运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20230103

自反 Banach 空间中的一个非线性锥分离定理*

杨吉英[1], 何青海[2]
(1. 保山学院 大数据学院,云南 保山 678000;2. 云南大学 数学与统计学院,昆明 650106)

摘要:【目的】给出自反 Banach 空间中闭锥的一个非线性分离定理。【方法】利用已有文献定义的一类广义正线性集中的元的相关性质来证明分离定理。【结果】在没有凸性的假设下,证明了两个具有某种特殊分离性质的闭锥,能够被现有文献中定义的一类具有 conic 水平集的单调次线性函数的零次水平集逼近,还证明了与它的 ε-conic 邻域具有分离性质的闭锥也能被这类函数中的某个函数的零次水平集逼近。【结论】自反的 Banach 空间中两个满足某种分离性质的闭锥,能够被某个次线性函数分离,包含一个锥且被另一个锥所包含的 Bishop-phelps 锥是存在的。

关键词:广义正线性集;分离逼近;Bishop-phelps 锥

中图分类号:O177 **文献标志码**:A **文章编号**:1672-6693(2023)01-0129-04

设$(Y,\|\cdot\|)$是赋范空间,且它的序锥是定义为$C(y^*,\alpha)=\{y\in Y:y^*(y)\geqslant\alpha\|y\|\}$的一个 Bishop-phelps 锥,其中$\alpha\in(0,1]$,$y^*\in Y^*$,$\|y^*\|=1$[1],则该 Bishop-phelps 锥可以看做是函数$f(y)=\alpha\|y\|-y^*(y)$的一个零次水平集。文献[1-2]证明了:对于任意有闭边界的凸尖锥 C,有多个 Bishop-phelps 锥包含 C。且 Bishop-phelps 锥还有一个重要的性质:Bishop-phelps 锥能通过一个简单明确的函数来定义。目前对于如何构造一个逼近给定锥的 Bishop-phelps 锥的问题还没有得到解决。在文献[3]中,对该问题的阐述如下:如何用一个次水平集来分离 Banach 空间中给定的两个闭锥,而这个次水平集是由某个确定的函数来定义。在非凸向量优化问题中,这类单调次线性函数和分离结论对 conic 标量化技巧的发展有很大的帮助。

1 主要结果

本文在文献[3-4]基础上研究一类广义正线性集的应用。在没有凸性的假设下,证明了两个具有某种特殊分离性质的闭锥,能够被文献[4]中定义的一类具有 conic 水平集的单调次线性函数的零次水平集逼近,还证明了与 ε-conic 邻域具有分离性质的闭锥也能被这类函数中的某个函数的零次水平集逼近。通过这个定理可以断定:给定两个锥,包含其中一个锥且被另一个锥所包含的 Bishop-phelps 锥是存在的,从而解决了逼近一个给定锥的 Bishop-phelps 锥的存在性问题。

2 定理证明

设$(Y,\|\cdot\|)$是实赋范空间,U、B 分别表示 Y 中的单位球和单位球面,Y 中序锥 C 是闭凸的尖锥,Y^* 是 Y 的共轭空间(或称对偶空间)。

定义 1[2] C 的对偶锥 C^* 和 C^* 的拟-内部 $C^\#$ 分别定义为:

$$C^*=\{y^*\in Y^*:y^*(y)\geqslant 0,\forall y\in C\},C^\#=\{y^*\in Y^*:y^*(y)>0,\forall y\in C\backslash\{0\}\}。$$

定义 2[1] 下面定义的这 3 个集合称为 C 的广义正线性集:

$$\hat{C}^{a*}=\{G\times\{\alpha\}\subset C^\#\times\mathbf{R}_+:\inf_{y^*\in G}y^*(y)-\alpha\|y\|\geqslant 0,\forall y\in C\},$$

$$\hat{C}^{ao}=\{G\times\{\alpha\}\subset C^\#\times\mathbf{R}_+:\inf_{y^*\in G}y^*(y)-\alpha\|y\|\geqslant 0,\forall y\in \mathrm{int}(C)\},$$

$$\hat{C}^{a\#}=\{G\times\{\alpha\}\subset C^\#\times\mathbf{R}_+:\inf_{y^*\in G}y^*(y)-\alpha\|y\|\geqslant 0,\forall y\in C\backslash\{0\}\}。$$

