运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20230101

高阶弧式连通不变凸多目标半无限规划的最优性条件*

安　刚[1]，高晓艳[2]，王快妮[1]

(1. 西安石油大学 理学院，西安 710065；2. 西安科技大学 理学院，西安 710054)

摘要:【目的】研究多目标半无限规划问题的最优性充分条件。【方法】利用弧式连通(AC)函数和次线性函数，定义了一类高阶(B,F)-AC-V-typeⅠ不变凸函数，在新广义凸性假设下研究了一类含有不等式约束的多目标半无限规划问题。【结果】得到了若干最优性充分条件。【结论】所得结果丰富了多目标半无限规划理论。

关键词:高阶(B,F)-AC-V-typeⅠ不变凸函数；多目标半无限规划；弱有效解；最优性条件

中图分类号:O221.6；O224　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)01-0123-06

多目标规划又被称为多准则决策，是指目标函数个数至少为两个且有限的数学规划问题，它的主要研究内容为多个目标在约束条件下可以达到的最优解。由于多目标规划应用范围广泛，因此许多学者致力于研究多目标规划问题。近些年来，有关多目标规划的最优性条件和各类对偶性的研究结果颇丰[1-4]。多目标半无限优化问题是在无限多个约束条件下要求有限多个目标函数同时最小化的问题，已有不少学者对这类问题做了大量的研究[5-9]。特别是近几年来，相关研究更是取得了一系列进展，例如:李向有等人[10]利用局部 Lipschitz 函数定义了一类新广义不变凸函数，并在新凸性假设下研究了多目标半无限规划的对偶性问题；Tung 等人[11]研究了多目标半无限规划的最优性和对偶性；Gadhi 等人[12]建立了多目标半无限规划的最优性必要条件；Tung[13]建立了多目标半无限规划的 KKT 最优性条件和对偶性结果；Antczak[14]研究了可微多目标半无限规划的最优性条件并建立了 Mond-Weir 对偶模型。

本文在已有文献的基础上利用弧式连通(AC)函数新定义了一类高阶(B,F)-AC-V-type Ⅰ不变凸函数，并在新广义凸性情形下，证明并获得了多目标半无限规划问题的一些最优性充分条件。

1 预备知识

设 $\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间，对 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^{\mathrm{T}}\in\mathbf{R}^n$，现作如下定义:$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i=y_i,i=1,2,\cdots,n$；$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i<y_i,i=1,2,\cdots,n$；$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i\leqq y_i,i=1,2,\cdots,n$；$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\Leftrightarrow\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}\neq\boldsymbol{y}$。

定义 1　如果对任意 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in X$，存在一个连续向量值函数即弧 $H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}:[0,1]\to X$，使得 $H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(0)=\boldsymbol{x}^1$，$H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(1)=\boldsymbol{x}^2$，则称 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是 AC 集。

定义 2　设 f 是定义在 AC 集 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的一个实值函数，那么:1) 如果对任意 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in X$，存在弧 $H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}$ 使得 $f(H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(\theta))\leqslant(1-\theta)f(\boldsymbol{x}^1)+\theta f(\boldsymbol{x}^2),\theta\in[0,1]$，则称 f 是弧式连通函数；2) 如果对任意 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in X$，存在弧 $H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}$ 使得 $f(H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(\theta))<(1-\theta)f(\boldsymbol{x}^1)+\theta f(\boldsymbol{x}^2),\theta\in(0,1)$，则称 f 是严格弧式连通函数。

定义 3　设 f 是定义在 AC 集 $X\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的一个实值函数。对任意 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in X$，$H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}$ 是 AC 的。如果极限 $\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{f(H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(\theta))-f(\boldsymbol{x}^1)}{\theta}$ 存在，则称 f 在 $\theta=0$ 处关于弧 $H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}$ 是右可微的，并将该极限记为 $f^+(H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(0))$。

