DOI:10.11721/cqnuj20230210

张量 Löwner 偏序与其 Moore-Penrose 逆的关系*

刘喜富, 罗 宇
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:【目的】研究爱因斯坦积下 Löwner 偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$和$\mathcal{A}>\mathcal{B}$与它们的 Moore-Penrose 逆的关系。【方法】通过张量特征值、值域及 Moore-Penrose 逆来研究张量 Löwner 偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$和$\mathcal{A}>\mathcal{B}$。【结果】得到了一些关于偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$和$\mathcal{A}>\mathcal{B}$的基本性质和充要条件。【结论】Löwner 偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$和$\mathcal{A}>\mathcal{B}$成立的充要条件表明,矩阵 Löwner 偏序的性质能够推广到张量上。

关键词:爱因斯坦积;张量;Löwner 偏序;Moore-Penrose 逆
中图分类号:O151 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2023)02-0084-05

张量是向量和矩阵的高维推广,并且广泛应用于医学[1]、机器学习[2]、信号处理[3]等领域。因为爱因斯坦积下张量群同构于一般的线性群[4],所以一个自然的研究方向是将矩阵相关的概念和结论推广到张量上。文献[5-6]分别将矩阵广义逆和矩阵减序推广到了张量空间。矩阵 Löwner 偏序在线性统计参数估计中有重要的应用[7],因此推广这一类偏序是有意义的。本文主要将矩阵 Löwner 偏序推广到张量空间,并在张量空间上阐述偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$和$\mathcal{A}>\mathcal{B}$与张量 Moore-Penrose 逆的偏序的关系。文中$\mathcal{O}$表示零张量。

张量是矩阵和向量的多维推广,向量可以看成是一阶张量,矩阵可以看成是二阶张量。给定一个正整数 N,记$[N]=\{1,2,\cdots,N\}$。一个复数域上的 $M+N$ 阶张量$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$ 是含有 $I_1\cdot I_2\cdot\cdots\cdot I_M\cdot J_1\cdot J_2\cdot\cdots\cdot J_N$ 个元素的多维数组,其中 $i_k\in[I_k],k\in[M],j_l\in[J_l],l\in[N]$。

设张量$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N}),\mathcal{B}=(\mathcal{B}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$ 和标量 $a\in\mathbf{C}$,定义张量的加法和数乘分别为$\mathcal{A}+\mathcal{B}=(\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N}+\mathcal{B}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N})$以及 $a\mathcal{A}=(a\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N})$。

设张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$, $\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_N\times K_1\times K_2\times\cdots\times K_L}$, $\mathcal{A}$ 和$\mathcal{B}$ 的爱因斯坦积$\mathcal{A}*_N\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times K_1\times K_2\times\cdots\times K_L}$,且$\mathcal{A}*_N\mathcal{B}$ 的定义如下[8]:

$$(\mathcal{A}*_N\mathcal{B})_{i_1\times i_2\times\cdots\times i_M\times k_1\times k_2\times\cdots\times k_L}=\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_N}\mathcal{A}_{i_1\cdots i_Mj_1\cdots j_N}\mathcal{B}_{j_1\cdots j_Nk_1\cdots k_L}。\tag{1}$$