* **收稿日期**:2022-02-21 **修回日期**:2022-08-24 **网络出版时间**:2023-02-22 15:22
资助项目:国家自然科学基金(No. 11371312);云南省应用基础研究项目(No. 2017FD140)
第一作者简介:杨吉英,女,讲师,研究方向为向量优化及非线性泛函分析,E-mail:yangjiying86@126.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230222.1334.016.html

文献[4]中定义的广义正线性集 $\hat{C}^{\alpha*}$,$\hat{C}^{\alpha o}$,$\hat{C}^{\alpha\#}$ 是文献[3]中增广对偶锥 $C^{\alpha*}$,$C^{\alpha o}$,$C^{\alpha\#}$ 的延拓。由于用 $C^{\#}$ 中的元素来定义广义正线性集,因此研究 $C^{\#}$ 的非空性就变得很重要。一般来说,这些锥可能是空的,若 $C=\{(y_1,y_2)\in\mathbf{R}^2:y_1\geqslant 0\}$,则 $C^*=\{(y_1,0)\in\mathbf{R}^2:y_1\geqslant 0\}$,$C^{\#}=\varnothing$。因此在很多资料中研究了 $C^{\#}$ 的非空性。由 Krein-Rntman 定理得到一个重要的结论:在可分的赋范空间中,闭凸尖锥的拓扑对偶拟内部是非空的[5-6]。

定义 3[4] $\tilde{g}_{(G,\alpha)}(y)=\sup\limits_{y^*\in G} y^*(y)+\alpha\|y\|$,$G\times\{\alpha\}\subset C^{\#}\times\mathbf{R}_+$。

定义 4[3] 设$(Y,\|\cdot\|)$是实赋范空间,C,K 是 Y 中两个闭锥,C_u,K_u 分别是 C,K 的范数基,设

$$K_u\cap\mathrm{bd}(K)=K_u^{\partial},\tilde{C}=\mathrm{cl}(\mathrm{co}(C_u)),\tilde{K}^{\partial}=\mathrm{co}(K_u^{\partial}\cup\{0_Y\}),$$

则称 C 和 K 关于$\|\cdot\|$有分离性质,若 $\tilde{C}\cap\tilde{K}^{\partial}=\varnothing$。

下面定理给出自反的 Banach 空间中满足某种分离性质的闭锥,能够被次线性函数 $\tilde{g}_{(\{y^*\},\alpha)}(y)$的次水平集 $\tilde{S}(\{y^*\},\alpha)$分离。

定理 1 设$(Y,\|\cdot\|)$是自反的 Banach 空间,C,K 是 Y 中两个闭锥,假设$-C$ 和 K 关于$\|\cdot\|$有分离性质,则 $\hat{C}^{\alpha\#}\neq\varnothing$且存在$\{y^*\}\times\{\alpha\}\in\hat{C}^{\alpha\#}$,使得 $\tilde{g}_{(\{y^*\},\alpha)}(y)=\langle y^*,y\rangle+\alpha\|y\|$的次水平集 $\tilde{S}(\{y^*\},\alpha)$以下面这种形式分离$-C$ 和 $\mathrm{bd}(K)$:

$$y^*(y)+\alpha\|y\|<0\leqslant y^*(y)+\alpha\|z\|,\forall y\in -C\backslash\{0_Y\},z\in\mathrm{bd}(K)。\tag{1}$$

在这种情况下,$-C$ 是尖锥。

相反的,若存在$\{y^*\}\times\{\alpha\}\in\hat{C}^{\alpha\#}$,使得强单调的线性函数 $\tilde{g}_{(\{y^*\},\alpha)}(y)=y^*(y)+\alpha\|y\|$的次水平集 $\tilde{S}(\{y^*\},\alpha)$以(1)式的形式分离$-C$ 和 $\mathrm{bd}(K)$,且$-C_U$ 是弱紧的,则 $\tilde{C}\cap\tilde{K}^{\partial}=\varnothing$。