显然，如果 $f:X\to\mathbf{R}$ 关于弧 $H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}$ 有一个右导数，那么 $f(H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(\theta))=f(\boldsymbol{x}^1)+\theta f^+(H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(0))+\theta\alpha(\theta)$，$\theta\in[0,1]$，且 $\alpha:[0,1]\to\mathbf{R}$ 满足 $\lim\limits_{\theta\to0^+}\alpha(\theta)=0$。如果极限 $\lim\limits_{\theta\to0^+}\dfrac{H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(\theta)-\boldsymbol{x}^1}{\theta}$ 存在，并将它记为 $H^+_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(0)$，则

* 收稿日期:2022-05-26　　修回日期:2022-10-14　　网络出版时间:2023-02-22　14:50

资助项目:国家自然科学基金(No. 61907033)；陕西省自然科学基金(No. 2017JM1041)

第一作者简介:安刚，男，讲师，研究方向为最优化理论与应用，E-mail:3521653121@qq.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230222.1124.002.html

$f^{+}(H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(0))=H^{+}_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}(0)\nabla f(\boldsymbol{x}^1)^{\mathrm{T}}$。

本文将研究下列多目标半无限规划问题(MIP):

$$\min F(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}),f_2(\boldsymbol{x}),\cdots,f_m(\boldsymbol{x})),$$
$$\text{s.t. } g(\boldsymbol{x},u)\leqq 0,u\in U,\boldsymbol{x}\in X。$$

其中:$X\subseteq\mathbf{R}^n$ 是一个非空 AC 集合,$U\subseteq\mathbf{R}$ 是一个无限可数指标集。函数 $f_i:X\to\mathbf{R},i\in M=\{1,2,\cdots,m\}$ 和 $g:X\times U\to\mathbf{R}$ 是实值函数,对任意 $\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2\in X$,函数 $f_i(i\in M)$ 和 $g(\boldsymbol{x},u)(u\in U)$ 在 $\theta=0$ 处关于弧 $H_{\boldsymbol{x}^1,\boldsymbol{x}^2}$ 是右可微的。

(MIP)的可行解集记为 $X_0=\{\boldsymbol{x}\in X\mid g(\boldsymbol{x},u)\leqq 0,u\in U\}$。记 $\Delta=\{j\mid g(\boldsymbol{x},u^j)\leqq 0,\boldsymbol{x}\in X,u^j\in U\}$ 和 $\Gamma=\{\mu_j\mid\mu_j\geqq 0,j\in\Delta$,仅有有限个 $\mu_j\neq 0\}$。定义 $\overline{U}(\boldsymbol{x}^0)=\{u^j\mid g(\boldsymbol{x}^0,u^j)=0,u^j\in U\}$ 为主动约束集。设 $J(\boldsymbol{x}^0)=\{j\mid g(\boldsymbol{x}^0,u^j)=0\}=\{j\mid u^j\in\overline{U}\}$ 和 $\overline{J}(\boldsymbol{x}^0)=\{j\mid g(\boldsymbol{x}^0,u^j)<0\}$。

定义4 设 $\overline{\boldsymbol{x}}\in X_0$,如果不存在 $\boldsymbol{x}\in X_0$,使得 $F(\boldsymbol{x})<F(\overline{\boldsymbol{x}})$,则称 $\overline{\boldsymbol{x}}$ 是(MIP)的弱有效解。

定义5 如果函数 $F:X\times X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 满足:1) $F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2)\leqq F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{a}_1)+F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{a}_2),\forall\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2\in\mathbf{R}^n$;2) $F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};l\boldsymbol{a})=lF(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\boldsymbol{a}),\forall l\in\mathbf{R}^+,\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$,显然 $F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};0)=0$。则称函数 $F:X\times X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 关于第三变元是次线性泛函。

以下均假设 $k_i:X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 和 $h_j:X\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 是可微函数,$\boldsymbol{p}_i\in\mathbf{R}^n,\boldsymbol{q}_j\in\mathbf{R}^n,\rho_i,\tau_j\in\mathbf{R},\eta:X\times X\to\mathbf{R}^n,\alpha_i,\beta_j:X\times X\to\mathbf{R}_+\backslash\{0\},d:X\times X\to\mathbf{R},b_i,\overline{b}_j:X\times X\to\mathbf{R}_+$,其中:$i\in M,j\in\Delta$。

