运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20230104

# 集值支付博弈中强 Nash 平衡的存在性定理*

王能发[1,2]，杨　哲[3]，刘自鑫[1,2]

(1. 贵州财经大学 数学与统计学院；2. 贵州省大数据统计分析重点实验室，贵阳 550025；
3. 上海财经大学 经济学院，上海 200433)

**摘要**:【目的】研究具有集值支付的博弈问题中强 Nash 平衡的存在性。【方法】分别基于非传递效用与可传递效用的假定，引入强 Nash 非传递效用平衡和强 Nash 可传递效用平衡的概念。【结果】在一些常规条件下，得到强 Nash 非传递效用平衡和强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的存在性定理。【结论】扩展了集值支付博弈的研究范围，并把合作解存在性推广到了集值支付博弈中，为集值支付博弈的应用提供了理论支撑。

**关键词**:集值支付博弈；强 Nash 平衡；非传递效用；可传递效用

**中图分类号**:O225　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)01-0139-06

自从 Nash[1-2] 首先分析了 $n$ 人非合作博弈中的平衡概念，Nash 平衡得到广泛研究[3-5]。经典博弈模型中，参与人的支付函数都是单值的。Yang 等人[6] 研究了向量值(多目标)支付函数博弈中弱 Pareto-Nash 平衡的存在性与稳定性。值得注意的是，支付函数也有可能为集值。Guillerme[7] 首先分析了集值支付函数博弈中的 Nash 平衡。作为对文献[7]研究结果的深化，罗群[8-9] 在集值支付的一般博弈中研究了 Nash 平衡的存在性与通有稳定性。王能发等人[10] 研究了反需求函数集值情况下单主多从寡头竞争模型。在文献[7-10]中，平衡解均是基于非合作思想。本文拟把合作因素引入到模型中。

经典的合作博弈基于特征函数形式。Scarf[11] 首先证明了非传递效用合作博弈中核的存在性。作为扩展，Scarf[12] 证明了规范型博弈中合作解的存在性，这是策略型博弈中合作解存在性的第一个工作。Ichiishi[13] 在模型中同时考虑非合作与合作因素，证明了社会同盟平衡存在性引理。在此基础上，可以推出强 Nash 平衡的存在性。进一步，Border[14] 和 Kajii[15] 把 Scarf 的工作延伸到具有非序偏好的博弈中。在上述的工作中，强 Nash 平衡综合考虑了非合作与合作的思想，但 Ichiishi[13] 的充分性条件十分难以验证。为了弥补这一缺陷，Nessah 等人[16] 引入了博弈问题的一致性条件，并给出了一个新的强 Nash 平衡存在性定理。目前，不确定性下博弈中强合作平衡研究成为一个热点。张会娟等人[17-18] 在非合作博弈框架下分别研究了强 Nash 平衡与简单 Berge 平衡的存在性。之后邓喜才等人[19] 证明了不确定下强 Berge 平衡的存在性。进一步，邓喜才等人[20] 得到了不确定下广义博弈中强 Berge 平衡的存在性。而杨哲[21] 研究了广义不确定性下非合作博弈中 Berge-NS 平衡。

根据上述文献不难发现，集值支付博弈只研究了非合作的 Nash 平衡，而强 Nash 平衡是一类重要的解概念，目前强 Nash 平衡的研究都基于单值支付的博弈模型。基于此，本文将从非传递效用和可传递效用两个角度分析集值支付博弈中的强 Nash 平衡。非传递效用的合作解研究与 Scarf[12]、Border[14]、Kajii[15]、Nessah 和 Tian[16] 的研究一脉相承，而可传递效用的研究思想来自于 Zhao[22-23] 的工作。Zhao[22-23] 分别在规范型博弈中引入了可传递效用 $\alpha$-核与可传递效用 $\beta$-核，在存在性研究的基础上，应用到了寡头市场中。本文分析思路参考了 Zhao[22-23] 的工作。

## 1 预备知识

本节将回顾一些数学预备知识和已有结论。

* **收稿日期**:2022-04-09　　**修回日期**:2022-08-03　　**网络出版时间**:2023-02-22 15:22

**资助项目**:国家自然科学基金(No. 62062018)；贵州大数据统计分析重点实验室项目(No. 黔科合平台人才[2019]5103)；贵州省高层次创新型人才项目(No. 黔科合平台人才-GCC[2022]020-1)；贵州财经大学创新探索及学术新苗项目(No. 2022XSXMB22)