显然,张量的爱因斯坦积是矩阵乘法的推广,满足结合律和分配律,但不满足交换律。

下面介绍张量的一些基本知识,以下定义均来自文献[4,9]。

给定张量$\mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Nj_1j_2\cdots j_N})\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,如果除了对角元$\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Ni_1i_2\cdots i_N}$以外的元素全为 0,则称张量$\mathcal{A}$ 为对角张量;若对角张量$\mathcal{A}$ 的对角元$\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Ni_1i_2\cdots i_N}$全为 1,则称为单位张量,记做$\mathcal{I}$。例如$\mathcal{I}=(e_{i_1i_2j_1j_2})\in\mathbf{C}^{3\times 2\times 3\times 2}$,其中 $e_{1111}=e_{1212}=e_{2121}=e_{2222}=e_{3131}=e_{3232}=1$,其余元素全为 0。如果存在张量$\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,使得$\mathcal{A}*_N\mathcal{B}=\mathcal{B}*_N\mathcal{A}=\mathcal{I}$,则称$\mathcal{A}$ 可逆,记$\mathcal{B}=\mathcal{A}^{-1}$。设张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$,$\mathcal{A}$ 的共轭转置$\mathcal{A}^{\mathrm{H}}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_M}$,定义为$(\mathcal{A}^{\mathrm{H}})_{j_1j_2\cdots j_Ni_1i_2\cdots i_M}=\overline{\mathcal{A}}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N}$;设张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,若$\mathcal{A}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}$,则称$\mathcal{A}$ 为 Hermitian 张量,用符号 $\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$ 表示。

Sun 等人[5]首次定义了偶数阶张量(即空间 $\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$ 上的张量)的 Moore-Penrose 逆。在此基础之上,Liang 等人[10]定义了任意阶张量的 Moore-Penrose 逆。设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$,若张量$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_M}$ 满足下列张量方程:1) $\mathcal{A}*_N\mathcal{X}*_M\mathcal{A}=\mathcal{A}$;2) $\mathcal{X}*_M\mathcal{A}*_N\mathcal{X}=\mathcal{X}$;3) $(\mathcal{A}*_N\mathcal{X})^{\mathrm{H}}=$

* **收稿日期:**2021-12-08 **修回日期:**2022-11-11 **网络出版时间:**2023-04-21T08:38
资助项目:重庆市自然科学基金项目(No. cstc2021jcyj-msxmX0195);重庆市教育委员会科学技术研究计划项目(No. KJQN202100505)
第一作者简介:刘喜富,男,副教授,博士,研究方向为矩阵与数值代数,E-mail:lxf211@cqnu.edu.cn;**通信作者:**罗宇,男,E-mail:674450983@qq.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20230420.1130.006.html

$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}$；4) $(\mathcal{X} *_M \mathcal{A})^{\mathrm{H}}=\mathcal{X} *_M \mathcal{A}$。则称$\mathcal{X}$为张量$\mathcal{A}$的 Moore-Penrose 逆，记做$\mathcal{A}^+$。设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$，结合文献[5]可知，$\mathcal{A}^+$存在且唯一，并且结论：1) $(\mathcal{A}^+)^+=\mathcal{A}$；2) $(\mathcal{A}^+)^{\mathrm{H}}=(\mathcal{A}^{\mathrm{H}})^+$是显然的。

Ji 等人[11]对空间 $\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$ 上的内积做了定义，即 $\langle\mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle=\sum\limits_{i_1i_2\cdots i_N}\overline{\mathcal{X}}_{i_1i_2\cdots i_N}\mathcal{Y}_{i_1i_2\cdots i_N}$，其中$\mathcal{X},\mathcal{Y}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$；根据此内积的定义显然有$\langle\mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle=\overline{\langle\mathcal{Y},\mathcal{X}\rangle}$。设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$，他们证明了对于任意的$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$，$\mathcal{Y}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M}$，有$\langle\mathcal{A} *_N \mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle=\langle\mathcal{X},\mathcal{A}^{\mathrm{H}} *_M \mathcal{Y}\rangle$。可见，两个相同张量的内积是一个实数，并且如果$\mathcal{A}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，易得$\langle\mathcal{X},\mathcal{A} *_N \mathcal{X}\rangle$也是一个实数。

假设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$，$\mathcal{L}$是$\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M}$的一个子空间，Ji 等人[11]定义$\mathcal{A}$的值域$\mathcal{R}(\mathcal{A})$和$\mathcal{L}$的正交补$\mathcal{L}^{\perp}$分别为$\mathcal{R}(\mathcal{A})=\{\mathcal{A} *_N \mathcal{X}:\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}\}$以及$\mathcal{L}^{\perp}=\{\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M}:\langle\mathcal{X},\mathcal{Y}\rangle=0,\forall\mathcal{Y}\in\mathcal{L}\}$。根据文献[12]中的引理 4 及定理 2，有：1) $\mathcal{R}(\mathcal{A} *_N \mathcal{A}^+)=\mathcal{R}(\mathcal{A})$；2) $\mathcal{R}(\mathcal{A}^+)=\mathcal{R}(\mathcal{A}^{\mathrm{H}})$。