定义6 如果对任意 $\boldsymbol{x}\in X_0$ 存在实值函数 $\alpha_i,\beta_j,b_i,\overline{b}_j$,向量值函数 η 以及 $\rho_i,\tau_j\in\mathbf{R}$,使得:

$$b_i(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\overline{\boldsymbol{x}})-k_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)+\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)]\geqq$$
$$F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\alpha_i(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})(f_i^{+}(H_{\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0))\eta(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)))+\rho_i d^2(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}),i\in M,$$
$$-\overline{b}_j(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})[g(\overline{\boldsymbol{x}},u^j)+h_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)-\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)]\geqq$$
$$F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\beta_j(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})(g^{+}(H_{\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0),u^j)\eta(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)))+\tau_j d^2(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}}),j\in\Delta,$$

则称$(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in\Delta)$是 $\overline{\boldsymbol{x}}\in X$ 处关于 $k_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)$ 和 $h_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)$ 的高阶(B,F)-AC-V-type Ⅰ不变凸函数。

例1 设 $X=[1,+\infty)$,函数 $f_1:X\to\mathbf{R}$ 定义为 $f_1(x)=x^2+2x+5$,函数 $g:X\times U\to\mathbf{R}$ 定义为 $g(x,u^j)=-x^3+x\cos u^j$,其中 $u^j\in U=\left\{u^j\,\middle|\,u^j=\pi+\frac{\pi}{2}j,\ j=1,\ 2,\cdots\right\}$,函数 $k_1:X\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},h_j:X\times\mathbf{R}\to\mathbf{R},j\in\Delta$ 分别定义为 $k_1(\overline{x},p)=5\overline{x}p+p,h_j(\overline{x},q)=-20\overline{x}+6q,j\in\Delta$,函数 $\alpha_1:X\times X\to\mathbf{R}_+\backslash\{0\},\beta_j:X\times X\to\mathbf{R}_+\backslash\{0\},j\in\Delta$ 分别定义为 $\alpha_1(x,\overline{x})=x^2+2\overline{x}+3,\beta_j(x,\overline{x})=2x+5,j\in\Delta$,函数 $b_1:X\times X\to\mathbf{R}_+,\overline{b}_j:X\times X\to\mathbf{R}_+,j\in\Delta$ 分别定义为 $b_1(x,\overline{x})=\overline{x}^2+2,\overline{b}_j(x,\overline{x})=x^2-\overline{x}+1,j\in\Delta$,函数 $\eta:X\times X\to\mathbf{R},d:X\times X\to\mathbf{R},F:X\times X\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 分别定义为 $\eta(x,\overline{x})=x+\overline{x},d(x,\overline{x})=\sqrt{x+\overline{x}+2},F(x,\overline{x};a)=|a|(-3+\overline{x})$,对任意 $\overline{x}\in X,x\in X$,弧 $H_{\overline{x},x}:[0,1]\to X$ 定义为:

$$H_{\overline{x},x}(\theta)=\begin{cases}(1-3\theta)\overline{x}-3\theta x,0\leqslant\theta\leqslant\dfrac{1}{3}\\(3\theta-2)x,\dfrac{1}{3}\leqslant\theta\leqslant 1\end{cases},$$

从而 $f^{+}(H_{\overline{x},x}(0))=-3(\overline{x}+x)(2\overline{x}+2),g^{+}(H_{\overline{x},x}(0),u^j)=-3(\overline{x}+x)(-3\overline{x}^2+\cos u^j),j\in\Delta$,则当 $\rho_1=-5,\tau_j=-1(j\in\Delta)$ 时,$(f_1,g(\cdot,u^j))(j\in\Delta)$ 在 $\overline{x}=1$ 处关于 $k_1(\overline{x},p)$ 和 $h_j(\overline{x},q)$ 是高阶(B,F)-AC-V-type Ⅰ不变凸函数。

