2023 年 3 月 重庆师范大学学报(自然科学版) Mar. 2023
第 40 卷 第 2 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 40 No. 2

运筹学与控制论 DOI:10.11721/cqnuj20230201

具有范数结构多目标优化问题的近似方法及应用*

谭豫琳, 杨春蓉, 赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究了一类特殊的具有范数结构的多目标优化问题,并应用于解决实际问题。【方法】针对这类多目标优化问题的求解,基于标量化思想,在适当假设条件下提出了一种近似方法。【结果】可以通过调整几类参数的取值范围获得多目标优化问题的 Pareto 解。【结论】利用具有范数结构的多目标优化模型和本文提出的近似求解方法于绩效管理中基础工作量的设置和电厂发电机的分配问题。

关键词:多目标优化问题;范数结构;标量化思想;近似方法
中图分类号:O221.6 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2023)02-0028-06

多目标优化理论与方法是运筹学最优化领域的研究热点,它是指在约束集上同时极大化或极小化一个给定的向量值函数最优化问题。它的出现可以追溯到 1772 年 Franklin 提出的多目标矛盾如何协调的问题,国际上一般认为多目标优化问题由经济学家 Pareto 在 1896 年提出的。迄今为止,多目标优化理论已被广泛应用于交通运输、工程设计以及经济管理等诸多领域[1-4]。例如,Samanlioglu 等人[1]建立以总成本最小、最大限度减少运输风险以及最小现场风险的多目标优化模型研究了工业危险废物最优选址路线问题;Moradijoz 等人[3]考虑配电系统可靠性、网损耗能以及投资成本研究了配电网停车场配置问题。

近年来,多目标优化理论与方法得到了深入的研究和发展,取得了大量的基础成果和许多重要结论。特别是在多目标优化问题各类精确解、近似解的定义、基本性质、标量化理论与应用以及最优性条件与对偶理论等方面[5-9]。Ehrgott 等人[5]介绍了多目标优化问题各类解及其性质。Zarepisheh 等人[7]提出了一个新的真有效解定义,验证了一个转换技术可以将多目标优化问题转化为更方便的问题,并得到原始问题和转换后的问题在一些适当条件下具有相同的 pareto 解和真有效解。

对于多目标优化问题的求解,通常采用一些标量化技术将多目标优化问题转化为单目标再进行求解。常见的标量化方法有线性加权和法、ε-约束法、理想点法等[10-14]。特别地,Ehrgott 等人[10]基于松弛变量和剩余变量提出了改进的 ε-约束法,并建立了弱有效解、有效解和真有效解的标量化结果。Rastegar 等人[11]提出了一种新的通用标量化方法,用于解决多种解决方案。Zarepisheh 等人[12]将加权和法的非线性形式看作标量化问题,研究了真有效解与标量化问题最优解之间的关系。

一些实际问题中抽象出来的多目标优化问题往往是非常复杂的,结构也具有一定的特殊性。例如铁路网络的绝对容量[15]、西班牙劳动力市场的工人满意度[4]以及篦冷机冷风分布[16]等问题中所构建的多目标优化模型。对这些具有特殊结构的多目标优化模型进行分析及求解是非常重要的。本文针对一类具有范数结构的多目标优化模型进行研究,提出了它的近似优化模型,并通过恰当的标量化方法分析了模型的求解过程,最后给出了此类具有范数结构的多目标优化模型在实际问题中的应用。

1 预备知识

本文假设 X 是赋范线性空间,$\mathbf{R}^n$ 是 n 维欧氏空间,$\mathbf{N}^+$ 是所有正整数集合。对任意给定向量 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,$

* **收稿日期:**2022-09-28 **修回日期:**2022-10-30 **网络出版时间:**2023-04-20T13:40
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11991024,12171063);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2021jcyj-msxmX0280);重庆英才计划"包干制"项目(No. CQYC20210302270);重庆市教委科学技术研究项目(No. KJQN202100521)
第一作者简介:谭豫琳,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:616053883@qq.com;**通信作者:**赵克全,男,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230420.1023.002.html

