_k = 1, k = 1, \cdots, m$,问题(2)退化为问题(1)。

2 自然锥序下解集刻画

本节主要基于 Benson 标量化方法研究自然锥序下多目标优化问题解集的空性。首先给出自然锥序下 Benson 标量化问题无界的等价刻画。

定理 1 问题(2)无界当且仅当 $(\{f(\boldsymbol{x}^0)\} - \mathbf{R}_+^m) \cap f(X)$ 无界。

证明 先证明充分性。由 $(\{f(\boldsymbol{x}^0)\} - \mathbf{R}_+^m) \cap f(X)$ 无界可知,存在 $\{x_n\} \subseteq X$ 使得:

$$f(x_n) \in \{f(\boldsymbol{x}^0)\} - \mathbf{R}_+^m, n \in \mathbf{N},$$

且当 $n \to \infty$ 时,$\|f(x_n)\| \to \infty$。由 $f(x_n) \in \{f(\boldsymbol{x}^0)\} - \mathbf{R}_+^m, n \in \mathbf{N}$ 可知:

$$f_k(\boldsymbol{x}^0) \geqslant f_k(x_n), k = 1, \cdots, m。$$

因此,存在 $l \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $f_l(x_n) \to -\infty, n \to \infty$。

又由 $\lambda_k > 0, k = 1, \cdots, m$ 可知:$\lambda_l f_l(x_n) \to -\infty, n \to \infty$。因此,$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x_n) \to -\infty$,$n \to \infty$。这表明问题(2)无界。

再证明必要性。假设对任意的 $\lambda_k > 0, k = 1, 2, \cdots, m$,问题(2)无界,则对任意的正无穷大量 $\{M_n\} \subseteq \mathbf{R}$,存在 $\{x_n\} \subseteq X$ 使得 $f_k(x_n) \leqslant f_k(\boldsymbol{x}^0), k = 1, 2, \cdots, m$,且 $\sum_{k=1}^{m} \lambda_k f_k(x_n) < -M_n$。

因此,存在 $l \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $\lambda_l f_l(x_n) < -M_j, j \to \infty$,即 $f_l(x_n) < -M_j / \lambda_l, j \to \infty$。这表明 $f_l(x_n) \to -\infty, n \to \infty$。从而有 $\|f(x_n)\| \to \infty, n \to \infty$。

再结合条件 $f_k(x_n) \leqslant f_k(\boldsymbol{x}^0), k = 1, \cdots, m$,有 $f(x_n) \in \{f(\boldsymbol{x}^0)\} - \mathbf{R}_+^m, n \in \mathbf{N}$。因此 $(\{f(\boldsymbol{x}^0)\} - \mathbf{R}_+^m) \cap f(X)$ 无界。 证毕

推论 1 若问题(2)无界,则问题(MOP)不存在理想点。

证明 若问题(2)无界,则由定理1必要性条件证明可知,存在 $\{x_n\} \subseteq X, n \in \mathbf{N}, l \in \{1, \cdots, m\}$ 使得 $f_l(x_n) \to -\infty, n \to \infty$,故问题(MOP)不存在理想点。 证毕

注 4 推论1的逆命题为:若问题(MOP)不存在理想点,则存在 $\boldsymbol{x}^0 \in X, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m > 0$,问题(2)无界。例3说明推论1的逆命题不一定成立。

例 3 设 $X = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid x_2 \geqslant -x_1\}$ 且 $f_1(x_1, x_2) = x_1, f_2(x_1, x_2) = x_2$。该例说明问题(MOP)不存

在理想点，对于任意 $\boldsymbol{x}^0\in X,\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m>0$，问题(2)有界。

下面在注 2 和引理 2 的基础上，利用一定条件下 Pateto 有效解、字典序下有效解、Borwein 真有效解和 Benson 真有效解的关系得到以下结果。

推论 2　设 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-闭且 $\mathbf{R}_+^m$-凸的。若问题(2)无界，则 $X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{lex}}=\varnothing$。