**第一作者简介**:王能发，男，副教授，博士，研究方向为非线性分析、博弈论及应用、数理经济学等，E-mail: nengfa_wang@163.com

**网络出版地址**:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230222.1321.012.html

设 $N=\{1,\cdots,n\}$为参与人集合,$\mathcal{N}$为 $N$ 中非空子集的集合。

**定义 1** 设 $\beta$ 是 $\mathcal{N}$ 中一个非空集合,如果存在权重$\{\lambda_B>0\mid B\in\beta\}$,使得 $\sum\limits_{B\in\beta,B\ni i}\lambda_B=1,\ \forall\, i\in N$,则称 $\beta$ 是平衡的。

**定义 2** 一个可传递效用合作博弈可以描述为 $W:\mathcal{N}\to\mathbf{R}$,它的核定义为:

$$C^{\mathrm{TU}}(W)=\left\{x\in\mathbf{R}^n\,\middle|\,\sum_{i\in N}x_i=W(N),\ \sum_{i\in B}x_i\geqslant W(B),\ \forall\, B\in\mathcal{N}\right\}。$$

**引理 1**[24-25] 一个可传递效用合作博弈 $W$ 有一个非空核当且仅当 $\mathcal{N}$ 中任意具有平衡权重$\{\lambda_B>0\mid B\in\beta\}$的平衡集 $\beta$ 满足 $\sum\limits_{B\in\beta}\lambda_B W(B)\leqslant W(N)$。

**引理 2**[26] 设 $X,Y$ 为两个 Hausdorff 拓扑空间且 $Y$ 为紧的,如果集值映射 $F:X\to 2^Y$ 具有闭图,那么 $F$ 为上半连续且有紧值。

**引理 3**[26] 设 $X$ 为局部凸 Hausdorff 拓扑线性空间中的一个非空凸紧子集,集值映射 $F:X\to 2^X$ 为上半连续且有非空凸紧值。那么存在 $x^*\in X$,使得 $x^*\in F(x^*)$。

## 2 模型与强 Nash 平衡的存在性

设 $N=\{1,\cdots,n_0\}$为参与人集合,$\mathcal{N}$为 $N$ 中非空子集的集合。对任意 $i\in N$,$X_i$ 为参与人 $i$ 的策略空间,记 $X=\prod\limits_{i\in N}X_i$, $X_B=\prod\limits_{i\in B}X_i$, $X_{-B}=\prod\limits_{i\notin B}X_i$, $\forall\, B\in\mathcal{N}$。对任意 $i\in N$,$E_i$ 为一个 Banach 空间,$C_i$ 为 $E_i$ 中的一个非空闭凸尖锥且 $\mathrm{int}\ C_i\neq\varnothing$。对任意 $i\in N$,$f_i:X\to 2^{E_i}$ 为参与人 $i$ 的集值支付函数。由上述定义,本文的博弈模型可以表示为 $\Gamma=(N,(X_i,E_i,C_i,f_i)_{i\in N})$。参照文献[8-9]以及基于非合作思想,给出如下定义。

**定义 3** 如果对任意 $i\in N$,存在 $u_i^*\in f_i(x^*)$满足$(u_i^*-f_i(y_i,x_{-i}^*))\cap(-\mathrm{int}\ C_i)=\varnothing$,$\forall\, y_i\in X_i$,则称 $x^*\in X$ 是博弈 $\Gamma$ 的 Nash 平衡。

参照文献[12,14-15],基于完全合作的思想给出如下定义。

**定义 4** 对任意 $B\in\mathcal{N}$,不存在 $y_B\in X_B$,使得对任意 $z_{-B}\in X_{-B}$,存在$(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,z_{-B}))_{i\in B}$,满足:$u_i-f_i(x^*)\subset\mathrm{int}\ C_i$,$\forall\, i\in B$,则称 $x^*\in X$ 在 $\Gamma$ 的 $\alpha$-核中。