$\cdots, x_n), \boldsymbol{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)\in\mathbf{R}^n$，定义序关系：$\boldsymbol{x}<\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i<y_i, \forall i=1,2,\cdots,n$；$\boldsymbol{x}\leqq\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i, \forall i=1,2,\cdots,n$；$\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{y}\Leftrightarrow x_i\leqslant y_i, \forall i=1,2,\cdots,n$，且至少有一个 i 使得 $x_i<y_i$。

考虑如下多目标优化模型：

$$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}\quad \begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})),\\ &\text{s.t. } g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0, i=1,2,\cdots,q。\end{aligned}$$

式中：$f_1(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|$，$f_2(\boldsymbol{x})=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|$，$a^{(k)}\in X, k=1,2,\cdots m, m\in\mathbf{N}^+$，$S=\{\boldsymbol{x}\in X\mid g_i(\boldsymbol{x})\leqslant 0, i=1,2,\cdots,q\}$。如果 S 是凸集，则 $f(\boldsymbol{x})$是凸函数。

下面给出多目标优化问题有效解、弱有效解以及 Geoffrion-真有效解的概念。

定义 1[5]　可行解$\hat{\boldsymbol{x}}\in S$ 称为 Pareto 有效解，如果不存在 $\boldsymbol{x}\in S$ 使得 $f(\boldsymbol{x})\leqslant f(\hat{\boldsymbol{x}})$。

定义 2[5]　可行解$\hat{\boldsymbol{x}}\in S$ 称为 Pareto 弱有效解，如果不存在 $\boldsymbol{x}\in S$ 使得 $f(\boldsymbol{x})<f(\hat{\boldsymbol{x}})$。

定义 3[8]　可行解$\hat{\boldsymbol{x}}\in S$ 称为 Geoffrion-真有效解，如果$\hat{\boldsymbol{x}}\in S$ 是有效解，且存在常数 $M>0$，使得对每个满足 $f_i(\boldsymbol{x})<f_i(\hat{\boldsymbol{x}})$的 i 和 $\boldsymbol{x}\in S$，至少存在一个 j 使得 $f_j(\hat{\boldsymbol{x}})<f_j(\boldsymbol{x})$且$\dfrac{f_i(\hat{\boldsymbol{x}})-f_i(\boldsymbol{x})}{f_j(\boldsymbol{x})-f_j(\hat{\boldsymbol{x}})}\leqslant M$。

本文将$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$的所有弱有效解、有效解以及真有效解所构成的集合分别记为 $\mathrm{WE}(\|\cdot\|, S)$、$\mathrm{E}(\|\cdot\|, S)$和 $\mathrm{PE}(\|\cdot\|, S)$。值得注意的是$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$的一个真有效解一定是它的有效解，$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$的一个有效解一定是它的弱有效解。此外，如果一个向量使得每个目标函数都最小，则称它为理想向量。众所周知，如果一个理想向量是$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$的可行解，则它就是$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$的有效解。

考虑如下单目标模型：

$$(\mathrm{SOP})\ \min_{\boldsymbol{x}\in S} g(\boldsymbol{x}),$$

式中 $g: S\to\mathbf{R}$，则下面给出最优解的定义。

定义 4　$\hat{\boldsymbol{x}}\in S$ 称为(SOP)的最优解，若对所有 $\boldsymbol{x}\in S$ 有 $g(\boldsymbol{x})\geqslant g(\hat{\boldsymbol{x}})$。

2　$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$的近似求解

求解$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$的常用方法是利用标量化方法将该多目标优化问题转换为单目标进行求解。本文基于已有研究，对上述具有范数结构的多目标优化模型，提出了它的一种近似求解方法。