证明　由注 2 可知 $X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{lex}}\subseteq X_{\mathrm{E}}$，再由引理 2 可知结论成立。　证毕

下面分别举例说明 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-凸和 $\mathbf{R}_+^m$-闭条件必不可少。

例 4　设 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1\geqslant1\}\cup\mathbf{R}_+^2$ 且 $f_1(x_1,x_2)=x_1,f_2(x_1,x_2)=x_2$，则 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^2$-闭的，但 $f(X)$不是 $\mathbf{R}_+^2$-凸的。取定 $\boldsymbol{x}^0=(2,2)$，则问题(2)无界，但 $X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{lex}}=\{(0,0)\}\neq\varnothing$。这说明 $\mathbf{R}_+^m$-凸条件必不可少。如图 1 所示。

例 5　设 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2\,|\,x_1>0\}\cup\{(0,0)\}$且 $f_1(x_1,x_2)=x_1,f_2(x_1,x_2)=x_2$，则 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^2$-凸的，但 $f(X)$不是 $\mathbf{R}_+^2$-闭的。取定 $\boldsymbol{x}^0=(1,1)$，问题(2)无界，但 $X_{\mathrm{E}}^{\mathrm{lex}}=\{(0,0)\}\neq\varnothing$。说明 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-闭条件必不可少。如图 2 所示。

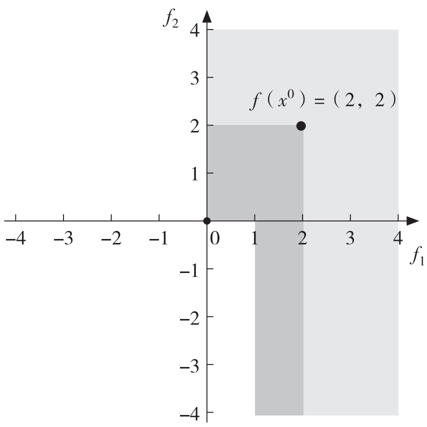

图 1　例 4 说明图

Fig. 1　Example 4 illustration

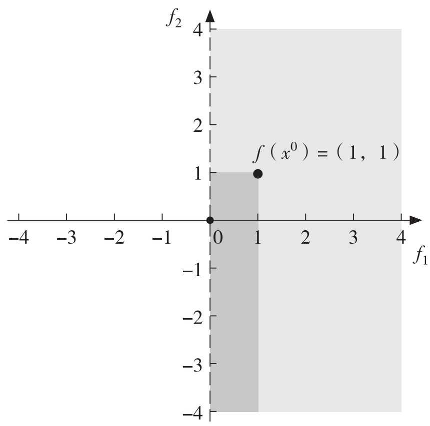

图 2　例 5 说明图

Fig. 2　Example 5 illustration

推论 3　设 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-凸的。若问题(2)无界，则 Borwein 真有效解集为空集。

证明　若 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-凸的，由注 2 可知，Borwein 真有效解和 Benson 真有效解等价。又由引理 2 可知结论成立。　证毕

下面举例说明 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-凸条件必不可少。

例 6　设 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1\geqslant1\}\cup\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_2\geqslant1\}\cup\mathbf{R}_+^2$ 且 $f_1(x_1,x_2)=x_1,f_2(x_1,x_2)=x_2$，则 $f(X)$不是 $\mathbf{R}_+^2$-凸的。取定 $\boldsymbol{x}^0=(2,2)$，问题(2)无界，但(0,0)为 Borwein 真有效解。如图 3 所示。

定理 2　设 $f(X)$是闭的。若 $X_{\mathrm{E}}=\varnothing$，则对任意 $\boldsymbol{x}^0\in X$，问题(2)无界。

