DOI:10.11721/cqnuj20220609

AANA 误差下非参数回归函数积分权核估计的相合性*

张水利，屈　聪，张晓飞
(平顶山学院 数学与统计学院，河南 平顶山 467000)

摘要:【目的】在误差为 AANA 序列的条件下，对 Gassor 和 Müller 提出的一类非参数回归函数积分权核估计进行研究。【方法】利用截尾方法和 AANA 序列的指数不等式进行研究。【结果】得到了非参数回归函数积分权核估计的 P 阶矩相合性、强相合性和完全相合性，通过数值模拟来验证结果的有效性。【结论】该结果推广和拓展了已有的相关结论。

关键词:AANA 序列;非参数回归模型;完全收敛;积分权估计

中图分类号:O212.7　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)02-0089-07

1 基本概念

设(Ω,F,P)是一个概率空间，$\{X_n,n\geqslant 1\}$是定义在概率空间(Ω,F,P)上的随机变量序列。文献[1]在 1996 年引入下面的渐近几乎负相关(asymptotically almost negatively associated，AANA)随机变量的概念。

定义 1[1]　设$\{X_n,n\geqslant 1\}$为随机变量序列，如果存在非负数列 $u(n)\to 0,n\to\infty$，使得对所有的 $n,k\geqslant 1$，都有:

$$\mathrm{Cov}(f(X_n),g(X_{n+1},X_{n+2},\cdots,X_{n+k}))\leqslant u(n)[\mathrm{Var}(f(X_n))\mathrm{Var}(g(X_{n+1},X_{n+2},\cdots,X_{n+k}))],$$

式中:f 和 g 是对上述方差存在且对每个变元均非降连续的函数，则称$\{X_n,n\geqslant 1\}$是 AANA 随机变量序列，$\{u(n),n\geqslant 1\}$称为$\{X_n,n\geqslant 1\}$的混合系数。

当 $u(n)=0$ 时，AANA 随机变量序列就是 NA 随机变量序列，而且 AANA 随机变量序列也包含独立随机变量序列，因此 AANA 随机变量序列是一类包含独立随机变量序列和 NA 随机变量序列更一般的相依变量。近些年来，许多学者对 AANA 随机变量序列进行了研究。例如，文献[2]利用矩不等式得到了 AANA 随机变量序列加权和的完全收敛性。文献[3]利用最小二乘法和非参数加权的估计方法，得到了参数、非参数和误差方差的估计，并在合适的条件下得到了这些估计量的强相合性。文献[4]给出了 AANA 序列部分和的 Hájek-Rényi 型不等式、大偏差以及强大数定律。文献[5]得到了 AANA 随机变量序列的 Rosenthal 型不等式，作为不等式的应用，得到了关于完全收敛性的一些结论。文献[6]利用 AANA 随机变量序列的矩不等式和中心极限定理，得到了由 AANA 随机变量序列生成的移动平均过程的中心极限定理，改进并推广了已有结果。文献[7]利用 AANA 随机变量序列的矩不等式，得到了不同分布条件下 AANA 随机变量阵列加权和的完全收敛性。

下面引入完全收敛的概念，此概念由 Hsu 等人[8]在 1947 年给出。

定义 2[8]　如果对任意的 $\varepsilon>0$，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}P(|X_n-C|>\varepsilon)<\infty$，则称随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$完全收敛到常数 C。

由 Borel-Cantlli 引理可知，随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$完全收敛到常数 C，意味着 $X_n\to C$，a. s. 。对于独立同分布的随机变量序列，完全收敛与几乎处处收敛是等价的。然而对于相关随机变量序列或混合随机变量序列，

---

* **收稿日期**:2021-08-07　**修回日期**:2021-10-06　**网络出版时间**:2022-12-08T16:08

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11701307);平顶山学院高层次人才科研启动基金项目(PXY-BSQD2016006)

第一作者简介:张水利，男，副教授，博士，研究方向为极限理论及应用，E-mail:zhangshuilicong@126. com;**通信作者**:屈聪，女，副教授，E-mail:qucong1981813@126. com