设 $\boldsymbol{x}\in S\subseteq\mathbf{R}^n$，由于任意 n 维赋范线性空间都是等价的，且 n 维赋范线性空间上的任意范数都是等价的。因此，考虑如下多目标优化问题：

$$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|_2}\ \begin{aligned}&\min f(\boldsymbol{x})=(f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})),\\ &\text{s.t. } \boldsymbol{x}\in S\subseteq\boldsymbol{R}^n。\end{aligned}$$

式中：$\|\cdot\|_2$ 是 2-范数(欧几里得范数)，$f_1(\boldsymbol{x})=\sum_{k=1}^{m}\beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$，$f_2(\boldsymbol{x})=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$，$a^{(k)}\in\mathbf{R}^n$，$\beta_k>0$，$k=1,2,\cdots m$，$m\in\mathbf{N}^+$，$\sum_{k=1}^{m}\beta_k=1$，且 S 是 $\mathbf{R}^n$ 上的闭凸集。

由于对$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|_2}$ 直接求解比较困难，因此本文考虑 ε-约束标量化方法将$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|_2}$ 转为如下单目标优化问题：

$$(\mathrm{SOP})_{\|\cdot\|_2}\ \begin{aligned}&\min \sum_{k=1}^{m}\beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2,\\ &\text{s.t. } \beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\leqslant\varepsilon, k=1,2,\cdots,m,\\ &\quad\ \boldsymbol{x}\in S。\end{aligned}$$

设 $\varepsilon\in\mathbf{R}$，根据文献[5]中定理 4.3 可知，如果$\hat{\boldsymbol{x}}$ 是$(\mathrm{SOP})_{\|\cdot\|_2}$ 的最优解，则$\hat{\boldsymbol{x}}$ 是$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|_2}$ 的弱有效解。

又由于$\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$，$k=1,2,\cdots m$，则有 $\beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\leqslant\beta_k\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$，$k=1,2,\cdots m$。因此，有：

$$\sum_{k=1}^{m}\beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\leqslant\sum_{k=1}^{m}(\beta_k\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2)=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\sum_{k=1}^{m}\beta_k=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2,$$

即 $\sum_{k=1}^{m}\beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\leqslant\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$。

众所周知,在 $\beta_k(k=1,2,\cdots,m)$ 的适当假设条件下,$\sum_{k=1}^{m}\beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$ 可以收敛到 $\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$。基于此,本文考虑如下近似标量化问题作为 $(\mathrm{SOP})_{\|\cdot\|_2}$ 的一种近似方法:

$$(\mathrm{SOP})_{\|\cdot\|_2}^{\mathrm{appro}}\ \min\ \max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2,$$
$$\text{s.t.}\ \beta_k\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\leqslant\varepsilon,k=1,2,\cdots,m,$$
$$\boldsymbol{x}\in S。$$

对于近似标量化问题 $(\mathrm{SOP})_{\|\cdot\|_2}^{\mathrm{appro}}$,令 $\varepsilon/\beta_k=\varepsilon_k(k=1,2,\cdots,m)$,且 $\varepsilon'=\max_{1\leqslant k\leqslant m}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2$。

那么 $(\mathrm{SOP})_{\|\cdot\|_2}^{\mathrm{appro}}$ 又可等价于如下最优化问题:

$$(\mathrm{SOP})_{\|\cdot\|_2}^{\mathrm{appro}}\ \min\ \varepsilon',$$
$$\text{s.t.}\ \|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2^2\leqslant\varepsilon_k^2,k=1,2,\cdots,m,$$
$$\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2^2\leqslant\varepsilon'^2,k=1,2,\cdots,m,$$
$$\boldsymbol{x}\in S。$$

因此,可以使用上述模型,通过调整参数 $\beta_k,\varepsilon_k,k=1,2,\cdots,m$ 和 ε' 的范围得到多目标优化问题 $(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|_2}$ 的 Pareto 解。