证明　假设存在 $\boldsymbol{x}^0\in X$ 使得问题(2)有界，则由定理 1 可知$(\{f(\boldsymbol{x}^0)\}-\mathbf{R}_+^m)\cap f(X)$有界。又由 $f(X)$的闭性可知$(\{f(\boldsymbol{x}^0)\}-\mathbf{R}_+^m)\cap f(X)$是闭的。因此，$(\{f(\boldsymbol{x}^0)\}-\mathbf{R}_+^m)\cap f(X)$是紧集。由文献[16]定理 4.1 可知 $Y_{\mathrm{N}}\neq\varnothing$，从而有 $X_{\mathrm{E}}\neq\varnothing$，这与假设矛盾，故结论成立。　证毕

定理 3　设 $f(X)$是闭的且 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-凸的。若 $X_{\mathrm{PE}}=\varnothing$，则对任意 $\boldsymbol{x}^0\in X$，问题(2)无界。

证明　设 $f(X)$是闭的且 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-凸的。由文献[17]可知，真有效点集的稠密性成立，即：$Y_{\mathrm{PN}}\subseteq Y_{\mathrm{N}}\subseteq\mathrm{cl}\,Y_{\mathrm{PN}}$。由 $X_{\mathrm{PE}}=\varnothing$，可知 $Y_{\mathrm{PN}}=\varnothing$，故 $\mathrm{cl}\,Y_{\mathrm{PN}}=\varnothing$。因此 $Y_{\mathrm{N}}=\varnothing$，有 $X_{\mathrm{E}}=\varnothing$。又由定理 2 可知结论成立。　证毕

下面举例说明 $f(X)$是 $\mathbf{R}_+^m$-凸条件条件必不可少。

例 7　设 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1\geqslant1\}\cup\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_2\geqslant1\}\cup\mathbf{R}_+^2$ 且 $f_1(x_1,x_2)=x_1,f_2(x_1,x_2)=x_2$，则 $f(X)$是闭的，但 $f(X)$不是 $\mathbf{R}_+^2$-凸的且 $X_{\mathrm{PE}}=\varnothing$。若取 $\boldsymbol{x}^0=(1/2,1/2)$，则问题(2)有界。如图 4 所示。

定理 4　若 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是问题(2)的最优解，则 $\hat{\boldsymbol{x}}\in X_{\mathrm{E}}$。

证明　设$\hat{\boldsymbol{x}}$是问题(2)的最优解。若$\hat{\boldsymbol{x}}\notin X_E$,则存在$\boldsymbol{x}\in X$使得$f_k(\boldsymbol{x})\leqslant f_k(\hat{\boldsymbol{x}}),k=1,\cdots,m$,且至少存在一个$j\in\{1,\cdots,m\}$,有$f_j(\boldsymbol{x})<f_j(\hat{\boldsymbol{x}})$。

由$\hat{\boldsymbol{x}}$是可行解,对任意$\boldsymbol{x}^0\in X$满足$f_k(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant f_k(\boldsymbol{x}^0),k=1,\cdots,m$。从而有$f_k(\boldsymbol{x})\leqslant f_k(\boldsymbol{x}^0),k=1,\cdots,m$,故$\boldsymbol{x}$是问题(2)的可行解。

再由$\lambda_k>0,k=1,\cdots,m$可知,$\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\boldsymbol{x})<\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\hat{\boldsymbol{x}})\leqslant\sum_{k=1}^{m}\lambda_k f_k(\boldsymbol{x}^0)$。这与$\hat{\boldsymbol{x}}$是问题(2)的最优解矛盾。　　证毕