定义7 如果对任意 $\boldsymbol{x}\in X_0$ 存在实值函数 $\alpha_i,\beta_j,b_i,\overline{b}_j$,向量值函数 η 以及 $\rho_i,\tau_j\in\mathbf{R}$,使得:

$$b_i(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\overline{\boldsymbol{x}})-k_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)+\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)]\leqq 0\Rightarrow$$
$$F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\alpha_i(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})(f_i^{+}(H_{\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0))\eta(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)))+\rho_i d^2(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})\leqq 0,i\in M,$$
$$-\overline{b}_j(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})[g(\overline{\boldsymbol{x}},u^j)+h_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)-\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)]\leqq 0\Rightarrow$$
$$F(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}};\beta_j(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})(g^{+}(H_{\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0),u^j)\eta(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\overline{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)))+\tau_j d^2(\boldsymbol{x},\overline{\boldsymbol{x}})\leqq 0,j\in\Delta,$$

则称$(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in\Delta)$是$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$处关于$k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)$和$h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)$的高阶$(B,F)$-AC-V-type Ⅰ拟不变凸函数。

注 1　如果将上式中的不等号换成严格不等号，且$\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$，则称$(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in\Delta)$是高阶$(B,F)$-AC-V-type Ⅰ半严格拟不变凸函数。

例 2　设$X=[-1,1]$，函数$f_1:X\to\mathbf{R}$定义为$f_1(x)=-11x^4-3x^2-6$，函数$g:X\times U\to\mathbf{R}$定义为$g(x,u^j)=-3x^2-1+\sin u^j$，其中$u^j\in U=\left\{u^j\,\middle|\,u^j=2\pi+\dfrac{3\pi}{2}j,\ j=1,2,\cdots\right\}$，函数$k_1:X\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$h_j:X\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，$j\in\Delta$分别定义为$k_1(\bar{x},p)=2p+p\tan\bar{x}$，$h_j(\bar{x},q)=\bar{x}q^2+3q+5$，$j\in\Delta$，函数$\alpha_1:X\times X\to\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$，$\beta_j:X\times X\to\mathbf{R}_+\setminus\{0\}$，$j\in\Delta$分别定义为$\alpha_1(x,\bar{x})=\dfrac{e^{\bar{x}}}{x^2+1}$，$\beta_j(x,\bar{x})=3+x\bar{x}+(\bar{x})^2$，$j\in\Delta$，函数$b_1:X\times X\to\mathbf{R}_+$，$\bar{b}_j:X\times X\to\mathbf{R}_+$，$j\in\Delta$分别定义为$b_1(x,\bar{x})=x\cos\bar{x}+3$，$\bar{b}_j(x,\bar{x})=x^2\sin\bar{x}+5$，$j\in\Delta$，函数$\eta:X\times X\to\mathbf{R}$，$d:X\times X\to\mathbf{R}$，$F:X\times X\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$分别定义为$\eta(x,\bar{x})=\dfrac{2}{x^2-\bar{x}+2}$，$d(x,\bar{x})=\sqrt{x^2+2(\bar{x})^2}$，$F(x,\bar{x};a)=-\dfrac{|a|(x^2+1)}{2+(\bar{x})^2}$，对任意$\bar{x}\in X$，$x\in X$，弧$H_{\bar{x},x}:[0,1]\to X$定义为$H_{\bar{x},x}(\theta)=(1-\theta)[\bar{x}-(\bar{x})^2]+\theta(x-x^2)+[(1-\theta)\bar{x}+\theta x]^2$，从而$f^+(H_{\bar{x},x}(0))=[x-\bar{x}-(x-\bar{x})^2][-44(\bar{x})^3-6\bar{x}]$，$g^+(H_{\bar{x},x}(0),u^j)=[x-\bar{x}-(x-\bar{x})^2](-6\bar{x})$，$j\in\Delta$，则当$\rho_1=\dfrac{1}{3}$，$\tau_j=4(j\in\Delta)$时，$(f_1,g(\cdot,u^j))(j\in\Delta)$在$\bar{x}=0$处关于$k_1(\bar{x},p)$和$h_j(\bar{x},q)$是高阶$(B,F)$-AC-V-type Ⅰ半严格拟不变凸函数。