证明 充分性。假设$-\tilde{C}\cap\tilde{K}^{\partial}=\varnothing$,由这些集合的定义知$-\tilde{C}$,$\tilde{K}^{\partial}$是 B 的子集。由 Y 的自反性知 B 是弱紧的。又由$-\tilde{C}$,$\tilde{K}^{\partial}$是闭且凸的知,$-\tilde{C}$,$\tilde{K}^{\partial}$是弱闭的。从而有$-\tilde{C}$,$\tilde{K}^{\partial}$是弱紧的,则由 Tames 定理[7]知,存在$y^*\in Y^*\backslash\{0\}$,使得:

$$\sup\{y^*(y)\}:y\in-\tilde{C}\}<\inf\{y^*(z)\}:z\in\tilde{K}^{\partial}\}。\tag{2}$$

令 $\sup\{y^*(y)\}:y\in-\tilde{C}\}=-r$,由上式可知,存在 $\varepsilon>0$,使得:

$$y^*(y)\leqslant -r\leqslant y^*(z)-\varepsilon,\forall y\in-\tilde{C},z\in\tilde{K}^{\partial},\tag{3}$$

取 $z=0$,则由$-r\leqslant 0-\varepsilon$,即 $r\geqslant\varepsilon>0$。

由于$-C_U\subset-\tilde{C}$ 且 $K_U^{\partial}\subset\tilde{K}^{\partial}$,故根据(3)式可得:

$$y^*(d)\leqslant -r\leqslant y^*(k)-\varepsilon,\forall d\in -C_U,k\in K_U,\tag{4}$$

由于$-C_U$ 是$-C$ 的范数基知,任取 $c\in -C\backslash\{0\}$,存在 $\beta>0$ 及 $y\in -C_U$,使得 $c=\beta y$。由(4)式及 $r>0$ 知:

$$y^*(c)=\beta y^*(y)\leqslant -\beta r<0,\forall c\in -C\backslash\{0_Y\},\tag{5}$$

故 $C^{\#}\neq\varnothing$。

由于对每个 $k\in\tilde{K}^{\partial}$,$\|k\|=1$,故由(4)式可得 $y^*(k)+(r-\varepsilon)\|k\|\geqslant\varepsilon-r+r-\varepsilon=0$,$\forall k\in\tilde{K}^{\partial}$,从而有:

$$y^*(z)+(r-\varepsilon)\|c\|\geqslant 0,\forall z\in\mathrm{bd}(K)。\tag{6}$$

同理,由于对每个 $c\in -C_U$,$\|c\|=1$,由(5)式可得:

$$y^*(c)+(r-\varepsilon)\|c\|\leqslant -r+r-\varepsilon=-\varepsilon<0,\forall c\in -C_U,\tag{7}$$

又由于$-C=\mathrm{cone}(-C_U)$,故任取 $\tilde{y}\in -C\backslash\{0\}$,存在 $\lambda>0$ 及 $c\in -C_U$,使得 $\tilde{y}=\lambda c$。从而由(7)式可得:

$$y^*(\tilde{y})+(r-\varepsilon)\|\tilde{y}\|=\lambda(y^*(c)+(r-\varepsilon)\|c\|)<0,\forall\tilde{y}\in -C\backslash\{0\}。\tag{8}$$

令 $\alpha=r-\varepsilon$ 且 $\alpha>0$,结合(6)、(8)式有:

$$y^*(\tilde{y})+\alpha\|\tilde{y}\|<0\leqslant y^*(z)+\alpha\|z\|,\forall\tilde{y}\in -C\backslash\{0\},z\in\mathrm{bd}(K),$$

由(8)式可得 $y^*(\tilde{y})+\alpha\|\tilde{y}\|<0$,$\forall\tilde{y}\in -C\backslash\{0\}$,从而有:

$$y^*(-\tilde{y})-\alpha-\|\tilde{y}\|=-(y^*(\tilde{y})+\alpha\|\tilde{y}\|)<0,\forall -\tilde{y}\in -C\backslash\{0\}。$$