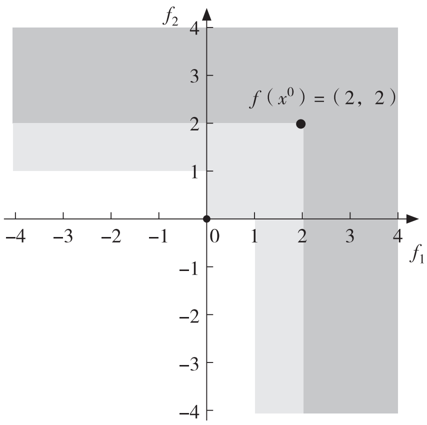

图3　例6说明图

Fig. 3　Example 6 illustration

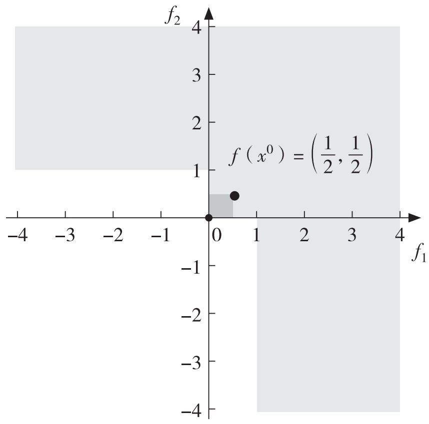

图4　例7说明图

Fig. 4　Example 7 illustration

3 一般锥序下解集刻画

文献[14]将自然锥序下的Benson标量化模型(2)推广到了一般锥序下的模型。

$$\begin{aligned}&\min\ \lambda^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x}),\\&\text{s.t. } f(\boldsymbol{x}^0)-f(\boldsymbol{x})\in C,\\&\boldsymbol{x}\in X。\end{aligned}\tag{3}$$

其中:$C\subseteq\mathbf{R}^m$是一个闭点凸锥,$\lambda\in C^+\setminus\{0\}$且$\boldsymbol{x}^0\in X$。

引理3[14]　若$X_{PE}^C\neq\varnothing$,则对任意$\boldsymbol{x}^0\in X$,问题(3)有界。

定理5　设$f(X)$是C-闭、C-凸的。若问题(3)无界,则$X_E^C=\varnothing$。

证明　若$f(X)$是C-闭、C-凸的。由文献[17]定理5.5可知$Y_{PN}^C\subset Y_N^C\subset\mathrm{cl}\ Y_{PN}^C$。

若问题(3)无界,则由引理3可知$X_{PE}^C=\varnothing$。因此$Y_{PN}^C=\varnothing$,有$\mathrm{cl}\ Y_{PN}^C=\varnothing$,得到$Y_N^C=\varnothing$,从而$X_E^C=\varnothing$。

证毕

定理6　若问题(3)无界,则$(\{f(\boldsymbol{x}^0)\}-C)\cap f(X)$无界。

证明　若问题(3)无界,则存在$\{x_n\}\subseteq X$且$f(\boldsymbol{x}^0)-f(x_n)\in C$使得$\lambda^{\mathrm{T}}f(x_n)\leqslant -n,\forall n\in\mathbf{N}$。

由$|\lambda^{\mathrm{T}}f(x_n)|\leqslant\|\lambda\|\|f(x_n)\|$有$n\leqslant|\lambda^{\mathrm{T}}f(x_n)|\leqslant\|\lambda\|\|f(x_n)\|$,得到:

$$\|f(x_n)\|\geqslant n/\|\lambda\|,\forall n\in\mathbf{N}。$$

因此有$\|f(x_n)\|\to\infty,n\to\infty$。由$f(x_n)\in\{f(\boldsymbol{x}^0)\}-C,\forall n\in\mathbf{N}$可知,$f(x_n)\in(\{f(\boldsymbol{x}^0)\}-C)\cap f(\boldsymbol{x})$。这表明$(\{f(\boldsymbol{x}^0)\}-C)\cap f(X)$无界。　　证毕

定理7　若存在$\lambda\in C^{s+}$使得$\boldsymbol{x}^0$是问题(3)的最优解,则$\boldsymbol{x}^0\in X_E^C$。

证明　设$\boldsymbol{x}^0$是问题(3)的最优解。若$\boldsymbol{x}^0\notin X_E^C$,则存在$\boldsymbol{x}\in X$使得$f(\boldsymbol{x}^0)-f(\boldsymbol{x})\in C\setminus\{0\}$,则$\boldsymbol{x}$是问题(3)的可行解。对任意$\lambda\in C^{s+}$,有$\lambda^{\mathrm{T}}(f(\boldsymbol{x}^0)-f(\boldsymbol{x}))>0$,即$\lambda^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x}^0)>\lambda^{\mathrm{T}}f(\boldsymbol{x})$。这与$\boldsymbol{x}^0$是问题(3)的最优解矛盾。　　证毕