网络出版地址:https://kns. cnki. net/kcms/detail//50. 1165. n. 20221207. 1742. 016. html

二者是不等价的。

定义 3 称随机变量序列$\{X_n, n\geqslant 1\}$被随机变量 X 控制,如果存在正常数 C,使得对所有的 $x\geqslant 0, n\geqslant 1$,都有 $P(|X_n|>x)\leqslant CP(|X|>x)$成立。

设 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 是固定点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个观察值,考虑非参数回归模型 $Y_i=g(x_i)+\varepsilon_i, 1\leqslant i\leqslant n$,式中 $g(x)$是定义在区间$[0,1]$上的未知函数,且把 $g(x)$在区间$[0,1]$外定义为 0,$\{\varepsilon_i, i\geqslant 1\}$是随机误差。不失一般性,假设 $0=x_0\leqslant x_1\leqslant\cdots\leqslant x_{n-1}\leqslant x_n=1$,Gasser 等人[9]在 1979 年给出函数 $g(x)$一种积分权核估计:

$$g_n(x)=h_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}Y_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\mathrm{d}s, \tag{1}$$

式中:$K(u)$为核函数,h_n 为窗宽,且 $0<h_n\to 0$。

对于积分权核估计,在独立误差情形下,Chen 等人[10]建立了估计量的相合性并得到了强一致收敛的收敛速度,并研究了积分权核估计的极限分布[11]。杨秀桃等人[12]利用 α 混合序列的概率指数不等式和矩不等式,在较弱的条件下得到了积分权估计的强相合性和一致相合性,该结果推广了独立样本下的相关结果。

本文用 $I(A)$表示集合 A 的示性函数,符号 C、C_1 和 C_2 表示正的常数,在不同的位置表示不同的常数。记 $\widetilde{\delta}_i=x_i-x_{i-1}, 1\leqslant i\leqslant n, \delta_n=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\widetilde{\delta}_i$。下面是本文将要使用的一些假设:

(A1) $g(x)$在$[0,1]$上一致连续;

(A2) 1) $K(\cdot)$满足 $\beta(\beta>0)$阶的 Lipschitz 条件;2) $K(\cdot)$是 $\mathbf{R}$ 上的有界函数;3) $\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)\mathrm{d}u=1$, $\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u<\infty$;

(A3) 当 $n\to\infty$时,$h_n\to 0, \delta_n\to 0$。

定理 1 如果假设(A1)、(A2)和(A3)成立,$\delta_n/h_n\to 0$,$\{\varepsilon_n, n\geqslant 1\}$是均值为 0 的 AANA 随机变量序列,且被随机变量 X 控制,混合系数$\{u(n), n\geqslant 1\}$满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(n)<\infty$。若 $E(|X|^2)<\infty$,则对 $0<p\leqslant 2$ 和任意的 $x\in(0,1)$,有$\lim\limits_{n\to\infty}E(|g_n(x)-g(x)|^p)=0$。

定理 2 如果假设(A1)、(A2)和(A3)成立,$\delta_n/h_n=O(n^{-s})$,$1/p\leqslant s\leqslant 1$,$p>2$,$\{\varepsilon_n, n\geqslant 1\}$是均值为 0 的 AANA 随机变量序列,且被随机变量 X 控制,混合系数$\{u(n), n\geqslant 1\}$满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(n)<\infty$。若$E|X|^{1+p}<\infty$,则对任意的 $x\in(0,1)$,在完全收敛意义下,有$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$。

由于独立随机变量和 NA 随机变量均是 AANA 随机变量序列,因此由定理 2 可知如下推论 1 和推论 2 成立。

推论 1 如果假设(A1)、(A2)和(A3)成立,$\delta_n/h_n=O(n^{-s})$,$1/p\leqslant s\leqslant 1$,$p>2$,$\{\varepsilon_n, n\geqslant 1\}$是均值为 0 的独立随机变量序列,且被随机变量 X 控制。若 $E|X|^{1+p}<\infty$,则对任意的 $x\in(0,1)$,在完全收敛意义下,有 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$。