故$\{y^*\}\times\{\alpha\}\in\hat{C}^{\alpha\#}$且 $\alpha>0$,即 $\hat{C}^{\alpha\#}\neq\varnothing$。又由于 $\hat{C}^{\alpha\#}\subset\hat{C}^{\alpha*}$,故$\{y^*\}\times\{\alpha\}\in\hat{C}^{\alpha*}$且 $\alpha>0$。由文献[4]可知,

$-C$ 尖锥。

必要性。设 $-C_U$ 是弱紧的且存在 $\{y^*\}\times\{\alpha\}\in\hat{C}^{\alpha\#}$ 满足(1)式。由于 $-C_U\subset -C$ 且 $K_U^\partial\subset \mathrm{bd}(K)$，故(1)式对 $y\in -C_U$，$z\in K_U^\partial$，其中 $\|y\|=\|z\|=1$ 也成立，则有：

$$y^*(y)<-\alpha\leqslant y^*(z),\ \forall y\in -C_U,z\in K_U^\partial。\tag{9}$$

由于 $-C_U$ 是弱紧且 $\tilde{g}_{(\{y^*\},\alpha)}(y)=y^*(y)+\alpha\|y\|$ 是弱 Lsc 的，且 $-\tilde{C}=\mathrm{cl}(\mathrm{co}(-C_u))$，$\mathrm{co}(K_u^\partial\cup\{0_Y\})=\tilde{K}^\partial$。

由(9)式知 $-C_U\subset H^-(y^*,-\alpha-\varepsilon)$ 及 $(K_u^\partial\cup\{0_Y\})\subset H^+(y^*,-\alpha)$，其中：

$$H^-(y^*,-\alpha-\varepsilon)=\{y\in Y:y^*(y)\leqslant -\alpha-\varepsilon\},H^+(y^*,-\alpha)=\{z\in Y:y^*(z)\leqslant -\alpha\}。$$

由于 $H^-(y^*,-\alpha-\varepsilon)$，$H^+(y^*,-\alpha)$ 是闭凸集，从而有：

$$-\tilde{C}\subset H^-(y^*,-\alpha-\varepsilon)\text{且}\tilde{K}^\partial\subset H^+(y^*,-\alpha),$$

又由于 $H^-(y^*,-\alpha-\varepsilon)\cap H^+(y^*,-\alpha)=\varnothing$，故 $-\tilde{C}\cap\tilde{K}^\partial=\varnothing$。　　证毕

C 的广义正线性集的非空性问题等价于包含 C 的拟 Bishop-phelps 锥的存在性问题，故由定理 1 可证，包含一个锥且被另一个锥所包含的 Bishop-phelps 锥 $C(G,\alpha)=\{y\in Y:\alpha\|y\|\leqslant \sup\limits_{y^*\in G} y^*(y)\}$，$G\subset Y^*$ 是存在的。

定理 2　设 $(Y,\|\cdot\|)$ 是自反的 Banach 空间，C 是 Y 中的闭锥且 C_ε 是 C 的 ε-conic 邻域，$\varepsilon\in(0,1)$。假设 C 和 C_ε 关于 $\|\cdot\|$ 有分离性质，则存在 $\{y^*\}\times\{\alpha\}\in\hat{C}^{\alpha\#}$，使得：

$$-C\backslash\{0_Y\}\subset\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))\subset -C_\varepsilon,\tag{10}$$

其中：$\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))=\{y\in Y:y^*(y)+\alpha\|y\|<0\}$。

证明　由 $\tilde{C}\cap\tilde{C}_\varepsilon^\partial=\varnothing$ 可知，$-\tilde{C}\cap -\tilde{C}_\varepsilon^\partial=\varnothing$。由定理 1 知，存在 $\{y^*\}\times\{\alpha\}\in\hat{C}^{\alpha\#}$，使得：

$$y^*(y)+\alpha\|\tilde{y}\|<0\leqslant y^*(z)+\alpha\|z\|,\forall y\in -C\backslash\{0_Y\},z\in \mathrm{bd}(-C_\varepsilon),\tag{11}$$

由文献[4]知 $\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))=\{y\in Y:y^*(y)+\alpha\|y\|<0\}$，从而有 $-C\backslash\{0_Y\}\subset\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))$。