1　预备知识

本节首先定义了 Hermitian 正定张量，进而给出了张量 Löwner 偏序的定义；接着介绍了一种张量的展开方式，证明了一些半正定张量的性质，给出了张量方程只有零解的等价条件以及几个与张量特征值有关的结论。为了方便书写，设$n=I_1\cdot I_2\cdot\cdots\cdot I_N$，$m=J_1\cdot J_2\cdot\cdots\cdot J_M$，$l=K_1\cdot K_2\cdot\cdots\cdot K_L$。

定义 1　设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$。若对任意张量$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，有$\langle\mathcal{X},\mathcal{A} *_N \mathcal{X}\rangle\geqslant 0$，则称$\mathcal{A}$为 Hermitian 半正定张量，记做$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}$；若对任意的非零张量$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，有$\langle\mathcal{X},\mathcal{A} *_N \mathcal{X}\rangle>0$，则称$\mathcal{A}$为 Hermitian 正定张量，记做$\mathcal{A}>\mathcal{O}$。张量空间 $\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$ 上的半正定张量和正定张量分别用 $\mathbf{C}_{\geqslant\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$ 和 $\mathbf{C}_{>\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$ 表示。

定义 2　设$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，若$\mathcal{A}-\mathcal{B}\geqslant\mathcal{O}$，记做$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$。容易验证这种关系是一种偏序，称为张量的 Löwner 偏序。特别地，当$\mathcal{A}-\mathcal{B}>\mathcal{O}$时，记做$\mathcal{A}>\mathcal{B}$。

众所周知可以将张量的元素按照一定的方式重新排列组成一个二维数组，即矩阵。例如 Matlab 中的 reshape 函数[13]。下面将介绍文献[10]中提到的一种任意张量的展开方式。

定义一个从张量空间$\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$到矩阵空间$\mathbf{C}^{(I_1\cdot I_2\cdot\cdots\cdot I_M)\times(J_1\cdot J_2\cdot\cdots\cdot J_N)}$的映射$\varphi$：

$$\varphi:\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}\to\mathbf{C}^{(I_1\cdot I_2\cdot\cdots\cdot I_M)\times(J_1\cdot J_2\cdot\cdots\cdot J_N)},\ \mathcal{A}=(\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N})\to\mathbf{A}=(\mathbf{A}_{\mathrm{ivec}(i,I),\mathrm{ivec}(j,J)}),$$

其中：$\mathbf{A}\in\mathbf{C}^{(I_1\cdot I_2\cdot\cdots\cdot I_M)\times(J_1\cdot J_2\cdot\cdots\cdot J_N)}$，$\mathrm{ivec}(i,I)$和$\mathrm{ivec}(j,J)$是两个指标函数，分别对应$\mathcal{A}_{i_1i_2\cdots i_Mj_1j_2\cdots j_N}$的行指标$i:=\{i_1,i_2,\cdots,i_M\}$和列指标$j:=\{j_1,j_2,\cdots,j_N\}$，即：

$$\mathrm{ivec}(i,I)=i_1+\sum_{r=2}^{M}(i_r-1)\prod_{u=1}^{r-1}I_u,\ \mathrm{ivec}(j,J)=j_1+\sum_{s=2}^{N}(j_s-1)\prod_{v=1}^{s-1}J_v。$$

注 1　称上述矩阵$\mathbf{A}$为张量$\mathcal{A}$的展开矩阵，且很容易验证单位张量$\mathcal{I}$的展开矩阵是单位矩阵$\boldsymbol{I}$。根据文献[10]可知，φ是双射。对式(1)中$\mathcal{A}$和$\mathcal{B}$的爱因斯坦积$\mathcal{A} *_N \mathcal{B}$作用$\varphi$，有$\varphi(\mathcal{A} *_N \mathcal{B})=\varphi(\mathcal{A})\varphi(\mathcal{B})=\mathbf{AB}$，其中$\boldsymbol{B}\in\mathbf{C}^{n\times l}$，并且这个过程是可逆的。