参照文献[13,16],同时考虑非合作与合作思想给出强 Nash 平衡。

**定义 5** 对任意 $B\in\mathcal{N}$,不存在 $y_B\in X_B$,使得存在$(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,x_{-B}^*))_{i\in B}$,满足 $u_i-f_i(x^*)\subset\mathrm{int}\ C_i$,$\forall\, i\in B$,则称 $x^*\in X$ 是 $\Gamma$ 的一个强 Nash 非传递效用平衡。

进一步,在强 Nash 非传递效用平衡概念的基础上,设 $c^*=(c_i^*)_{i\in N}\in\prod\limits_{i\in N}C_i^*$。

**定义 6** 如果博弈 $\Gamma$ 满足:

$$\sum_{i\in N}\sigma_i=\max_{u_i\in f_i(x^*),\forall i\in N}\sum_{i\in N}\langle c_i^*,u_i\rangle=\max_{x\in X}\max_{u_i\in f_i(x^*),\forall i\in N}\sum_{i\in N}\langle c_i^*,u_i\rangle,$$

$$\sum_{i\in B}\sigma_i\geqslant\max_{y_B\in X_B}\max_{u_i\in f_i(y_B,x_{-B}^*),\forall i\in B}\sum_{i\in B}\langle c_i^*,u_i\rangle,\ \forall\, B\in\mathcal{N},$$

则称$(x^*,\sigma)\in X\times\mathbf{R}^{n_0}$ 是 $\Gamma$ 的一个强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡。

**注 1** 非合作平衡是指每一个参与人都不可能偏离自己的平衡策略而获得更大的效用。这里的 $\alpha$-核解,是指每一个同盟都不存在可行策略,不管外部人如何选择,此策略都不能使同盟中的个体同时得到改善。强 Nash 平衡则是在 $\alpha$-核解的基础上,假定同盟外的个体选择平衡策略。强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡则是先把集值支付标量化,再构建一个可传递效用合作博弈,以此分析收益在个体间的合理分配。这些分配不能被任意同盟打破。这里可传递效用合作博弈的构建采用了强 Nash 平衡的定义。而在文献[22]中,则是采用了 $\alpha$-核的概念。如果 $f_i$ 为一个单实值函数,那么 Nash 平衡为 $f_i(x_i^*,x_{-i}^*)\geqslant f_i(y_i,x_{-i}^*)$,$\forall\, y_i\in X_i$;$\alpha$-核解为$\forall\, B\in\mathcal{N}$,$\forall\, y_B\in X_B$,存在 $i\in B$,存在 $z_{-B}\in X_{-B}$,使得 $f_i(y_B,z_{-B})\leqslant f_i(x^*)$;强 Nash 平衡为$\forall\, B\in\mathcal{N}$,$\forall\, y_B\in X_B$,存在 $i\in B$,使得 $f_i(y_B,x_{-B}^*)\leqslant f_i(x^*)$。容易看出,强 Nash 平衡是 Nash 平衡,也是合作平衡。

为了证明集值支付博弈中强 Nash 平衡的存在性,下面引入一致性条件。

**定义 7** 对任意 $x\in X$,存在 $z\in X$,使得$\forall\, B\in\mathcal{N}$,$\forall\, y_B\in X_B$,$\forall\,(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,x_{-B}))_{i\in B}$,存在$(v_i)_{i\in B}\in$

$(f_i(z))_{i\in B}$ 和 $i\in B$，满足 $u_i-v_i\notin \mathrm{int}\ C_i$，则称 $\Gamma$ 具有一致性条件。

**注 2**　Nessah 等人在文献[16]中对单实值函数的博弈 $(X_i,f_i)_{i\in N}$ 引入了一致性条件：存在 $\lambda\in\Delta$，使得 $\forall x\in X$，存在 $z\in X$，满足 $\sup\limits_{y_S\in X_S}\sum\limits_{i\in S}\lambda_{S,i}f_i(y_S,x_{-S})\leqslant\sum\limits_{i\in S}\lambda_{S,i}f_i(z_S,x_{-S})$，$\forall S\in\mathcal{N}$，这里 $\Delta=\prod\limits_{S\in\mathcal{N}}\Delta_S$，$\Delta_S=\left\{\lambda_S\in\mathbf{R}_+^{|S|}\,\middle|\,\sum\limits_{j\in S}\lambda_{S,j}=1\right\}$。相对于文献[16]中的一致性条件，这里做了两点强化：一是支付函数变为集值情形；二是本文的定义中没有对同盟中支付函数进行权重相加，而直接利用强 Nash 平衡的解概念加以定义。因此，本文的定义更强，并不能退化为文献[16]中的一致性条件。这里只能说在文献[16]中概念的启发下，针对集值支付博弈提出了新的一致性条件。