反设 $\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))\not\subset -C_\varepsilon$，则存在 $\overline{y}\in\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))$，使得 $\overline{y}\notin -C_\varepsilon$。

令 $\mathrm{int}(\tilde{g}(\{y^*\},\alpha))(y)=y^*(y)+\alpha\|y\|$，$y\in Y$，由 $\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))\not\subset -C_\varepsilon$ 知：

$$\mathrm{int}(\tilde{g}(\{y^*\},\alpha))(\overline{y})<0,\tag{12}$$

任取 $y_1\in -C\backslash\{0_Y\}$，由(11)式知：

$$\mathrm{int}(\tilde{g}(\{y^*\},\alpha))(y_1)<0。\tag{13}$$

又由 $y_1\in -C\backslash\{0_Y\}$ 知 $y_1\in -C_\varepsilon$，则 $\{\lambda\overline{y}+(1-\lambda)y_1:\lambda\in(0,1)\}$ 与 $-C_\varepsilon$ 的边界交于某个点 $\tilde{y}$，也即是存在 $\tilde{\lambda}\in(0,1)$，$\tilde{y}\in\mathrm{bd}(-C_\varepsilon)$，使得 $\tilde{y}=\tilde{\lambda}\tilde{y}+(1-\tilde{\lambda})y_1$。由(11)式可得 $\tilde{g}(\{y^*\},\alpha)(\tilde{y})\geqslant 0$。

另一方面，由 $\tilde{g}(\{y^*\},\alpha)(y)\geqslant 0$ 的凸性及(12)、(13)式知：

$$\tilde{g}(\{y^*\},\alpha)(\tilde{y})\leqslant\tilde{\lambda}\tilde{g}(\{y^*\},\alpha)(\overline{y})+(1-\tilde{\lambda})\tilde{g}(\{y^*\},\alpha)(y_1)<0,$$

这与 $\tilde{g}(\{y^*\},\alpha)(\tilde{y})\geqslant 0$ 矛盾。故 $\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y^*\},\alpha))\subset -C_\varepsilon$。　　证毕

尖凸锥 $\tilde{S}(\{y_\varepsilon^*\},\alpha_\varepsilon)$ 有一个重要性质，即满足 $-C\backslash\{0_Y\}\subset\mathrm{int}(\tilde{S}(\{y_\varepsilon^*\},\alpha_\varepsilon))\subset -C_\varepsilon$，可取 ε 足够小，让 $\tilde{S}(\{y_\varepsilon^*\},\alpha_\varepsilon)$ 充分逼近 $-C$，因此这样的锥可以认为是 $-C$ 的一个外部凸逼近。这个性质说明了锥 $-C$ 与它的 ε-conic 邻域 $-C_\varepsilon$ 有分离性质，$-C$ 能被 $\tilde{S}(\{y_\varepsilon^*\},\alpha_\varepsilon)$ 任意逼近。

下面给出 3 个例子，分别解释本文中的分离性质和定理 2。

例 1　设 $C=\{y=(y_1,y_2):y_i\geqslant 0,i=1,2\}$，易知对所有的 $0<\varepsilon<1$ 和范数 $\|y\|_1=|y_2|+|y_2|$，$\|y\|_2=\sqrt{|y_1|^2+|y_2|^2}$，$-C$ 和它的 ε-conic 邻域 $-C_\varepsilon$ 满足定义 4 中的分离性质，即 $-\tilde{C}\cap -\tilde{C}_\varepsilon^\partial=\varnothing$。

例 2　设 $C_1=\{y=(y_1,y_2):y_1\leqslant y_2\leqslant 2y_1,y_1\geqslant 0\}$，则锥 $-C_1$ 和它的 ε-conic 邻域不满足定义 4 中关于范数 $\|y\|_1$ 的分离性质，而锥 C_1 和它的 ε-conic 邻域满足定义 4 中关于范数 $\|y\|_2$ 的分离性质。