3 $(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$ 的应用

3.1 绩效分配中基础工作量的应用

在绩效分配管理问题中,一个最优的绩效分配方案与诸多因素有关。其中考核对象的基础工作量对绩效分配方案具有重要影响,基础工作量过高会导致考核对象不能参与到绩效分配中,而过低又会对考核对象造成消极影响,达不到激励效果。因此针对具体某一单位,得到合适的基础工作量很有必要。这里,以某高校为例选取基础分数值作为基础工作量进行研究。考虑到考核对象专长不同,有的侧重于教学,有的侧重科研,还有的侧重服务,因此,在绩效分配方案中,为体现公平合理性,通常会考核对象分为不同类型来处理。本文选取教学型教师作为研究对象。表 1 为 48 位教学型教师的教学考核指标分数值和科研考核指标分数值。

表 1 教学考核指标分数值和科研考核指标分数值

Tab. 1 Teaching assessment and research evaluation index score value

序号	教学	科研	序号	教学	科研	序号	教学	科研
1	2 338	435	17	1 556	352	33	2 536	296
2	1 037	480	18	2 563	388	34	2 443	345
3	2 578	373	19	1 615	328	35	1 819	249
4	2 063	264	20	1 528	399	36	1 545	234
5	1 733	203	21	2 221	263	37	2 099	399
6	2 044	241	22	1 675	330	38	1 736	222
7	2 291	245	23	1 540	431	39	2 178	440
8	2 851	253	24	2 989	256	40	1 626	201
9	1 615	330	25	2 438	441	41	1 702	418
10	2 904	378	26	1 865	300	42	1 698	351
11	1 212	245	27	1 985	250	43	2 018	212
12	2 114	421	28	2 012	332	44	1 943	373
13	2 487	421	29	1 494	247	45	1 972	308
14	1 638	352	30	2 616	239	46	1 551	471
15	1 773	481	31	1 253	411	47	2 258	265
16	2 630	306	32	1 984	350	48	2 328	449

对于如何找到合适恰当的考核指标基础分数值这一问题，本文考虑如下多目标优化模型：

$$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|_2} \min\left(\sum_{k=1}^{48}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2,\max_{1\leqslant k\leqslant 48}\|\boldsymbol{x}-a^{(k)}\|_2\right),$$

$$\text{s.t. } \boldsymbol{x}\in S=[\min a^{(k1)},\max a^{(k1)}]\times[\min a^{(k2)},\max a^{(k2)}]。$$

式中：第一个目标函数表示基础分数值与考核对象实际分数值之间的损失总和最小；第二个目标函数表示基础分数值与实际分数值的最大损失最小。且第 k 个考核对象的考核指标分数值 $a^{(k)}=(a^{(k1)},a^{(k2)})$，$a^{(k1)}$ 为第 k 个考核对象的教学考核指标分数值，$a^{(k2)}$ 为第 k 个考核对象的科研考核指标分数值。考核指标基础分数值为 $x=(x_1,x_2)$，x_1 为教学考核指标基础分数值，x_2 为科研考核指标基础分数值，且 $x_1\in[1\ 037,2\ 989]$，$x_2\in[201,481]$。

基于上述模型，利用本文的方法及 Lingo 11.0 软件，得到了最优考核指标基础分数值 $x=(1\ 979.16,322.11)$，即教学考核指标基础分数值为 1 979.16，科研考核指标基础分数值为 322.11。此外，所有考核对象实际分数值与基础分数值损失总和最小为 18 579.93。通常，绩效分配过程中会将实际工作量是否超过基础工作量作为绩效分配的判断依据，而对基础工作量的取值往往是选取所有考核对象实际工作量的均值。由表 1 数据，得到了 48 位教师的平均教学考核指标分数值为 2 001.96，平均科研考核指标分数值为 332.86。若将考核指标分数值均值作为判断依据，由上表 1 数据可知，分别均有 23 位教师的考核指标分数值大于基础分数值；若以该多目标优化模型所得的基础分数值作为标准，对教学考核指标来说有 25 位教师可参与到绩效分配中去，对科研考核指标来说有 27 位教师，则表明有更多的考核对象能参与到绩效分配中去，从一定程度上可认为绩效分配更合理。同时此类模型也为其它问题中获取合适基础值提供参考决策。