注 2　利用注 1 很容易验证以下结论：1) 若张量$\mathcal{A}$可逆，则矩阵$\mathbf{A}$也是可逆的；2) 若$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}$ ($\mathcal{A}>\mathcal{O}$)，则$\mathbf{A}\geqslant 0$ ($\mathbf{A}>0$)。由此可知若$\mathcal{A}>\mathcal{O}$，则$\mathcal{A}$必然是可逆的。本文所有的φ均指上述映射。

设张量$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_M\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_N}$，则张量$\mathcal{A}$的秩$r(\mathcal{A})\triangleq r(\mathbf{A})$，其中$\mathbf{A}=\varphi(\mathcal{A})\in\mathbf{C}^{m\times n}$；如果$r(\mathcal{A})=m$，则称张量$\mathcal{A}$为行满秩；如果$r(\mathcal{A})=n$，则称$\mathcal{A}$为列满秩[10]。

引理 1　设$\mathcal{P}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_K}$，$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_K}$，$\mathcal{P}$是列满秩的等价于张量方程$\mathcal{P} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$只有零解。

证明　设$\varphi(\mathcal{P})=\boldsymbol{P}\in\mathbf{C}^{n\times k}$，$\varphi(\mathcal{X})=\boldsymbol{x}\in\mathbf{C}^{k}$，$\varphi(\mathcal{P} *_N \mathcal{X})=\varphi(\boldsymbol{P})\varphi(\mathcal{X})=\boldsymbol{Px}=\mathbf{0}$，故$\mathcal{P} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$只有零解$\Leftrightarrow\boldsymbol{Px}=\mathbf{0}$只有零解$\Leftrightarrow\boldsymbol{P}$是列满秩的$\Leftrightarrow\mathcal{P}$是列满秩的。　　证毕

接下来介绍特征值和特征张量的概念。

定义 3[4]　设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，如果存在$\lambda\in\mathbf{C}$和非零张量$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，使得$\mathcal{A} *_N \mathcal{X}=$

$\lambda\mathcal{X}$,则称 λ 为$\mathcal{A}$ 的特征值,$\mathcal{X}$是对应于特征值λ 的特征张量。

根据定义3,以下结论是显然的。

引理 2 设$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,则:1) 若$\mathcal{A}$为 Hermitian 张量,则它的特征值为实数;2) $\mathcal{A}*_N\mathcal{B}$与$\mathcal{B}*_N\mathcal{A}$有相同的非零特征值;3) 若$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}$至少有一个可逆,则$\mathcal{A}*_N\mathcal{B}$与$\mathcal{B}*_N\mathcal{A}$有相同的特征值;4) $\mathcal{A}$与展开矩阵$\mathbf{A}$有相同的特征值。

由结论4)可知,单位张量$\mathcal{I}$的特征值全为1;并且,若$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}$,则$\mathcal{A}$的所有特征值非负。

2 主要结果

本节主要研究偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$和$\mathcal{A}>\mathcal{B}$的基本性质以及这些偏序成立的充要条件。本节中张量$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,$\lambda_i(\mathcal{A})$表示张量$\mathcal{A}$的特征值,且$\lambda_1(\mathcal{A})\geqslant\cdots\geqslant\lambda_n(\mathcal{A})$。

引理 3 设张量$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,则:1) 若$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$,则$\lambda_i(\mathcal{A})\geqslant\lambda_i(\mathcal{B})$,$i\in[n]$;2) 若$\mathcal{A}>\mathcal{B}$,则$\lambda_i(\mathcal{A})>\lambda_i(\mathcal{B})$,$i\in[n]$。