定理8　若$\boldsymbol{x}^0\in X_E^C$,则对任意$\lambda\in C^+\setminus\{0\}$,$\boldsymbol{x}^0$是问题(3)的最优解。

证明　设 $\boldsymbol{x}^0\in X_E^C$，则不存在 $\boldsymbol{x}\in X$ 使得 $f(\boldsymbol{x}^0)-f(\boldsymbol{x})\in C\backslash\{0\}$。

问题(3)的任意可行解 $\boldsymbol{x}$ 满足 $f(\boldsymbol{x}^0)-f(\boldsymbol{x})\in C$，故 $f(\boldsymbol{x}^0)=f(\boldsymbol{x})$，从而对任意的 $\lambda\in C^+\backslash\{0\}$ 有 $\lambda^T f(\boldsymbol{x}^0)=\lambda^T f(\boldsymbol{x})$。因此 $\boldsymbol{x}^0$ 是问题(3)的最优解。　证毕

定理 9　若存在 $\lambda\in C^{s+}$，$\boldsymbol{x}^0\in X$，$\hat{\boldsymbol{x}}$ 是问题(3)的最优解，则 $\hat{\boldsymbol{x}}\in X_E^C$。

证明　设 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是问题(3)的最优解，若 $\hat{\boldsymbol{x}}\notin X_E^C$，则存在 $\boldsymbol{x}\in X$ 使得 $f(\hat{\boldsymbol{x}})-f(\boldsymbol{x})\in C\backslash\{0\}$，对任意 $\lambda\in C^{s+}$，有 $\lambda^T(f(\hat{\boldsymbol{x}})-f(\boldsymbol{x}))>0$，即 $\lambda^T f(\hat{\boldsymbol{x}})>\lambda^T f(\boldsymbol{x})$。

由 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是可行解，则对任意 $\boldsymbol{x}^0\in X$，满足 $f(\boldsymbol{x}^0)-f(\hat{\boldsymbol{x}})\in C$，有 $\lambda^T(f(\boldsymbol{x}^0)-f(\hat{\boldsymbol{x}}))\geqslant 0$，即：

$$\lambda^T f(\boldsymbol{x}^0)\geqslant\lambda^T f(\hat{\boldsymbol{x}})。$$

故对任意 $\lambda\in C^{s+}$，有 $\lambda^T f(\boldsymbol{x}^0)>\lambda^T f(\boldsymbol{x})$，即

$$\lambda^T(f(\boldsymbol{x}^0)-f(\boldsymbol{x}))>0。$$

因此，$f(\boldsymbol{x}^0)-f(\boldsymbol{x})\in C$，故 $\boldsymbol{x}$ 是可行解。

从而有 $\lambda^T f(\boldsymbol{x}^0)\geqslant\lambda^T f(\hat{\boldsymbol{x}})>\lambda^T f(\boldsymbol{x})$，这与 $\hat{\boldsymbol{x}}$ 是问题(3)的最优解矛盾。　证毕

注 4　定理 9 中的 $\lambda\in C^{s+}$ 不能换成 $\lambda\in C^+\backslash\{0\}$，见例 8。

例 8　设 $X=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1\leqslant 0\}$ 且

$$f_1(x_1,x_2)=x_1,f_2(x_1,x_2)=x_2,$$

取定 $\boldsymbol{x}^0=(-2,2)$，$C=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1\leqslant 0,x_2\geqslant 0\}$，则 $C^+=C$，如图 5 所示。当 $(\lambda_1,\lambda_2)^T=(-1,0)^T\in C^+\backslash\{0\}$ 时，问题(3)的最优解集是 $\overline{X}=\{(x_1,x_2)\in\mathbf{R}^2:x_1=0,x_2\leqslant 2\}$，但 $\overline{X}$ 里的任意最优解都不是问题(MOP)的有效解。