定义 8　如果对任意$\boldsymbol{x}\in X_0$存在实值函数$\alpha_i,\beta_j,b_i,\bar{b}_j$，向量值函数$\eta$以及$\rho_i,\tau_j\in\mathbf{R}$，使得：

$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\alpha_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})(f_i^+(H_{\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0))\eta(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)))+\rho_i d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqq 0\Rightarrow$$
$$b_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})-k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)+\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)]\geqq 0,i\in M,$$
$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\beta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})(g^+(H_{\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0),u^j)\eta(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)))+\tau_j d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\geqq 0\Rightarrow$$
$$-\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})[g(\bar{\boldsymbol{x}},u^j)+h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)-\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)]\geqq 0,j\in\Delta,$$

则称$(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in\Delta)$是$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$处关于$k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)$和$h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)$的高阶$(B,F)$-AC-V-type Ⅰ伪不变凸函数。

注 2　如果将上式中的不等号换成严格不等号，且$\boldsymbol{x}\neq\bar{\boldsymbol{x}}$，则称$(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in\Delta)$是高阶$(B,F)$-AC-V-type Ⅰ严格伪不变凸函数。

定义 9　如果对任意$\boldsymbol{x}\in X_0$存在实值函数$\alpha_i,\beta_j,b_i,\bar{b}_j$，向量值函数$\eta$以及$\rho_i,\tau_j\in\mathbf{R}$，使得：

$$b_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\bar{\boldsymbol{x}})-k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)+\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)]<0\Rightarrow$$
$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\alpha_i(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})(f_i^+(H_{\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0))\eta(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)))+\rho_i d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})<0,i\in M,$$
$$-\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})[g(\bar{\boldsymbol{x}},u^j)+h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)-\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)]\leqq 0\Rightarrow$$
$$F(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}};\beta_j(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})(g^+(H_{\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{x}}(0),u^j)\eta(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})+\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)))+\tau_j d^2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}})\leqq 0,j\in\Delta,$$

则称$(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in\Delta)$是$\bar{\boldsymbol{x}}\in X$处关于$k_i(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{p}_i)$和$h_j(\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{q}_j)$的高阶$(B,F)$-AC-V-type Ⅰ伪拟不变凸函数。

2 最优性充分条件

现建立(MIP)的 Karush-Kuhn-Tucker 最优性充分条件。

定理 1　(Karush-Kuhn-Tucker 最优性充分条件)设$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$是(MIP)的可行解。假设：1) 存在$\lambda_i\geqq 0$，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，$\mu_j\in\Gamma$和$k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)$，$h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)$，$i\in M,j\in\Delta$，使得：

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0)+\sum_{j\in\Delta}\mu_j g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j)=0,\tag{1}$$
$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)+\sum_{j\in\Delta}\mu_j\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)=0,\tag{2}$$
$$k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)-\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)=0,i\in M,\tag{3}$$

$$\sum_{j\in\Delta}\mu_j g(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{u}^j)=0,\tag{4}$$

$$h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)-\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)=0,j\in\Delta;\tag{5}$$

在 $\boldsymbol{x}_0$ 处成立;2) $(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in J(\boldsymbol{x}_0))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 $k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)$ 和 $h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)$ 是高阶(B,F)-AC-V-type Ⅰ不变凸函数;3) $b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0,\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\geqq 0,i\in M,j\in J(\boldsymbol{x}_0),\rho_i\geqq 0,\tau_j\geqq 0,i\in M,j\in\Delta$。则 $\boldsymbol{x}_0$ 是(MIP)的一个弱有效解。