下面给出集值支付博弈下的强 Nash 非传递效用平衡与强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的例子。

**例 1**　设 $N=\{1,2\}$，$X_1=X_2=[0,1]$，$X=X_1\times X_2$，$f_1(x_1,x_2)=[0,x_1+x_2]$，$\forall(x_1,x_2)\in X$；$f_2(x_1,x_2)=[-x_1,x_2]$，$\forall(x_1,x_2)\in X$；$c^*=(c_1^*,c_2^*)=(1,1)$。

根据强 Nash 非传递效用平衡与强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的定义，经计算可得强 Nash 非传递效用平衡集为 $\{(1,1)\}$，强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡集为 $\{(x_1,x_2,\sigma_1,\sigma_2)\mid x_1=x_2=1,\sigma_1=2,\sigma_2=1\}$。

下面给出强 Nash 非传递效用平衡和强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的存在性定理。

**定理 1**　假定博弈 $\Gamma=(N,(X_i,E_i,C_i,f_i)_{i\in N})$ 满足以下条件：

(i) 对任意 $i\in N$，$X_i$ 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间中的一个非空凸紧子集；

(ii) 对任意 $i\in N$，$f_i$ 是连续具有非空紧值；

(iii) 对任意 $i\in N$，$f_i$ 是集值 $C_i$-拟凹的，即对任意 $z^1,z^2\in X$，任意 $t\in[0,1]$，有 $f_i(z^1)+C_i\subset f_i(tz^1+(1-t)z^2)$，或者 $f_i(z^2)+C_i\subset f_i(tz^1+(1-t)z^2)$；

(iv) $\Gamma$ 具有一致性条件。

那么 $\Gamma$ 存在一个强 Nash 非传递效用平衡。

**证明**　构建集值映射 $F:X\to 2^X$ 如下：

$$F(x)=\left\{z\in X\,\middle|\,\begin{array}{l}\forall B\in\mathcal{N},\forall y_B\in X_B,\forall(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,x_{-B}))_{i\in B},\\ \exists(v_i)_{i\in B}\in(f_i(z))_{i\in B},\exists i\in B,\text{s. t. }u_i-v_i\notin\mathrm{int}\ C_i\end{array}\right\}。$$

1) 根据条件(iv)，可得 $F(x)\neq\varnothing$，$\forall x\in X$。

2) 对任意 $x\in X$，$z^1,z^2\in F(x)$，$t\in[0,1]$，有 $\forall B\in\mathcal{N}$，$\forall y_B\in X_B$，$\forall(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,x_{-B}))_{i\in B}$，存在 $(v_i^1)_{i\in B}\in(f_i(z^1))_{i\in B}$，$(v_i^2)_{i\in B}\in(f_i(z^2))_{i\in B}$，$i_1\in B$，$i_2\in B$ 满足 $u_{i_1}-v_{i_1}^1\notin\mathrm{int}\ C_{i_1}$，$u_{i_2}-v_{i_2}^2\notin\mathrm{int}\ C_{i_2}$。根据条件(iii)，有对任意 $i\in B$，$f_i(z^1)+C_i\subset f_i(tz^1+(1-t)z^2)$，或者 $f_i(z^2)+C_i\subset f_i(tz^1+(1-t)z^2)$。因此存在 $c_i^1,c_i^2\in C_i$，$\forall i\in B$，使得对任意 $i\in B$，$v_i^1+c_i^1\in f_i(tz^1+(1-t)z^2)$，或者 $v_i^2+c_i^2\in f_i(tz^1+(1-t)z^2)$。那么必有 $u_{i_1}-(v_{i_1}^1+c_{i_1}^1)\notin\mathrm{int}\ C_{i_1}$，或者 $u_{i_2}-(v_{i_2}^2+c_{i_2}^2)\notin\mathrm{int}\ C_{i_2}$，否则如果 $u_{i_1}-(v_{i_1}^1+c_{i_1}^1)\in\mathrm{int}\ C_{i_1}$，有 $u_{i_1}-v_{i_1}^1\in c_{i_1}^1+\mathrm{int}\ C_{i_1}\subset\mathrm{int}\ C_{i_1}$。这与 $u_{i_1}-v_{i_1}^1\notin\mathrm{int}\ C_{i_1}$ 矛盾。同理如果 $u_{i_2}-(v_{i_2}^2+c_{i_2}^2)\in\mathrm{int}\ C_{i_2}$，有 $u_{i_2}-v_{i_2}^2\in c_{i_2}^2+\mathrm{int}\ C_{i_2}\subset\mathrm{int}\ C_{i_2}$。这与 $u_{i_2}-v_{i_2}^2\notin\mathrm{int}\ C_{i_2}$ 矛盾。