3.2　电力生产发电机分配问题的应用

电力工业是国民经济和社会发展的基础产业，而电力资源的生产和分配一直是人们密切关注的问题。不同发电厂的型号、数量均不同，因此，这些发电机在实际生产分配过程中带来了诸多成本问题。因此，如何合理地分配电力资源也成为重要的研究问题。本文以某地为例，选取该地区时间段的用电需求量及该地某电厂的发电机分配进行研究将一天分为 7 个时间段，各时段用电需求量如表 2；电厂不同发电机型号及性能、数量情况如表 3。

表 2　各时段用电需求量

Tab. 2　Power demand of each period

时段	0～6 时	6～9 时	9～12 时	12～14 时	14～18 时	18～22 时	22～24 时
需求量/(kW·h^{-1})	12 000	32 000	25 000	36 000	25 000	30 000	18 000

表 3　不同型号发电机数量及性能情况

Tab. 3　Quantity and performance of different type generator

型号	可用数量	最小输出功率/kW	最大输出功率/kW
型号 1	10	750	1 750
型号 2	4	1 000	1 500
型号 3	8	1 200	2 000
型号 4	3	1 800	3 500

如果发电机与各时段的用电需求不匹配，会产生一定，降低发电机所的隐形成本。为解决此问题，本文假设发电机在使用过程中不考虑自身消耗且每时段功率稳定不变、以及各时间段发电机工作功率是独立的，在满足各时段用电需求量的情况下，建立了各时段实际发电量与需求用电量尽可能均衡的多目标优化模型如下：

$$(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|_2} \min\left(\sum_{k=1}^{7}\|x_k-a^{(k)}\|_2,\max_{1\leqslant k\leqslant 7}\|x_k-a^{(k)}\|_2\right),$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_k = \sum_{j=1}^{4} n_{kj} p_{kj}, k = 1,2,\cdots,7, \\ a^{(k)} \leqslant \sum_{j=1}^{4} n_{kj} p_{kj}, j = 1,2,3,4, \\ \min n_{kj} \leqslant n_{kj} \leqslant \max n_{kj}, \\ \min p_j \leqslant p_{kj} \leqslant 0.8 \times \max p_j 。\end{cases}$$

式中:不同的时间段为 $k(k=1,2,\cdots,7)$,4 种类型的发电机为 $j(j=1,2,3,4)$,第 k 时间段型号 j 发电机工作时实际功率为 p_{kj},在第 k 时间段使用型号 j 发电机的数量为 n_{kj},型号 j 发电机的最小功率为 $\min p_j$,型号 j 发电机的最大功率为 $\max p_j$,第 k 时间段所需用电量为 $a^{(k)}$,则第 k 时间段的实际供电量表示为 $x_k = \sum_{k=1}^{4} n_{kj} p_{kj}$,且在实际电力生产过程中发电机输出功率不能超出最大功率的 80%。

基于上述多目标模型,利用本文的方法以及 Lingo11.0 软件求解,得到了该电厂各时段发电机的分配数量情况,如表 4。

表 4 各时段对不同类型发电机的需求数量

Tab. 4 The different types of generator demand quantity of each period

型号	0~6	6~9	9~12	12~14	14~18	18~22	22~24
型号 1	10	10	8	10	10	10	8
型号 2	0	2	3	3	3	3	0
型号 3	0	6	5	7	5	8	7
型号 4	2	3	3	3	3	0	2

4 结语

本文研究了一类具有范数结构的多目标优化问题,讨论了它的近似求解方法并应用于绩效管理中基础工作量的设置问题以及电厂发电机的分配问题。如何进一步研究具有特殊范数结构的 $(\mathrm{MOP})_{\|\cdot\|}$ 的解的性质及求解算法与应用是非常有意义的研究课题。

参考文献:

[1] SAMANLIOGLU F. A multi-objective mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem[J]. European Journal of Operational Research,2013,226(2):332-340.