证明 1) 设$\varphi(\mathcal{A})=\mathbf{A}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{n\times n}$,$\varphi(\mathcal{B})=\mathbf{B}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{n\times n}$,$\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{n\times n}$表示$n$阶 Hermitian 矩阵,因为$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$,在两边同时作用映射$\varphi$,则$\varphi(\mathcal{A})\geqslant\varphi(\mathcal{B})$,于是$\mathbf{A}\geqslant\mathbf{B}$。根据文献[7],有$\lambda_i(\mathbf{A})\geqslant\lambda_i(\mathbf{B})$,再结合引理2,则$\lambda_i(\mathcal{A})\geqslant\lambda_i(\mathcal{B})$。

2)的证明与1)类似。 证毕

定理 1 设$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,$\mathcal{P}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times J_1\times J_2\times\cdots\times J_K}$,$k=J_1\cdot J_2\cdot\cdots\cdot J_K$,则:

1) $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{P}\geqslant\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{P}$;

2) 若$r(\mathcal{P})=k$,$\mathcal{A}>\mathcal{B}$,则$\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{P}>\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{P}$。

证明 1) 对任意的$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_K}$,则$\mathcal{P}*_K\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,由$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$知$\mathcal{A}-\mathcal{B}\geqslant\mathcal{O}$,因为:

$$\langle\mathcal{X},(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{P})*_K\mathcal{X}\rangle=\langle\mathcal{X},\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{P}*_K\mathcal{X}\rangle=$$
$$\langle\mathcal{P}*_K\mathcal{X},(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{P}*_K\mathcal{X}\rangle\geqslant 0,$$

所以$\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{P}\geqslant\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{P}$。

2) 对任意的$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{J_1\times J_2\times\cdots\times J_K}(\mathcal{X}\neq\mathcal{O})$,$\mathcal{P}*_K\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,且$\mathcal{P}*_K\mathcal{X}\neq\mathcal{O}$,因为:

$$\langle\mathcal{X},(\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{P})*_K\mathcal{X}\rangle=\langle\mathcal{X},\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{P}*_K\mathcal{X}\rangle=\langle\mathcal{P}*_K\mathcal{X},(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{P}*_K\mathcal{X}\rangle>0,$$

所以$\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{P}>\mathcal{P}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{P}$。 证毕

注 3 如果$\mathcal{P}$可逆,则上述结论的必要性也成立。

定理 2 设$\mathcal{A}\in\mathbf{C}_{>\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\geqslant\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,则:1) $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1})\leqslant 1$;2) $\mathcal{A}>\mathcal{B}\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1})<1$。

证明 1) 由定理1有:

$$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{A}^{-1/2}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}^{-1/2}\geqslant\mathcal{O}\Leftrightarrow\mathcal{I}_n-\mathcal{A}^{-1/2}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1/2}\geqslant\mathcal{O}\Leftrightarrow$$
$$\lambda_i(\mathcal{I}_n-\mathcal{A}^{-1/2}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1/2}\geqslant\mathcal{O})\geqslant 0\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{A}^{-1/2}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1/2})\leqslant 1\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1})\leqslant 1。$$

式中:$i\in[n]$,$\mathcal{A}^{1/2}$是$\mathcal{A}$的平方根,$\mathcal{A}^{-1/2}$是$\mathcal{A}^{1/2}$的逆[12]。

2)的证明与1)类似。 证毕

由定理2有以下定理。

定理 3 设$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{>\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,则:1) $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{B}^{-1}\geqslant\mathcal{A}^{-1}$;2) $\mathcal{A}>\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{B}^{-1}>\mathcal{A}^{-1}$。

证明 1) 由定理2,有:

$$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1})\leqslant 1\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^{-1})^{\mathrm{H}}\leqslant 1\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{A}^{-1}*_N\mathcal{B})\leqslant 1\Leftrightarrow\mathcal{B}^{-1}\geqslant\mathcal{A}^{-1}。$$

2)的证明与1)类似。 证毕

下面介绍的定理将对偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$或$\mathcal{A}>\mathcal{B}$作进一步表征,为此需要介绍以下引理。

引理 4 设$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\mathrm{H}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,若$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\geqslant\mathcal{O}$,则$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A})$。