因此，$\forall B\in\mathcal{N}$，$\forall y_B\in X_B$，$\forall(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,x_{-B}))_{i\in B}$，则：

a) 存在 $i_1\in B$，$v^B\in(f_i(tz^1+(1-t)z^2))_{i\in B}$，这里 $v^B$ 被定义如下：如果 $i\neq i_1$，$v_i^B$ 为 $f_i(tz^1+(1-t)z^2)$ 中任意取定；如果 $i=i_1$，$v_{i_1}^B=v_{i_1}^1+c_{i_1}^1$，这意味着 $u_{i_1}-v_{i_1}^B\notin\mathrm{int}\ C_{i_1}$；

b) 或者存在 $i_2\in B$，$v^B\in(f_i(tz^1+(1-t)z^2))_{i\in B}$，这里 $v^B$ 被定义如下：如果 $i\neq i_2$，$v_i^B$ 为 $f_i(tz^1+(1-t)z^2)$ 中任意取定；如果 $i=i_2$，$v_{i_2}^B=v_{i_2}^2+c_{i_2}^2$，这意味着 $u_{i_2}-v_{i_2}^B\notin\mathrm{int}\ C_{i_2}$。

这样得到 $tz^1+(1-t)z^2\in F(x)$。因此 $F(x)$ 为凸的。

3) 根据引理 2，为了证明 $F$ 为上半连续且有紧值，只需证明 $F$ 具有闭图。对任意序列 $\{(x^n,z^n)\}$ 满足 $z^n\in F(x^n)$，$(x^n,z^n)\to(x,z)\in X\times X$，有对任意 $B\in\mathcal{N}$，任意 $y_B\in X_B$，任意 $(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,x_{-B}^n))_{i\in B}$，存在 $(v_i)_{i\in B}\in(f_i(z^n))_{i\in B}$ 和 $i\in B$，满足 $u_i-v_i\notin\mathrm{int}\ C_i$。

用反证法。如果 $z\notin F(x)$，那么存在 $B\in\mathcal{N}$，$y_B\in X_B$，$(u_i)_{i\in B}\in(f_i(y_B,z_{-B}))_{i\in B}$，有 $u_i-f_i(z)\subset\mathrm{int}\ C_i$，$\forall i\in B$。由 $f_i$ 是连续且有非空紧值，和 $(x^n,z^n)\to(x,z)\in X\times X$，存在序列 $\{(u_i^n)_{i\in B}\}$ 满足 $\forall i\in B$，$u_i^n\to u_i$，$u_i^n\in f_i(y_B,x_{-B}^n)$，$u_i^n-f_i(z^n)\subset\mathrm{int}\ C_i$。这与 $z^n\in F(x^n)$ 矛盾。

由上述 1)~3),得到 $F$ 为上半连续且有非空凸紧值,根据引理 3,存在 $x^* \in X$,使得 $x^* \in F(x^*)$。显然,$x^*$ 为 $\Gamma$ 的强 Nash 非传递效用平衡。 证毕

为了证明强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的存在性,下面引入博弈的平衡概念。

**定义** 8 对任意 $x \in X$ 和 $\mathcal{N}$ 中的任意具有平衡权重 $\{\lambda_B > 0 \mid B \in \beta\}$ 的平衡集 $\beta$,$\forall\, y_B \in X_B$,$\forall\, B \in \beta$,存在 $z \in X$,使得 $\sum_{B \in \beta, B \ni i} \lambda_B f_i(y_B, x_{-B}) \subset f_i(z)$,$\forall\, i \in N$,则称博弈 $\Gamma$ 是平衡的。