证明 假设 $\boldsymbol{x}_0$ 不是(MIP)的弱有效解,则存在 $\boldsymbol{x}\in X_0$,使得 $F(\boldsymbol{x})<F(\boldsymbol{x}_0)$,即 $f_i(\boldsymbol{x})<f_i(\boldsymbol{x}_0),i\in M$。由 $b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0$ 和(3)式可得:

$$b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)-k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)+\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)]<0,i\in M。\tag{6}$$

又由(4)式和 $\mu_j\geqq 0$ 可知 $\mu_j\geqq 0$(当 $j\in J(\boldsymbol{x}_0)$ 时)和 $\mu_j=0$(当 $j\in\bar{J}(\boldsymbol{x}_0)$ 时)。利用(5)式和 $\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\geqq 0$,可得:

$$-\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)[g(\boldsymbol{x}_0,u^j)+h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)-\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)]\leqq 0,j\in J(\boldsymbol{x}_0)。\tag{7}$$

从假设2)以及(6)、(7)式可得:

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)(f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0))\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)))+\rho_i d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)<0,i\in M,$$

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)(g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)))+\tau_j d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\leqq 0,j\in J(\boldsymbol{x}_0)。$$

利用 $\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0,\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0$ 和函数 F 的次线性性质,以上不等式可变形为:

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0))\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i))<-\frac{\rho_i}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0),i\in M,\tag{8}$$

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j))\leqq-\frac{\tau_j}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0),j\in J(\boldsymbol{x}_0)。\tag{9}$$

由 $\lambda_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1$, $\mu_j\in\Gamma(\mu_j=0,\ j\in\bar{J}(\boldsymbol{x}_0))$ 以及函数 F 的次线性性质,(8)、(9)式即为:

$$F\Big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;(\sum_{i=1}^m\lambda_i f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0))\Big)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i))<-\sum_{i=1}^m\frac{\lambda_i\rho_i}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0),\tag{10}$$

$$F\Big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;(\sum_{j\in\Delta}\mu_j g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j))\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\sum_{j\in\Delta}\mu_j\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)\Big)\leqq-\sum_{j\in\Delta}\frac{\mu_j\tau_j}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)。\tag{11}$$

(10)、(11)式相加并利用假设3)以及函数 F 的次线性性质,可得:

$$F\Big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;(\sum_{i=1}^m\lambda_i f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0))+\sum_{j\in\Delta}\mu_j g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j))\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+$$
$$(\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)+\sum_{j\in\Delta}\mu_j\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j))\Big)<-\Big(\sum_{i=1}^m\frac{\lambda_i\rho_i}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}+\sum_{j\in\Delta}\frac{\mu_j\tau_j}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}\Big)d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\leqq 0。\tag{12}$$

另一方面,由(1)、(2)式可知:

$$F\Big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;(\sum_{i=1}^m\lambda_i f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0))+\sum_{j\in\Delta}\mu_j g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j))\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+$$
$$(\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)+\sum_{j\in\Delta}\mu_j\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j))\Big)=0。$$

与(12)式相矛盾,故定理1得证。 证毕

定理2 (Karush-Kuhn-Tucker最优性充分条件)设 $\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$ 是(MIP)的可行解。假设:1) 存在 $\lambda_i\geqq 0$, $\sum_{i=1}^m\lambda_i=1,\mu_j\in\Gamma$ 和 $k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i),h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j),i\in M,j\in\Delta$ 使得(1)~(5)式在 $\boldsymbol{x}_0$ 处成立;2) $(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in J(\boldsymbol{x}_0))$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 处关于 $k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)$ 和 $h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)$ 是高阶(B,F)-AC-V-type Ⅰ伪拟不变凸函数;3) $b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0$, $\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\geqq 0,i\in M,j\in J(\boldsymbol{x}_0),\rho_i\geqq 0,\tau_j\geqq 0,i\in M,j\in\Delta$。则 $\boldsymbol{x}_0$ 是(MIP)的一个弱有效解。

