DOI:10.11721/cqnuj20230202

圆周上扩张映射的线性化对参数的 Hölder 依赖性*

李 笑,唐 肖
(重庆师范大学 数学科学学院,重庆 401331)

摘要:【目的】考虑将光滑线性化结果延伸至环面,并考察扰动下系统对参数的依赖性。【方法】采用经典方法构造完备度量空间,定义了特殊范数来实现压缩性。【结果】在一维圆周上实现扩张映射的 Hölder 线性化,并且给出了共轭映射 Hölder 依赖于参数的条件。【结论】一般而言,能将线性化结果提升至 Hölder,且圆周动力系统的线性化与一维线性动力系统保持一致。

关键词:扩张映射;线性化;参数依赖性
中图分类号:O193 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2023)02-0103-05

1 预备知识

结构稳定性是动力系统领域的一个重要课题,粗略地讲,指的是相邻的向量场或映射是否具有相同的动力学行为,而线性化问题可视为结构稳定性的一种特殊情况。设线性映射 $A:E\to E$,其中 E 为 Banach 空间,映射 $F:E\to E$。若存在同胚 $H:E\to E$ 满足 $H\circ F=AH$,则称 F 可以线性化。线性化的研究结果可参考文献[1-3]。其中:Bonckaert 等人[1]于 1984 年给出了 Sternberg 线性化定理的简单证明,处理了局部情形下满足非共振条件的 C^r 微分同胚 $C^s(s\leqslant r)$线性化的问题,并通过稳定流形和不稳定流形下映射的不变性,利用 Sobolev 空间研究了共轭映射在 C^{s-1} 拓扑下对扰动的连续依赖性;而后 Bonckaert 为了避免使用 Sobolev 空间带来的困难,在文献[2]中对上述方法进行了优化,针对双曲不动点附近 C^p 映射(非线性、线性)在 C^p 扰动下的共轭问题,得到了共轭映射的最优光滑度 $C^r(r\leqslant p)$,并研究了 C^r 拓扑下映射对扰动的连续依赖性。

研究者们还得到一些关于参数依赖性的结论[4-7]。Rodrigues 等人[4]考察了线性映射对参数的依赖性,证得了共轭映射对参数的连续依赖性;刘鹏[5]则验证了 Hartman 线性化定理中的相关结果;而后张文萌等人[6]拓展了前人的结论,使用 Pugh 的方法证明了局部情形下 $C^{1,\alpha}$ 映射的C^α 线性化,引入 Hölder 范数实现了系统线性部分的控制,证得了参数系统中映射对参数的 Hölder 连续依赖。

关于流形上的共轭问题,著名的 Shub 定理[8]表明紧致微分流形上的任意扩张自映射作为微分半动力系统都是结构稳定的。特别地,张筑生[9]以圆周上扩张映射为例使用压缩不动点定理对该问题作出了证明。

本文给出了在圆周上扩张映射的线性化中参数的 Hölder 依赖性。在后续表述中,$f:S^1\to S^1$ 是一个映射度为 d 的扩张映射,$g(z)=z^d$,$z\in S^1$。并证明存在同胚 $h:S^1\to S^1$ 满足:

$$h\circ f=g\circ h,\tag{1}$$

且 h 和 h^{-1} 都是 Hölder 连续的。若 f 的提升的导数 Hölder 依赖于参数,则 h 和 h^{-1} 也 Hölder 依赖于参数。在此过程中,结论的证明不仅强依赖于恰当空间和适当范数的选取,还依赖于不动点定理的应用,因此在参数依赖性证明的部分,为了能控制 C^α 拓扑下共轭映射的范数,基于文献[6]的方法,在线性化部分的证明中完成了对完备空间及范数的定义。

下面引入一些在本文需要的记号和结果[9-10]。

定义 1 记圆周 $S^1=\{z\in\mathbf{C}:|z|=1\}$,定义万有覆盖映射 $E:\mathbf{R}\to S^1$ 为 $E(x):=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}x}$,对所有的 $x\in\mathbf{R}$。

定义 2 设 $f:S^1\to S^1$ 和 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续映射,满足 $E\circ F=f\circ E$,其中$\circ$表示映射的复合。则称 F 为 f 的提升。