**定理** 2 假定博弈 $\Gamma = (N, (X_i, E_i, C_i, f_i)_{i \in N})$ 和 $(c_i^*)_{i \in N} \in \prod_{i \in N} C_i^*$ 满足以下条件:

(i) 对任意 $i \in N$,$X_i$ 是局部凸 Hausdorff 拓扑向量空间中的一个非空凸紧子集;

(ii) 对任意 $i \in N$,$f_i$ 是连续具有非空紧值;

(iii) 博弈 $\Gamma$ 是平衡的。

那么 $\Gamma$ 至少存在一个强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡。

**证明** 定义函数 $g: X \to \mathbf{R}$ 如下:

$$g(x) = \max_{u_i \in f_i(x), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle,\ \forall\, x \in X。$$

根据条件(ii),$g$ 为连续的。利用 $X$ 的紧性,存在 $x^* \in X$,使得 $g(x^*) = \max_{x \in X} g(x)$,那么有:

$$\max_{u_i \in f_i(x^*), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle = \max_{x \in X} \max_{u_i \in f_i(x), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle。$$

定义一个可传递效用合作博弈 $W: \mathcal{N} \to \mathbf{R}$ 如下:

$$W(B) = \max_{y_B \in X_B} \max_{u_i \in f_i(y_B, x_{-B}^*), \forall i \in B} \sum_{i \in B} \langle c_i^*, u_i \rangle,\ \forall\, B \in \mathcal{N}。$$

为了利用引理 1,只需证明 $\mathcal{N}$ 中任意具有平衡权重 $\{\lambda_B > 0 \mid B \in \beta\}$ 的平衡集 $\beta$,满足 $\sum_{B \in \beta} \lambda_B W(B) \leqslant W(N)$。首先利用条件(ii),对任意 $B \in \beta$,存在 $y_B \in X_B$,$u^B \in (f_i(y_B, x_{-B}^*))_{i \in B}$,使得 $W(B) = \sum_{i \in B} \langle c_i^*, u_i^B \rangle$。利用条件(iii),存在 $z \in X$,使得对任意 $i \in N$,有 $\sum_{B \in \beta, B \ni i} \lambda_B u_i^B \in \sum_{B \in \beta, B \ni i} \lambda_B f_i(y_B, x_{-B}^*) \subset f_i(z)$。进一步有:

$$\sum_{B \in \beta} \lambda_B W(B) = \sum_{B \in \beta} \sum_{i \in B} \lambda_B \langle c_i^*, u_i^B \rangle = \sum_{i \in N} \sum_{B \in \beta, B \ni i} \lambda_B \langle c_i^*, u_i^B \rangle = \sum_{i \in N} \langle c_i^*, \sum_{B \in \beta, B \ni i} \lambda_B u_i^B \rangle \leqslant$$

$$\max_{u_i \in f_i(z), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle \leqslant \max_{x \in X} \max_{u_i \in f_i(x), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle = W(N)。$$

因此,可传递效用合作博弈 $W$ 满足引理 1 的条件。那么存在 $\sigma \in \mathbf{R}^{n_0}$,使得 $\sum_{i \in N} \sigma_i = W(N)$,$\sum_{i \in B} \sigma_i \geqslant W(B)$,$\forall\, B \in \mathcal{N}$。这意味着:

$$\sum_{i \in N} \sigma_i = \max_{u_i \in f_i(x^*), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle = \max_{x \in X} \max_{u_i \in f_i(x), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle,$$

$$\sum_{i \in B} \sigma_i \geqslant \max_{y_B \in X_B} \max_{u_i \in f_i(y_B, x_{-B}^*), \forall i \in B} \sum_{i \in B} \langle c_i^*, u_i \rangle,\ \forall\, B \in \mathcal{N}。$$

得到 $(x^*, \sigma) \in X \times \mathbf{R}^{n_0}$ 为 $\Gamma$ 的一个强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡。 证毕