推论 2 如果假设(A1)、(A2)和(A3)成立,$\delta_n/h_n=O(n^{-s})$,$1/p\leqslant s\leqslant 1$,$p>2$,$\{\varepsilon_n, n\geqslant 1\}$是均值为 0 的 NA 随机变量序列,且被随机变量 X 控制。若 $E|X|^{1+p}<\infty$,则对任意的 $x\in(0,1)$,在完全收敛意义下有 $\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$。

由于完全收敛意味着几乎处处收敛,由定理 2 可以得到积分权估计的强相合性。

推论 3 如果假设(A1)、(A2)和(A3)成立,$\delta_n/h_n=O(n^{-s})$,$1/p\leqslant s\leqslant 1$,$p>2$,$\{\varepsilon_n, n\geqslant 1\}$是均值为 0 的 AANA 随机变量序列,且被随机变量 X 控制,混合系数$\{u(n), n\geqslant 1\}$满足 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u(n)<\infty$。若$E|X|^{1+p}<\infty$,则对任意的 $x\in(0,1)$,有$\lim\limits_{n\to\infty}g_n(x)=g(x)$,a.s.。

2 引理

为了证明主要定理及推论,需要引入下述引理。

引理 1[13] 设随机变量序列$\{X_n,n\geqslant 1\}$被随机变量 X 控制,则对任意的 $p>0,a>0,n\geqslant 1$,存在正常数 C,使得:

$$E|X_n|^pI(|X_n|\leqslant a)\leqslant C[E|X|^pI(|X|\leqslant a)+a^pP(|X|>a)],$$
$$E|X_n|^pI(|X_n|>a)\leqslant CE|X|^pI(|X|>a),E|X_n|^p\leqslant CE|X|^p。$$

引理 2[5] 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是混合系数为$\{u(n),n\geqslant 1\}$的 AANA 随机变量序列,$\{f_n,n\geqslant 1\}$全部是非增(或非减)函数,则$\{f_n(X_n),n\geqslant 1\}$仍是混合系数为$\{u(n),n\geqslant 1\}$的 AANA 随机变量序列。

引理 3[5] 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是均值为 0 的 AANA 随机变量序列,混合系数为$\{u(n),n\geqslant 1\}$,满足 $\sum_{n=1}^{\infty}u(n)^2<\infty$,则存在仅依赖于 p 的正常数C,使得对任意的 $n\geqslant 1$ 和 $1<p\leqslant 2$,有 $E\left[\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^{j}X_i\right|^p\right]\leqslant C\sum_{i=1}^{n}E(|X_i|^p)$。

引理 4[12] 设 $g(x)$在$[0,1]$上一致连续,$\int_{-\infty}^{+\infty}K(u)\mathrm{d}u=1$,$\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u<\infty$,如果 $h_n\to 0,\delta_n\to 0$,则有:

$$\lim_{n\to\infty}E(g_n(x))=g(x),x\in(0,1)。$$

引理 5[12] 设 $\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u<\infty$,且 $h_n\to 0$,则对任意的 $x\in(0,1)$,有:

$$\lim_{n\to\infty}h_n^{-1}\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\right|\mathrm{d}s=\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u。$$

引理 6[14] 设$\{X_n,n\geqslant 1\}$是均值为 0 的 AANA 随机变量序列,混合系数为$\{u(n),n\geqslant 1\}$,满足 $\sum_{n=1}^{\infty}u(n)<\infty$,$b$ 是一个正常数,$|X_i|\leqslant b$。则对任意的 $\varepsilon>0$,有:

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}X_i\right|>\varepsilon\right)\leqslant C\left[\sum_{i=1}^{n-1}u(k)+1\right]\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2\Delta_n^2+2b\varepsilon/3}\right\},$$

式中:$\Delta_n^2=\sum_{i=1}^{n}E(X_i^2),n\geqslant 1$。

3 定理的证明

证明(定理 1) 注意到 $E(|g_n(x)-g(x)|^p)\leqslant C\{E(|g_n(x)-Eg_n(x)|^p)+|E(g_n(x))-g(x)|^p\}$。由引理 4 可知$|E(g_n(x))-g(x)|^p\to 0$。