例 3　设 $C_2=\{y=(y_1,y_2):-y_1/2\leqslant y_2,y_1\geqslant 0\}$，显然 $\{(2,1)\}\times\{1\}\in\hat{C}_2^{\alpha *}$，且向量 $(-2,1)$，$(0,-1)$ 是

$-C_2$ 的边界点，对函数：

$$g_1(y)=g_1(y_1,y_2)=\tilde{g}_{(\{(2,1)\},1)}(y)=2y_1+y_2+(|y_1|+|y_2|),$$

有 $g_1(-2,1)=0$，$g_1(0,-1)=0$，且对每个 $y\in \mathrm{int}(-C_2)$ 有 $g_1(y)<0$，而对每个 $y\in \mathbf{R}^2\backslash(-C_2)$ 有 $g_1(y)>0$。因此有 $\{(2,1)\}\times\{1\}\in \hat{C}_2^{a*}\backslash\hat{C}_2^{a\#}$，且：

$$-C_2=\{y=(y_1,y_2):g_1(y)\leqslant 0\}。\tag{14}$$

显然，对任意的 $\varepsilon(0<\varepsilon\leqslant 1)$，$\{(2,1)\}\times\{1-\varepsilon\}\in \hat{C}_2^{a\#}$，且：

$$-C_2/\{0_Y\}\subset \mathrm{int}\{(y_1,y_2):2y_1+y_2+(1-\varepsilon)(|y_1|+|y_1|)\leqslant 0\},$$

所以次线性泛函 $g_2(y)=g_2(y_1,y_2)=2y_1+y_2+(1-\varepsilon)(|y_1|+|y_1|)$ 的零次水平集是 $-C_2$ 的外凸近似。从(14)式可知，当选足够小的正数 ε，$-C_2$ 一定能被这些零次水平集逼近。

本文在非凸的情况下，给出了具有某种特殊分离性质的闭锥的非线性分离定理，并用这个分离定理证明了包含一个锥且被另一个锥所包含的 Bishop-phelps 锥是存在的，从而解决了逼近一个给定锥的 Bishop-phelps 锥的存在性问题。

参考文献：

[1] PHELPS R R. Support cones in Banach spaces and their applications[J]. Advances in Mathematics, 1974, 13(1): 1-19.

[2] JOHANNES J. A generalization of a theorem of Arrow, Barankin, and Blackwell[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1988, 26(5): 999-1005.

[3] KASIMBEYLl R. A nonlinear cone separation theorem and scalarization in nonconvex vector optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2010, 20(3): 1591-1619.

[4] 杨吉英，张娟. 一类广义正线性集及其相关性质[J]. 数学的实践与认识，2018，48(19)：204-209.
YANG J Y, ZHANG J. A class of generalized linear positive set and its related properties[J]. Mathematics in Practice and Theory, 2018, 48(19): 204-209.

[5] KREIN M G, RUTMAN M A. Linear operators leaving invariant a cone in a Banach space[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1962(10): 199-325.

[6] JOHANNES J. Vector optimization[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.

[7] MIETTINEN K. Nonlinear mutiobjective optimizaiton[M]. Boston: Kluwer, 1990.

Operations Research and Cybernetics

A Nonlinear Cone Separation Theorem in Reflexive Banach Space

YANG Jiying[1], HE Qinghai[2]

(1. School of Date Science, Baoshan University, Baoshan Yunnan 665000;
2. School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650106, China)

Abstract: [**Purposes**]A nonlinear cone separation theorem in reflexive Banach space is proposed. [**Methods**]The separation theorem is proved by using the correlation properties of the elements of a class of generalized positive linear sets defined in literature. [**Findings**] Under the assumption of no convexity, it is proved that two closed cones with some special separation property can be approximated by the zeroth level set of a class of monotone sublinear functions with conic level set defined in the existing literature, and that the closed cones with the separation property of its epsilon-conic neighborhood can also be approximated by the zeroth level set of a function of such functions. [**Conclusions**]In reflexive Banach space, the two closed cones possessing the separation property can be separated by a certain sublinear function, and the question on the existence of a Bishop-Phelps cone which is close to the given cone is positively answered.

Keywords: generalized positive linear sets; separate and approximate; Bishop-phelps cone

（责任编辑　黄　颖）