**注** 3 上面的定理 2 提供了强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的存在性定理。此定理为文献[22]中结论的推广。第一,本文把文献[22]中的单值支付集值化;第二,文献[22]中的结论基于 $\alpha$-改进概念,本文采用强 Nash 平衡的概念,强于可传递效用 $\alpha$-核。可以定义出可传递效用 $c^*$-$\alpha$-核解 $(x^*, \sigma) \in X \times \mathbf{R}^{n_0}$,即:

$$\sum_{i \in N} \sigma_i = \max_{u_i \in f_i(x^*), \forall i \in N} \sum_{i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle = \max_{x \in X} \max_{u_i \in f_i(x^*), \forall i \in N} \langle c_i^*, u_i \rangle,$$

$$\sum_{i \in B} \sigma_i \geqslant \max_{y_B \in X_B} \min_{z_{-B} \in X_{-B}} \max_{u_i \in f_i(y_B, z_{-B}), \forall i \in B} \sum_{i \in B} \langle c_i^*, u_i \rangle,\ \forall\, B \in \mathcal{N}。$$

明显地,如果 $(x^*, \sigma)$ 为强 Nash 平衡可传递效用 $c^*$-平衡,那么也一定是可传递效用 $c^*$-$\alpha$-核解。因此,定理 2 是一个新的充分性条件,这在文献[22]中是没有的。

**例** 2 设 $N = \{1, 2\}$,$X_1 = X_2 = [0, 1]$,$X = X_1 \times X_2$,$f_1(x_1, x_2) = [0, x_1] \times [0, x_2]$,$\forall\, (x_1, x_2) \in X$;$f_2(x_1, x_2) = [0, x_1 + x_2] \times [0, x_1 + x_2]$,$\forall\, (x_1, x_2) \in X$;$c^* = (c_1^*, c_2^*) = ((1, 1), (1, 1))$。

根据强 Nash 非传递效用平衡与强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的定义,经计算可得强 Nash 非传递效用平衡

集为{(1,1)}，强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡集为$\{(x_1,x_2,\sigma_1,\sigma_2)\mid x_1=x_2=1,\sigma_1=2,\sigma_2=4\}$。

## 3 结束语

本文在集值支付博弈中引入了合作因素，在同时考虑非合作与合作的基础上，引入强 Nash 平衡概念。考虑前人合作解存在性研究，本文分别从非传递效用和可传递效用两个方面加以分析，得到了强 Nash 非传递效用平衡和强 Nash 可传递效用 $c^*$-平衡的存在性。本文的工作扩展了集值支付博弈的研究范围，也把合作解存在性推广到了集值支付博弈中。

**参考文献：**

[1] NASH J. Equilibrium point in $n$-person games[J]. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America，1950，36(1)：48-49.

[2] NASH J. Noncooperative games[J]. Annals of Mathematics，1951，54(2)：286-295.

[3] TAN K K，YU J，YUAN X Z. Existence theorems of Nash equilibria for non-cooperative $n$-person games[J]. International Journal of Game Theory，1995，24：217-222.

[4] YU J. Essential equilibrium points of $n$-person noncooperative games[J]. Journal of Mathematical Economics，1999，31：361-372.

[5] 俞建. 博弈论与非线性分析[M]. 北京：科学出版社，2008.
YU J. Game theory and nonlinear analysis[M]. Beijing：Science Press，2008.

[6] YANG H，YU J. Essential component of the set of weakly Pareto-Nash equilibrium points[J]. Applied Mathematics Letters，2002，15(5)：553-560.

[7] GUILLERME J. Nash equilirium for set-valued maps[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，1994，187：705-715.

[8] 罗群. 集值映射的 Nash 平衡点的存在定理[J]. 运筹学学报，2003，7(2)：77-83.
LUO Q. Existence theorems of Nash equilibria for set-valued mappings[J]. Operations Research Transactions，2003，7(2)：77-83.

[9] 罗群. 集值映射的 Nash 平衡点集的通有稳定性[J]. 数学学报，2003，46(5)：925-930.
LUO Q. Generic stability of Nash equilibria for set-valued mappings[J]. Acta Mathematica Sinica，2003，46(5)：925-930.

[10] 王能发，杨哲. 反需求函数集值情况下单主多从寡头竞争模型[J]. 运筹与管理，2014，23(2)：163-166.
WANG N F，YANG Z. One leader-multi-followers oligopolistic competition model on the condition inverse demand function is set-value[J]. Operations Research and Management Science，2014，23(2)：163-166.

[11] SCARF H E. The core of an $N$-person game[J]. Econometrica，1967，35：50-69.