下面只需要证明 $E(|g_n(x)-E(g_n(x))|^p)\to 0$。

由 Jensen 不等式、引理 1、引理 3、引理 5 以及 $E(|X|^2)<\infty$可知,对 $0<p\leqslant 2$,有:

$$E(|g_n(x)-E(g_n(x))|^p)=E\left(\left|\sum_{i=1}^{n}h_n^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\mathrm{d}s\cdot\varepsilon_i\right|^p\right)\leqslant$$

$$\left\{E\left(\left|\sum_{i=1}^{n}h_n^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\mathrm{d}s\cdot\varepsilon_i\right|^2\right)\right\}^{\frac{p}{2}}\leqslant C\left\{\sum_{i=1}^{n}\left(h_n^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\mathrm{d}s\right)^2\cdot E(|X|^2)\right\}^{\frac{p}{2}}\leqslant$$

$$C\left\{h_n^{-1}\sup_{1\leqslant i\leqslant n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\right|\mathrm{d}s\cdot\sum_{i=1}^{n}h_n^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\left|K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\right|\mathrm{d}s\right\}^{\frac{p}{2}}\leqslant C\left\{h_n^{-1}\delta_n\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}|K(u)|\mathrm{d}u\right\}^{\frac{p}{2}}\to 0。$$ 证毕

证明(定理 2) 令 $W_{ni}(x)=h_n^{-1}\int_{x_{i-1}}^{x_i}K\left(\frac{x-s}{h_n}\right)\mathrm{d}s$,则 $g_n(x)=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)Y_i=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)g(x_i)+\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\varepsilon_i$。对任意的 $x\in(0,1)$,有:

$$|g_n(x)-g(x)|\leqslant|g_n(x)-E(g_n(x))|+|E(g_n(x))-g(x)|。\tag{2}$$

由引理4可知,为了证明定理2的结论,只需证明在完全收敛的意义下 $g_n(x)-E(g_n(x))\to 0$。

注意到 $|g_n(x)-E(g_n(x))|=\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\cdot\varepsilon_i\right|$,即需要证明对任意的 $\varepsilon>0$,有:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\cdot\varepsilon_i\right|>\varepsilon\right)<\infty,\ \forall x\in(0,1)。\tag{3}$$

由积分中值定理可知,存在 $\theta_i\in(0,1)$,使得:

$$W_{ni}(x)=h_n^{-1}K\left(\frac{x-x_i+\theta_i\tilde{\delta}_i}{h_n}\right)\tilde{\delta}_i\leqslant C\frac{\delta_n}{h_n}。\tag{4}$$

令:

$$\varepsilon_i'=-n^{\frac{1}{p}}I(\varepsilon_i<-n^{\frac{1}{p}})+\varepsilon_iI(|\varepsilon_i|<n^{\frac{1}{p}})+n^{\frac{1}{p}}I(\varepsilon_i>n^{\frac{1}{p}}),$$

$$\varepsilon_i''=(\varepsilon_i+n^{\frac{1}{p}})I(\varepsilon_i<-n^{\frac{1}{p}})+(\varepsilon_i-n^{\frac{1}{p}})I(\varepsilon_i>n^{\frac{1}{p}})。$$

注意到对任意的 $i\geqslant 1$,$E\varepsilon_i=0$,因此有 $\varepsilon_i=\varepsilon_i'+\varepsilon_i''=(\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i'))+(\varepsilon_i''-E(\varepsilon_i''))$,及:

$$|g_n(x)-E(g_n(x))|=\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\cdot\varepsilon_i\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)(\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i'))\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\cdot(\varepsilon_i''-E(\varepsilon_i''))\right|。\tag{5}$$

由引理2可知,$\{\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i'),\ i\geqslant 1\}$ 仍为AANA序列,且均值为0。由于 $p>2$,所以 $E(|X|^{1+p})<\infty$ 意味着 $E(|X|^2)<\infty$。由引理1、引理5、式(4)以及假设(A3)可知:

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}|W_{ni}(x)(\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i'))|\leqslant Cn^{\frac{1}{p}}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|W_{ni}(x)|\leqslant C_1n^{\frac{1}{p}-s},\tag{6}$$

$$\Delta_n^2=\sum_{i=1}^{n}E[W_{ni}(x)(\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i'))]^2=\sum_{i=1}^{n}W_{ni}^2(x)E[\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i')]^2\leqslant$$

$$C\max_{1\leqslant i\leqslant n}|W_{ni}(x)|\sum_{i=1}^{n}|W_{ni}(x)|E(X)^2\leqslant C\frac{\delta_n}{h_n}\leqslant C_2n^{-s}。\tag{7}$$

由引理6、$\sum_{n=1}^{\infty}u(n)<\infty$ 及式(6)、(7),可得:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)(\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i'))\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant C\sum_{n=1}^{+\infty}\exp\left\{-\frac{\varepsilon^2}{2C_2n^{-s}+2C_1n^{1/p-s}\varepsilon/3}\right\}\leqslant C\sum_{n=1}^{+\infty}n^{-2}<+\infty。\tag{8}$$

由Markov不等式、引理1以及 $E(|X|^{1+p})<\infty$,可知:

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)(\varepsilon_i''-E(\varepsilon_i''))\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant C\sum_{n=1}^{+\infty}E\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)(\varepsilon_i''-E(\varepsilon_i''))\right|\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{i=1}^{n}|W_{ni}(x)|E[|\varepsilon_i|I(|\varepsilon_i|>n^{\frac{1}{p}})]\leqslant$$

$$C\sum_{n=1}^{+\infty}E[|X|I(|X|>n^{\frac{1}{p}})]\leqslant C\sum_{n=1}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}E[|X|I(k^{\frac{1}{p}}<|X|\leqslant(k+1)^{\frac{1}{p}})]\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{+\infty}E[|X|I(k^{\frac{1}{p}}<|X|\leqslant(k+1)^{\frac{1}{p}})]\sum_{n=1}^{k}1\leqslant C\sum_{k=1}^{+\infty}kE[|X|I(k^{\frac{1}{p}}<|X|\leqslant(k+1)^{\frac{1}{p}})]\leqslant$$

$$C\sum_{k=1}^{+\infty}E[|X|^{p+1}I(k^{\frac{1}{p}}<|X|\leqslant(k+1)^{\frac{1}{p}})]\leqslant CE[|X|^{p+1}]<+\infty。\tag{9}$$

由式(8)、(9),有:

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)\cdot\varepsilon_i\right|>2\varepsilon\right)\leqslant\sum_{n=1}^{+\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)(\varepsilon_i'-E(\varepsilon_i'))\right|\geqslant\varepsilon\right)+$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}P\left(\left|\sum_{i=1}^{n}W_{ni}(x)(\varepsilon_i''-E(\varepsilon_i''))\right|\geqslant\varepsilon\right)<\infty。$$

证毕

4　数值模拟

本节通过数值模拟来验证估计量 $g_n(x)$ 的有效性。对于给定的 $n\geqslant 3$，$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)\sim N_n(\mathbf{0},\boldsymbol{\Sigma})$，其中 $\mathbf{0}$ 表示零向量，

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{pmatrix} 1.25 & -0.50 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.50 & 1.25 & -0.50 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.50 & 1.25 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -0.50 & 1.25 & -0.50 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -0.50 & 1.25 \end{pmatrix}。$$

由文献[15]可知，$(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)$ 是 NA 变量，因此也是 AANA 变量。为了便于进行数值模拟，在模型(1)中，取 $x_i=i/n$，$0\leqslant i\leqslant n$，$K(u)=0.75(1-u^2)I(|u|\leqslant 1)$ 为 Epanechnikov 核函数，窗宽为 $h_n=n^{-1/4}$。样本容量 n 分别取为 100，300，600，1 000，在 $g(x)=\exp(x)$，$x\in[0,1]$ 和 $g(x)=x^2$，$x\in[0,1]$ 两种情况下进行模拟。在 $x=0.25,0.5,0.75$ 的情形下，重复模拟 1 000 次，分别获得 $g_n(x)-g(x)$ 的箱型图，见图 1～6，同时得到了估计量 $g_n(x)$ 与函数 $g(x)$ 的偏差和均方误差，见表 1。