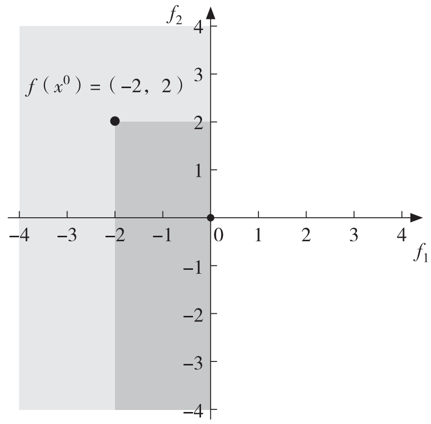

图 5　例 8 说明图

Fig. 5　Example 8 illustration

参考文献：

[1] PARETO V. Cours d'economie politique[M]. Geneva: Librairie Droz, 1896.

[2] KUHN H W, TUCKER A W. Nonlinear programming[M]. Berkeley: University of California Press, 1951.

[3] GEOFFRION A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 22(3): 618-630.

[4] BENSON H P. An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, 71(1): 232-241.

[5] HENIG M I. Proper efficiency with respect to cones[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1982, 36(3): 387-407.

[6] GEOFFRION A M. Solving bicriterion mathematical programs[J]. Operations Research, 1967, 15(1): 39-54.

[7] CHANKONG V, HAIMES Y Y. Multiobjective decision making: theory and methodology[M]. North-Holland: Courier Dover Publications, 2008.

[8] HUANG X X, YANG X Q. On characterizations of proper efficiency for nonconvex multiobjective optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2002, 23(3): 213-231.

[9] PASCOLETTI A, SERAFINI P. Scalarizing vector optimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, 42(4): 499-524.

[10] BENSON H P. Existence of efficient solutions for vector maximization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1978, 26(4): 569-580.

[11] GUDDAT J, GUERRA V F, TAMMER K, et al. Multiobjective and stochastic optimization based on parametric optimization[J]. Akademie, 1985, 26(1): 175-191.

[12] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[13] SOLEIMANI-DAMANEH M, ZAMANI M. On Benson's scalarization in multiobjective optimization[J]. Optimization Letters, 2016, 110(8): 1757-1762.

[14] ZAMANI M. Scalarization and stability in multi-objective optimization[D]. Iran: University of Tehran, 2016.

[15] BORWEIN J M. Proper efficient points for maximization with respect to cones. SIAM Journal on Control and Optimization,

1977,15(1),57-63.
[16] BORWEIN J M. On the existence of Pareto efficient points[J]. Mathematics of Operations Research,1983,8(1):64-73.
[17] HARTLEY R. On cone-efficiency,cone-convexity and cone-compactness[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,1978,34(2):211-222.

Operations Research and Cybernetics

Characterization of Solution Set of Multiobjective Optimization Problem Based on Benson's Method

ZHONG You, GAO Ying
(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]To study the characterization of the emptiness of efficient solution set and properly efficient solution set for multiobjective optimization problems based on Benson's method. [**Methods**]By using the scalarization method and the density results to study the characterization of the emptiness of the efficient solution set and the properly efficient solution set of multiobjective optimization problems. [**Findings**]Firstly, obtaining the equivalent characterization of unbounded Benson scalarization problem under natural cone order, and on this basis, giving the necessary conditions that the efficient solution set and the properly efficient solution set of multiobjective optimization problem are empty sets. Secondly, obtaining the conditions that the efficient solution set and the Borwein properly efficient solution set under dictionary order are empty sets, and give examples to illustrate the assumptions. Finally, the necessary conditions for the unbounded Benson scalar problem under the general cone order are given, and the relationship between the effective solution of the multiobjective optimization problem and the optimal solution of the Benson scalar problem is also given. [**Conclusions**]For convex and nonconvex multiobjective optimization problems, the emptiness of solution sets is characterized.

Keywords: multiobjective optimization; Benson's method; characterization of solution set

(责任编辑 黄 颖)