[12] SCARF H E. On the existence of a cooperative solution for a general class of n-person games[J]. Journal of Economic Theory，1971，3：169-181.

[13] ICHIISHI T. A social coalitional equilibrium existence lemma[J]. Econometrica，1981，49(2)：369-377.

[14] BORDER K C. A core existence theorem for games without ordered preferences[J]. Econometrica，1984，52：1537-1542.

[15] KAJII A. A generalization of Scarf's theorem：an $\alpha$-core existence theorem without transitivity or completeness[J]. Journal of Economic Theory，1992，56：194-205.

[16] NESSAH R，TIAN G. On the existence of strong Nash equilibria[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2014，414(2)：871-885.

[17] 张会娟，张强. 不确定性下非合作博弈强 Nash 均衡的存在性[J]. 控制与决策，2010，25(8)：1251-1254.
ZHANG H J，ZHANG Q. Existence of strong Nash equilibrium for non-cooperative games under uncertainty[J]. Control and Decision，2010，25(8)：1251-1254.

[18] 张会娟，张强. 不确定性下非合作博弈简单 Berge 均衡的存在性[J]. 系统工程理论与实践，2010，30(9)：1630-1635.
ZHANG H J，ZHANG Q. Existence of simple Berge equilibrium for non-cooperative games under uncertainty[J]. Systems Engineering-Theory & Practice，2010，30(9)：1630-1635.

[19] 邓喜才，向淑文，左羽. 不确定性下强 Berge 均衡的存在性[J]. 运筹学学报，2013，17(3)：101-107.
DENG X C，XIANG S W，ZUO Y. Existence of strong Berge equilibrium under uncertainty[J]. Operations Research Transactions，2013，17(3)：101-107.

[20] 邓喜才，向淑文. 不确定下广义博弈强 Berge 均衡的存在性[J]. 应用数学学报，2015，38(2)：200-211.
DENG X C，XIANG S W. Existence of strong Berge equilibrium for generalized non-cooperative games under uncertainty[J].

Acta Mathematicae Applicatae Sinica,2015,38(2):200-211.

[21] 杨哲.广义不确定性下非合作博弈中 Berge-NS 均衡的存在性[J].系统科学与数学,2015,35(9):1073-1080.
YANG Z. The existence theorems of Berge-NS equilibria in noncooperative games under generalized uncertainty[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science,2015,35(9):1073-1080.

[22] ZHAO J. The existence of TU $\alpha$-core in normal-form games[J]. International Journal of Game Theory,1999,28:25-34.

[23] ZHAO J. A $\beta$-core existence result and its application to oligopoly markets[J]. Games and Economic Behavior,1999,27:153-168.

[24] BONDAREVA O N. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games[J]. Problemi Kibemitiki,1963,10:119-139.

[25] SHAPLEY L S. On balanced sets and cores[J]. Naval Research Logistics Quarterly,1967,14:453-460.

[26] ALIPRANTIS C D,BORDER K C. Infinite dimensional analysis[M]. Berlin:Springer,2006.

## Operations Research and Cybernetics

# The Existence Theorems of Strong Nash Equilibria for Games with Set-Valued Payoffs

WANG Nengfa[1,2], YANG Zhe[3], LIU Zixin[1,2]

(1. School of Mathematics and Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025;
2. Guizhou Key Laboratory of Big Data Statistical Analysis, Guiyang 550025;
3. School of Economics, Shanghai University of Finance and Economics, Shanghai 200433, China)

**Abstract**: [**Purposes**]The existence of strong Nash equilibrium in game problems with set-valued payoffs is discussed. [**Methods**]By considering nontrasferable and transferable utilities, the notions of strong Nash nontransferable utility equilibria and strong Nash transferable utility equilibria for games with set-valued payoffs are introduced. [**Findings**]Under the regular conditions, the existence theorems of strong Nash nontransferable utility equilibria and strong Nash transferable utility $c^*$-equilibria are obtained. [**Conclusions**]This work extends the research scope of set-valued payoff games and extends the existence of cooperative solutions to set-valued payoff games, which provides theoretical support for the application of set-valued payoff games.

**Keywords**: games with set-valued payoffs; strong Nash equilibria; nontransferable utility; transferable utility

(责任编辑 许 甲)