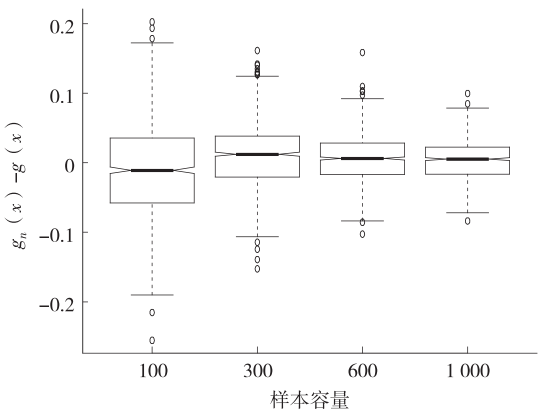

图 1　$g(x)=\exp(x)$，$x=0.25$ 时，$g_n(x)-g(x)$ 的箱型图

Fig. 1　Box diagram of $g_n(x)-g(x)$ when $g(x)=\exp(x)$，$x=0.25$

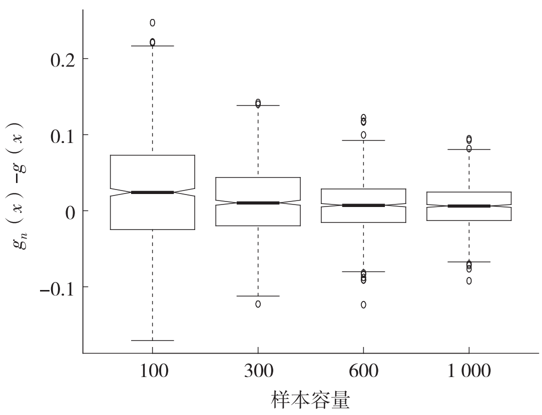

图 2　$g(x)=\exp(x)$，$x=0.5$ 时，$g_n(x)-g(x)$ 的箱型图

Fig. 2　Box diagram of $g_n(x)-g(x)$ when $g(x)=\exp(x)$，$x=0.5$

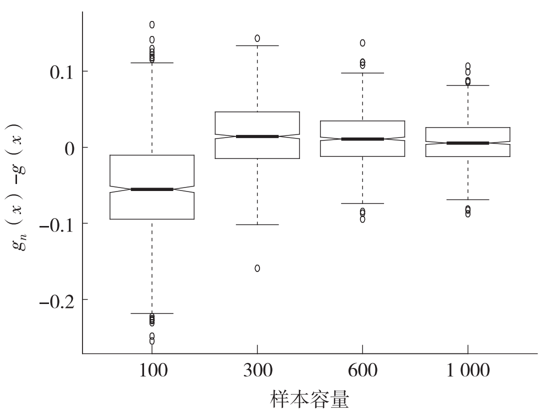

图 3　$g(x)=\exp(x)$，$x=0.75$ 时，$g_n(x)-g(x)$ 的箱型图

Fig. 3　Box diagram of $g_n(x)-g(x)$ when $g(x)=\exp(x)$，$x=0.75$

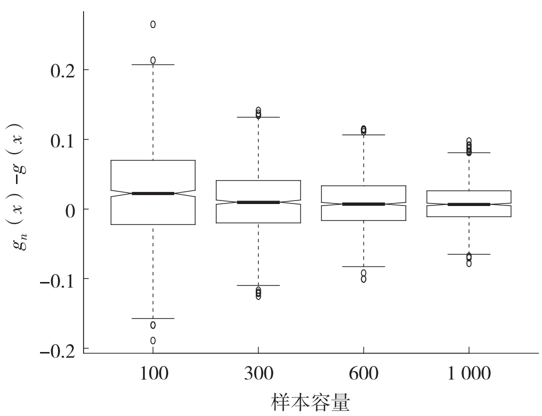

图 4　$g(x)=x^2$，$x=0.25$ 时，$g_n(x)-g(x)$ 的箱型图

Fig. 4　Box diagram of $g_n(x)-g(x)$ when $g(x)=x^2$，$x=0.25$

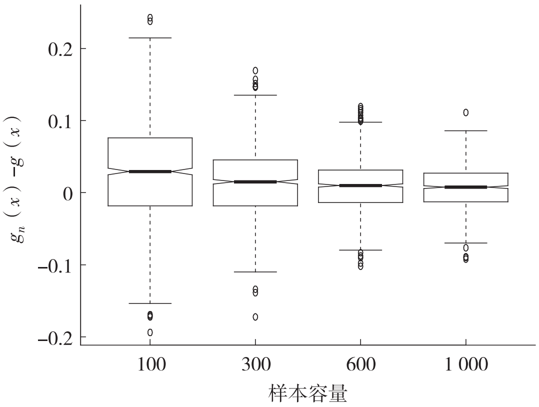

图5 $g(x)=x^2$,$x=0.5$时,$g_n(x)-g(x)$的箱型图

Fig. 5 Box diagram of $g_n(x)-g(x)$ when $g(x)=x^2$, $x=0.5$

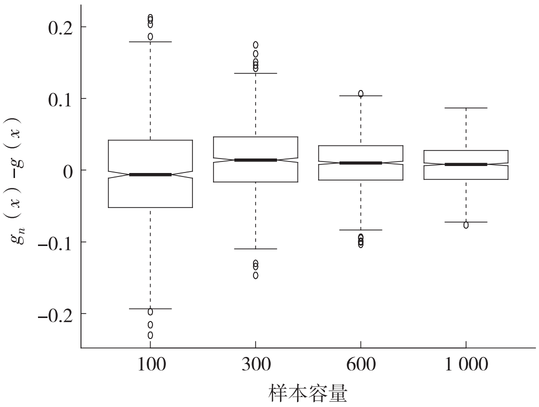

图6 $g(x)=x^2$,$x=0.75$时,$g_n(x)-g(x)$的箱型图

Fig. 6 Box diagram of $g_n(x)-g(x)$ when $g(x)=x^2$, $x=0.75$

表1 估计量$g_n(x)$与函数$g(x)$的偏差和均方误差