证明 假设 $\boldsymbol{x}_0$ 不是(MIP)的弱有效解,则存在 $\boldsymbol{x}\in X_0$,使得 $F(\boldsymbol{x})<F(\boldsymbol{x}_0)$,即 $f_i(\boldsymbol{x})<f_i(\boldsymbol{x}_0),i\in M$。由 $b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0$ 以及(3)式可得:

$$b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)[f_i(\boldsymbol{x})-f_i(\boldsymbol{x}_0)-k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)+\boldsymbol{p}_i^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)]<0,i\in M。\tag{13}$$

由条件(5)和$\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\geqq 0$可得：

$$-\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)[g(\boldsymbol{x}_0,u^j)+h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)-\boldsymbol{q}_j^{\mathrm{T}}\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)]\leqq 0,j\in J(\boldsymbol{x}_0)。\tag{14}$$

利用假设2)和$\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0,\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)>0$以及函数$F$的次线性性质，(13)式和(14)式可得：

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0))\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i))<-\frac{\rho_i}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0),i\in M,\tag{15}$$

$$F(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j))\leqq-\frac{\tau_j}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0),j\in J(\boldsymbol{x}_0)。\tag{16}$$

(4)式表明$\mu_j\geqq 0$(当$j\in J(\boldsymbol{x}_0)$)和$\mu_j=0$(当$j\in\bar{J}(\boldsymbol{x}_0)$)，所以由函数$F$的次线性性质以及$\lambda_i(i\in M)$和$\mu_j(j\in\Delta)$，(15)、(16)式即为：

$$F\Big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;\Big(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f_i^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0))\Big)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\nabla_{\boldsymbol{p}_i}k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)\Big)<-\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i\rho_i}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0),$$

$$F\Big(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0;\Big(\sum_{j\in\Delta}\mu_j g^+(H_{\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}}(0),u^j)\Big)\eta(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)+\sum_{j\in\Delta}\mu_j\nabla_{\boldsymbol{q}_j}h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)\Big)\leqq-\sum_{j\in\Delta}\frac{\mu_j\tau_j}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}d^2(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)。$$

将上式两端相加并利用函数F的次线性性质以及(1)、(2)式，可得：

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i\rho_i}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}+\sum_{j\in\Delta}\frac{\mu_j\tau_j}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}<0。\tag{17}$$

另一方面，由假设3)可得：

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i\rho_i}{\alpha_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}+\sum_{j\in\Delta}\frac{\mu_j\tau_j}{\beta_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)}\geqq 0。$$

该结论与(17)式相矛盾，故定理2得证。　证毕

定理3　(Karush-Kuhn-Tucker最优性充分条件)设$\boldsymbol{x}_0\in\mathbf{R}^n$是(MIP)的可行解。假设：1)存在$\lambda_i\geqq 0$，$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i=1$，$\mu_j\in\Gamma$和$k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)$，$h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)$，$i\in M,j\in\Delta$使得(1)～(5)式在$\boldsymbol{x}_0$处成立；2)$(f_i,g(\cdot,u^j))(i\in M,j\in J(\boldsymbol{x}_0))$在$\boldsymbol{x}_0$处关于$k_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{p}_i)$和$h_j(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{q}_j)$是高阶$(B,F)$-AC-V-type Ⅰ半严格拟不变凸函数(或高阶(B,F)-AC-V-type Ⅰ严格伪不变凸函数)；3)$b_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\geqq 0,\bar{b}_j(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}_0)\geqq 0,i\in M,j\in J(\boldsymbol{x}_0),\rho_i\geqq 0,\tau_j\geqq 0,i\in M,j\in\Delta$。则$\boldsymbol{x}_0$是(MIP)的一个弱有效解。

定理3的证明类似于定理2。

参考文献：

[1] YAN C L. Sufficiency and duality for nonsmooth multiobjective fractional programming problems involving $(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha})$-V-invexity[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2016, 52(1/2): 59-72.

[2] YAN C L, YANG S L. Sufficiency and duality for nondifferentiable multiobjective fractional programming problems with $(\boldsymbol{\Phi},\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\alpha})$-V-invexity[J]. Journal of Donghua University (English Edition), 2017, 34(2): 178-183.