证明 对任意的$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,有$\langle\mathcal{X},\mathcal{A}*_N\mathcal{X}\rangle\geqslant\langle\mathcal{X},\mathcal{B}*_N\mathcal{X}\rangle$。若$\mathcal{X}\in\mathcal{R}^{\perp}(\mathcal{A})$,于是$\langle\mathcal{X},\mathcal{A}*_N\mathcal{X}\rangle=0$,故$\langle\mathcal{X},\mathcal{B}*_N\mathcal{X}\rangle=0$,即$\mathcal{X}\in\mathcal{R}^{\perp}(\mathcal{B})$,$\mathcal{R}^{\perp}(\mathcal{A})\subseteq\mathcal{R}^{\perp}(\mathcal{B})$,所以$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A})$。

引理 5 设张量$\mathcal{A}$,$\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\geqslant\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$,则$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$当且仅当

$$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A}),\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}。$$

证明　必要性是显然的，由引理 4 知$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$有$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A})$，再由定理 1 知$\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}$；充分性等价于当$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A})$时，证明$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}$。因为$(\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+)^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+$，且根据文献[5]中定理 4.2，有$\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+*_N\mathcal{B}=\mathcal{B}$，则：$\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+=\mathcal{A}-\mathcal{B}$。

当$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A})$时，结合$\mathcal{R}(\mathcal{A}^+*_N\mathcal{A})=\mathcal{R}(\mathcal{A})$，对任意的$\mathcal{X}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，有：

$$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\langle\mathcal{X},\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+*_N\mathcal{X}\rangle\geqslant0\Leftrightarrow$$
$$\langle\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+*_N\mathcal{X},(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{A}^+*_N\mathcal{X}\rangle\geqslant0\Leftrightarrow$$
$$\langle\mathcal{A}*_N\mathcal{X},(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{X}\rangle\geqslant0\Leftrightarrow\langle\mathcal{X},\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}*_N\mathcal{X}\rangle\geqslant0。$$

即$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}$。　　证毕

定理 4　设张量$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\geqslant\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，则$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A}),\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^+)\leqslant1$。

证明　结合引理 4 和引理 5，命题等价于在$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A})$的条件下，证明：

$$\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^+)\leqslant1。$$

根据文献[10]中定理 3.6，可设$\mathcal{A}$的满秩分解$\mathcal{A}=\mathcal{L}*_R\mathcal{L}^{\mathrm{H}}$，其中$\mathcal{L}\in\mathbf{C}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times K_1\times K_2\times\cdots\times K_R}$，$r(\mathcal{A})=r=K_1\cdot K_2\cdot\cdots\cdot K_R$，并且$\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_R\mathcal{L}$是可逆的，于是有：

$$\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}\Leftrightarrow\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{L}*_R\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{L}*_R\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{L}\geqslant\mathcal{O}\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{L}\geqslant\mathcal{O}。$$

用$(\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_R\mathcal{L})^{-1}$分别去右乘和左乘上式，得到：

$$\mathcal{A}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{A}\geqslant\mathcal{O}\Leftrightarrow(\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_R\mathcal{L})^{-1}*_R\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N(\mathcal{A}-\mathcal{B})*_N\mathcal{L}*_R(\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_R\mathcal{L})^{-1}\geqslant\mathcal{O}\Leftrightarrow$$
$$\mathcal{I}-\mathcal{T}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{T}\geqslant\mathcal{O}\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{T}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{B}*_N\mathcal{T})\leqslant1\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{T}*_R\mathcal{T}^{\mathrm{H}})\leqslant1\Leftrightarrow\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^+)\leqslant1。$$

式中：$\mathcal{T}=\mathcal{L}*_R(\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{L})^{-1}$，最后一步是根据文献[10]中定理 3.7，即：

$$\mathcal{T}*_N\mathcal{T}^{\mathrm{H}}=\mathcal{L}*_R(\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{L})^{-1}*_R(\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{L})^{-1}*_R\mathcal{L}^{\mathrm{H}}=\mathcal{L}*_R(\mathcal{L}^{\mathrm{H}}*_N\mathcal{L})^{-2}*_R\mathcal{L}^{\mathrm{H}}=\mathcal{A}^+。$$
证毕