Tab. 1 Deviation and mean-square error of the estimator $g_n(x)$ and the function $g(x)$

$g(x)$	x		n=100	n=300	n=600	n=1 000
exp(x)	0.25	偏差	−0.012 0	0.009 1	0.006 2	0.003 9
		均方误差	0.004 7	0.002 1	0.001 2	0.000 8
	0.5	偏差	0.023 9	0.012 1	0.007 1	0.005 8
		均方误差	0.005 5	0.002 2	0.001 2	0.000 8
	0.75	偏差	−0.053 9	0.015 3	0.010 9	0.006 3
		均方误差	0.007 2	0.002 3	0.001 3	0.000 8
x^2	0.25	偏差	0.023 1	0.011 3	0.008 5	0.007 2
		均方误差	0.005 1	0.002 3	0.001 4	0.000 9
	0.5	偏差	0.028 1	0.014 3	0.009 3	0.007 3
		均方误差	0.005 6	0.002 5	0.001 3	0.000 9
	0.75	偏差	−0.006 0	0.014 9	0.010 0	0.007 3
		均方误差	0.004 8	0.002 3	0.001 3	0.000 9

由图1到图6以及表1可知,随着样本容量n的增加,$g_n(x)-g(x)$的值越来越趋于0,这比较直观地反映了本文的结果。

参考文献:

[1] CHANDRA T K, GHOSAL S. The strong law of large numbers for weighted averages under dependence assumptions[J]. Journal of Theoretical Probability, 1996, 9(3): 797-809.

[2] 王学军,唐徐飞,席梦梅,等. AANA随机变量的完全收敛性[J]. 安徽大学学报(自然科学版), 2017, 41(5): 26-31.