[3] 陈雪静，彭再云，邵重阳，等. α-E-半预不变凸型函数的性质与多目标规划的最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2020，37(1)：91-98.
CHEN X J, PENG Z Y, SHAO C Y, et al. Properties of α-E-semi-preinvex convex functions and optimality conditions for multi-objective programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2020, 37(1): 91-98

[4] 牛欢，高晓艳. H-(p,r)-$\boldsymbol{\eta}$不变凸多目标规划及其最优性条件[J]. 河南科技大学学报(自然科学版)，2021，42(6)：84-89.
NIU H, GAO X Y. Multiobjective programming and sufficient condition involving H-(p,r)-$\boldsymbol{\eta}$ invex function[J]. Journal of Henan University of Science and Technology (Natural Science), 2021, 42(6): 84-89.

[5] GAO X Y. Optimality and duality for non-smooth multiple objective semi-infinite programming[J]. Journal of Networks, 2013, 8(2): 413-420.

[6] KANZI N. On strong KKT optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming problems with Lipschitzian data[J]. Optimization Letters, 2015, 9(6): 1121-1129.

[7] MISHRA S K, JAISWAL M, AN L T H. Optimality conditions and duality for nondifferentiable multiobjective semi-infinite programming problems with generalized (C,α,ρ,d)-convexity[J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2015, 28(1): 47-59.

[8] PANDEY Y, MISHRA S K. On strong KKT type sufficient optimality conditions for nonsmooth multiobjective semi-infinite mathematical programming problems with equilibrium constraints[J]. Operations Research Letters, 2016, 44(1): 148-151.

[9] TUNG L T. Strong Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions for multiobjective semi-infinite programming via tangential subdifferential[J]. RAIRO-Operations Research, 2018, 52(4/5): 1019-1041.

[10] 李向有，苗红梅. (G-V, ρ)不变凸多目标规划的对偶条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2020，37(1)：81-85.
LI X Y, MIAO H M. Duality conditions of nonsmooth semi-infinite multiobjective fractional programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2020, 37(1): 81-85.

[11] TUNG L T, TAM D H. Optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming on Hadamard manifolds[J]. Bulletin of the Iranian Mathematical Society, 2022, 48(5): 2191-2219.

[12] GADHI N A, El IDRISSI M. Necessary optimality conditions for a multiobjective semi-infinite interval-valued programming problem[J]. Optimization Letters, 2022, 16(2): 653-666.

[13] TUNG L T. Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions and duality for multiobjective semi-infinite programming with vanishing constraints[J]. Annals Operations Research, 2022, 311(2): 1307-1334.

[14] ANTCZAK T. Optimality conditions and Mond-Weir duality for a class of differentiable semi-infinite multiobjective programming problems with vanishing constraints[J]. 4OR A Quarterly Journal Operations Research, 2022, 20(3): 417-442.

Operations Research and Cybernetics

Optimality Conditions for Multiobjective Semi-Infinite Programming with Higher-Order Arcwise Connected Invex Functions

AN Gang[1], GAO Xiaoyan[2], WANG Kuaini[1]

(1. College of Science, Xi'an Shiyou University, Xi'an 710065;
2. College of Science, Xi'an University of Science and Technology, Xi'an 710054, China)

Abstract: [**Purposes**]To study the sufficient optimality conditions for a class of multiobjective semi-infinite programming problems. [**Methods**]Some new concepts of higher order (B, F)-AC-V-type Ⅰ invex functions are introduced by using the arcwise connected function and the sublinear function. Then a class of multiobjective semi-infinite programming problems including inequality constraints are considered under the new generalized functions. [**Findings**]Several sufficient optimality conditions are established. [**Conclusions**]The results are of great significance to the multiobjective semi-infinite programming theory.

Keywords: higher order (B, F)-AC-V-type Ⅰ invex function; multiobjective semi-infinite programming; weakly efficient solution; optimality conditions

（责任编辑　方　兴）