[2] HÄMÄLÄINEN J P, MIETTINEN K, TARVAINEN P, et al. Interactive solution approach to a multiobjective optimization problem in a paper machine headbox design[J]. Journal of Optimization Theory & Applications,2003,116(2):265-281.

[3] MORADIJOZ M,PARSA MOGHADDAM M,HAGHIFAM M R,ALISHAHI E. A multi-objective optimization problem for allocating parking lots in a distribution network[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems,2013,46:115-122.

[4] MARCENARO-GUTIERREZ O D, LUQUE M, RUIZ F. An application of multiobjective programming to the study of workers' satisfaction in the Spanish labour market[J]. European Journal of Operational Research,2010,203(2):430-443.

[5] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin:Springer,2005.

[6] FANG Y P, MENG K W, YANG X Q. Piecewise linear multicriteria programs: the continuous case and its discontinuous generalization[J]. Operations Research:The Journal of the Operations Research Society of America,2012,60(2):398-409.

[7] ZAREPISHEH M,PARDALOS P M. An equivalent transformation of multi-objective optimization problems[J]. Annals of Operations Research,2017,249(1):5-15.

[8] GEOFFRION A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,1968,22(3):618-630.

[9] CHEN G Y. Necessary conditions of nondominated solutions in multicriteria decision making[J]. Journal of Mathematical

Analysis and Applications, 1984, 104(1): 38-46.

[10] EHRGOTT M, RUZIKA S. Improved ε-constraint method for multiobjective programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2008, 138(3): 375-396.

[11] RASTEGAR N, KHORRAM E. A combined scalarizing method for multiobjective programming problems[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(1): 229-237.

[12] ZAREPISHEH M, KHORRAM E, PARDALOS P M. Generating properly efficient points in multi-objective programs by the nonlinear weighted sum scalarization method[J]. Optimization, 2014, 63(3): 473-486.

[13] LI Z F, WANG S Y. ε-approximate solutions in multiobjective optimization[J]. Optimization, 1998, 44(2): 161-174.

[14] 赵克全，杨新民，夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化[J]. 中国科学：数学，2021，51(2)：411-424.
ZHAO K Q, YANG X M, XIA Y M. Complete scalarization of multiobjective optimization problems[J]. Science China Mathematics, 2021, 51(2): 411-424.

[15] ROBERT L B. Multi-objective models and techniques for analysing the absolute capacity of railway networks[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 245(2): 489-505.

[16] WEI S, ZHENG C, LIN C. Multi-objective optimization of cooling air distribution of grate cooler with different inlet temperatures by using genetic algorithm[J]. Science China, 2017(3): 17-26.

Operations Research and Cybernetics

An Approximate Method for Multi-Objective Optimization Problems with Norm Structure and Its Application

TAN Yulin, YANG Chunrong, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]A special kind of multi-objective optimization problem with norm structure is studied, which can be applied to the processing of many practical problems. [**Methods**]Based on the idea of scalarization, an approximate method is proposed to solve this kind of multi-objective optimization problem under some suitable assumptions. [**Findings**]It can obtain Pareto solutions of multi-objective optimization problems by adjusting the ranges of several parameters. [**Conclusions**]The multi-objective optimization model with norm structure and the approximate solution method are used in the setting of basic workload and the assignment of power plant generators in performance management.

Keywords: multi-objective optimization problems; norm structures; scalarization idea; approximate method

(责任编辑　陈　乔)