WANG X J, TANG X F, XI M M, et al. On the complete convergence for asymptotically almost negatively associated random variables[J]. Journal of Anhui University (Natural Science Edition), 2017, 41(5): 26-31.

[3] 张鸽,胡宏昌,张宇. AANA序列的半参数模型的强相合性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2015, 31(3): 296-306.

ZHANG G, HU H C, ZHANG Y. The strong consistency of semiparametric model with AANA errors[J]. Pure and Applied Mathematics, 2015, 31(3): 296-306.

[4] WANG X J, HU S H, LI X Q, et al. Maximal inequality and strong law of large numbers for AANA sequences[J]. Communications of the Korean Mathematical Society, 2011, 26(1): 151-161.

[5] YUAN D M, AN J. Rosenthal type inqualities for asymptotically almost negatively associated random variables and applications [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(9): 1887-1904.

[6] 徐惠莲,王颖.由渐近几乎负相协(AANA)随机变量序列生成的移动平均过程的中心极限定理[J].浙江大学学报(理学版),2021,48(1):64-68.

XU H L, WANG Y. Central limit theorem for moving average processes generated by AANA random variables sequences[J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2021, 48(1): 64-68.

[7] 孟兵,王定成,吴群英.行间AANA随机变量阵列加权和的完全矩收敛性[J].数学物理学报,2020,40A(6):1670-1681.

MENG B, WANG D C, WU Q Y. On the complete moment convergence for weighted sums of rowwise asymptotically almost negatively associated random variables[J]. Acta Mathematica Scientia, 2020, 40A(6): 1670-1681.

[8] HSU P L, ROBBINS H. Complete convergence and the law of large numbers[J]Proceeding of the National Academy of Sciences of the United States of America, 1947, 33(2): 25-31.

[9] GASSER T, MÜLLER H G. Kernel estimation of regression of functions[M]//GASSER T, ROSENBLATT M. Smoothing Techniques for Curve Estimation. Heidelberg: Springer-Verlag, 1979: 23-68.

[10] CHENG K F, LIN P E. Nonparametric estimation of a regression function: limiting distribution[J]. Australian & New Zealand Journal of Statistics, 1981, 23(2): 186-195.

[11] CHENG K F, LIN P E. Nonparametric estimation of a regression function[J]. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 1981, 57: 223-233.

[12] 杨秀桃,杨善朝.α混合样本下积分权回归估计的强相合性[J].数学杂志,2019,39(6):878-888.

YANG X T, YANG S C. Strong consistency of integral weight regression estimator for α-mixing samples[J]. Journal of Mathematics, 2019, 39(6): 878-888.

[13] 吴群英.混合序列的概率极限理论[M].北京:科学出版社,2006.

WU Q Y. Probability limit theory of mixed sequences[M]. Beijing: Science Press, 2006.

[14] SHEN A T, ZHANG S Y. On complete consistency for the estimator of nonparametric regession model based on asymptotically almost negatively associated errors[J]. Methodology and Computing in Applied Probability, 2021, 23: 1285-1307.

[15] JOAG-DEV K, PROSCHAN F. Negative association of random variables with applications[J]. The Annals of Statistics, 1983, 11(1): 286-295.

The Consistency of Integral Weight Kernel Estimator of Nonparametric Regression Function under AANA Errors

ZHANG Shuili, QU Cong, ZHANG Xiaofei

(School of Mathematics and Statistics, Pingdingshan University, Pingdingshan Henan 467000, China)

Abstract: [**Purposes**]It studied the integral weight kernel estimators of nonparametric regression functions which is proposed by Gassor and Müller under AANA errors. [**Methods**]By using truncation method and exponential inequality of AANA sequence, it obtained the complete consistency of integral weight kernel estimators of nonparametric regression functions. [**Findings**]The results extended the existing related conclusions. [**Conclusions**]Some simulations are illustrated to verify the validity of our results.

Keywords: AANA sequence; nonparametric regression model; complete convergence; integral weight estimator

(责任编辑 黄 颖)