下一个定理说明，对于张量的 Moore-Penrose 逆来讲，当$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$时，有$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+$。

定理 5　设$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\geqslant\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，且$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$，则$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+$。

证明　因为$\mathcal{R}(\mathcal{A})=\mathcal{R}(\mathcal{A}^+)$，$\mathcal{R}(\mathcal{B})=\mathcal{R}(\mathcal{B}^+)$，再由定理 4，有：

$$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A}),\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^+)\leqslant1\Leftrightarrow\mathcal{R}(\mathcal{B}^+)\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A}^+),\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^+)\leqslant1。$$

再结合$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$，有$\dim(\mathcal{R}(\mathcal{A}))=\dim\mathcal{R}(\mathcal{A}^+)=\dim(\mathcal{R}(\mathcal{B}))=\dim\mathcal{R}(\mathcal{B}^+)$，所以有：

$$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{R}(\mathcal{B}^+)=\mathcal{R}(\mathcal{A}^+),\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^+)\leqslant1。$$

又因为$\lambda_1(\mathcal{B}*_N\mathcal{A}^+)=\lambda_1(\mathcal{A}^+*_N\mathcal{B})=\lambda_1(\mathcal{A}^+*_N(\mathcal{B}^+)^+)$，结合定理 4，知$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Leftrightarrow\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+$。　　证毕

需要注意的是，定理 5 中条件$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$是不可缺少的。假设对角张量$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}^{3\times3\times3\times3}$，且它们的元除了$\mathcal{A}_{1111}=\mathcal{A}_{1212}=\mathcal{A}_{1313}=\mathcal{A}_{2121}=2$，$\mathcal{B}_{1111}=\mathcal{B}_{1212}=\mathcal{B}_{1313}=1$以外全为 0。则$\mathcal{A}^+,\mathcal{B}^+$的元素除了：

$$(\mathcal{A}^+)_{1111}=(\mathcal{A}^+)_{1212}=(\mathcal{A}^+)_{1313}=(\mathcal{A}^+)_{2121}=1/2,(\mathcal{B}^+)_{1111}=(\mathcal{B}^+)_{1212}=(\mathcal{B}^+)_{1313}=1$$

以外全为 0。虽然$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$，但由于$r(\mathcal{A})\neq r(\mathcal{B})$，没法推导出$\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+$。下面的定理说明了在$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$的条件下，$\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+$与$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$等价。

定理 6　设$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\geqslant\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，且$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$，则$\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+\Leftrightarrow r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$。

证明　由定理 5 知充分性是显然的，下面证明必要性。由引理 4，知：

$$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}\Rightarrow\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A}),\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+\Rightarrow\mathcal{R}(\mathcal{A}^+)\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{B}^+)。$$

于是有$\mathcal{R}(\mathcal{B})\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{A})=\mathcal{R}(\mathcal{A}^+)\subseteq\mathcal{R}(\mathcal{B}^+)=\mathcal{R}(\mathcal{B})$。所以$\mathcal{R}(\mathcal{A})=\mathcal{R}(\mathcal{B})$，$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$。　　证毕

根据上述引理，有以下推论。

推论 1　设$\mathcal{A},\mathcal{B}\in\mathbf{C}_{\geqslant\mathcal{O}}^{I_1\times I_2\times\cdots\times I_N\times I_1\times I_2\times\cdots\times I_N}$，则下面的任意两条可以推出另外一条：1) $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$；2) $\mathcal{B}^+\geqslant\mathcal{A}^+$；3) $r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$。

3　结束语

作为矩阵 Löwner 偏序的推广，本文定义了张量 Löwner 偏序。基于张量与矩阵之间的同构关系，证明了

Hermitian 正定张量是可逆的，并给出了张量方程$\mathcal{P} *_N \mathcal{X}=\mathcal{O}$只有零解的充要条件；基于爱因斯坦积，给出了一些与张量特征值有关的结论。在此基础上，给出了一些偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$和$\mathcal{A}>\mathcal{B}$的性质。当张量$\mathcal{A},\mathcal{B}>\mathcal{O}$时，得到了偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$的充要条件$\mathcal{B}^{-1}\geqslant\mathcal{A}^{-1}$；进一步推广得到当$r(\mathcal{A})=r(\mathcal{B})$时，偏序$\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$与偏序$\mathcal{B}^{+}\geqslant\mathcal{A}^{+}$等价。

参考文献：

[1] GUO L, LI Y, GAO Y H, et al. Hole-filling by rank sparsity tensor decomposition for medical imaging[C]//2010 International Conference on E-product E-service and E-entertainment, November 7-9, 2010, Henan, China. Piscataway: IEEE, 2011.

[2] MWANGI B, HASAN K M, SOARES J C. Prediction of individual subject's age across the human lifespan using diffusion tensor imaging: a machine learning approach[J]. Neuroimage, 2013, 75: 58-67.

[3] CARDOSO J F. High-order contrasts for independent component analysis[J]. Neural Computation, 1999, 11(1): 157-192.

[4] LIANG M L, ZHENG B, ZHAO R J. Tensor inversion and its application to the tensor equations with Einstein product[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2019, 67(4): 843-870.

[5] SUN L Z, ZHENG B D, BU C J, et al. Moore-Penrose inverse of tensors via Einstein product[J]. Linear and Multilinear Algebra: An International Journal Publishing Articles, Reviews and Problems, 2016, 64(4/5/6): 686-698.

[6] 王宏兴，张晓燕. 偶数阶张量 core 逆的性质和应用[J]. 数学物理学报，2021，41A(1)：1-14.
WANG H X, ZHANG X Y. Properties and applications of the core inverse of an even-order tensor[J]. Acta Mathematica Scientia, 2021, 41A(1): 1-14.

[7] 王松桂，吴密霞，贾忠贞. 矩阵不等式[M]. 北京：科学出版社，2006.
WANG S G, WU M X, JIA Z Z. Matrix Inequality[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[8] EINSTEIN A. The foundation of the general theory of relativity[C]//KOX A J, KLEIN M J, SCHULMANN R, et al. The Collected Papers of Albert Einstein. Princeton: Princeton Univ Press, 2007: 146-200.

[9] PANIGRAHY K, MISHRA D. An extension of the Moore-Penrose inverse of a tensor via the Einstein product[EB/OL]. (2018-06-12)[2021-12-07]. https://arxiv.org/pdf/1806.03655.pdf.

[10] LIANG M L, ZHENG B. Further results on Moore-Penrose inverses of tensors with application to tensor nearness problems [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2019, 77(5): 1282-1293.

[11] JI J, WEI Y M. The Drazin inverse of an even-order tensor and its application to singular tensor equations[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2018, 75(9): 3402-3413.

[12] JI J, WEI Y M. Weighted Moore-Penrose inverses and fundamental theorem of even-order tensors with Einstein product[J]. Frontiers of Mathematics in China, 2017, 12(6): 1319-1337.

[13] LUO G J, ZUO K Z, ZHOU L. Revisitation of the core inverse[J]. Wuhan University Journal of Natural Sciences, 2015, 20(5): 381-385.

Relationships between Löwner Partial Orders of Tensors and Their Moore-Penrose Inverses

LIU Xifu, LUO Yu

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]The goal is to study the relationships between Löwner partial orders $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$ and $\mathcal{A}>\mathcal{B}$ and their Moore Penrose inverses. [**Methods**]By using the eigenvalues, range, Moore-Penrose inverse of tensor, the Löwner partial orders $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$ and $\mathcal{A}>\mathcal{B}$ are studied. [**Findings**]Some basic properties and equivalent conditions of partial orders $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$ and $\mathcal{A}>\mathcal{B}$ are obtained. [**Conclusions**]The sufficient and necessary conditions of Löwner partial order $\mathcal{A}\geqslant\mathcal{B}$ and $\mathcal{A}>\mathcal{B}$ show that the properties of matrix Löwner partial ordering can be generalized to tensors.

Keywords: Einstein product; tensor; Löwner partial ordering; Moore-Penrose inverse

（责任编辑 黄 颖）