* **收稿日期:**2022-08-01 **修回日期:**2022-09-02 **网络出版时间:**2023-04-20T13:41
资助项目:重庆师范大学博士启动基金(No. 20XLB033)
第一作者简介:李笑,女,研究方向为微分动力系统,E-mail:1742613973@qq.com;**通信作者:**唐肖,男,讲师,博士,E-mail:mathtx@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230420.1029.004.html

2 主要结果

定理1 设 $f:S^1\to S^1$ 是连续映射,则:

1) 存在 f 的提升 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$;

2) 提升 F 满足 $F(x+1)-F(x)=d\in\mathbf{Z}$,其中 d 不依赖于提升 F,也不依赖于 x,称为 f 的映射度,记为 $\deg(f)=d$;

3) 对任意 $l\in\mathbf{Z}$,$F+l$ 也是 f 的提升,并且 f 的任意提升都可表示为这种形式。

记 h 和 h^{-1} 都是 $S^1\to S^1$ 的同胚,提升分别为 H 和 $\widetilde{H}$,则根据文献[9]的命题2.8知,H 和 $\widetilde{H}$ 都是 $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 的同胚,且 $H\circ\widetilde{H}=\widetilde{H}\circ H=Id$。

定义3 如果 $f\in C^1(S^1,S^1)$,满足对任意 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $|\mathrm{D}F(x)|>1$,其中:F 为 f 的一个提升,D代表微分算子,则称 f 为 S^1 上的扩张映射。

显然,对任意 $x\in\mathbf{R}$,$|d|=|F(x+1)-F(x)|=|\mathrm{D}F(\xi)|>1$,其中 $\xi\in(x,x+1)$。

定义4 (Hölder连续)称 $h:S^1\to S^1$ 是Hölder连续的,如果它的提升 $H:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是Hölder连续的,即存在常数 $M>0$,$0<\alpha<1$,使得对所有的 $x,y\in\mathbf{R}$ 且 $|x-y|<1$,$|H(x)-H(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha}$。

引理1 设 $f\in C^1(S^1,S^1)$是扩张映射,$\deg(f)=d$,F 是 f 的任意一个提升,则 $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是一个同胚。

引理2 设 $f:S^1\to S^1$ 和 $g:S^1\to S^1$ 有提升分别为 F 和 G,若 $\|F-G\|_{C^0}=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|F(x)-G(x)|<1/2$,则有 $\deg(f)=\deg(g)$,且 $F-G$ 是周期为1的函数。

上述引理2表明圆周上充分接近的两个自映射的映射度相同,即小扰动下圆周自映射的映射度不变。

引理3 任一圆周上映射度为 $d\neq1$ 的连续映射 f,都存在一个有不动点 p 的提升,$p\in[-1/2,1/2]$。如果 f 和 $g:z\mapsto z^d$ C^0 接近,那么 p 和0就接近[10]。

定理2 (Shub)设 $f,g\in C^1(S^1,S^1)$都是扩张映射,并且 $\deg(f)=\deg(g)$,则 f 与 g 拓扑共轭。

2.1 Hölder线性化

本节证明圆周上扩张映射的Hölder线性化。

令空间 $C_e^1(S^1,S^1):=\{f\in C^1(S^1,S^1)\mid\deg(f)=|d|>1\}$,其中 e 为下指标,设 $f\in C_e^1(S^1,S^1)$,F 为 f 的一个提升。令 $g(x):=z^d$,$z\in S^1$,容易验证 $g\in C_e^1(S^1,S^1)$,且它的一个提升为 $G(x):=dx$,$x\in\mathbf{R}$。由 $F(x+1)=F(x)+d$ 知,$\mathrm{D}F(x)$是周期为1的连续函数,因此 $\mathrm{D}F(x)$在 $\mathbf{R}$ 上存在上下确界,记为 $\rho:=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\mathrm{D}F(x)|$,$\hat{\rho}:=\inf\limits_{x\in\mathbf{R}}|\mathrm{D}F(x)|$。令 $\alpha_0:=\min\{(\ln|d|)/(\ln\rho),(\ln\hat{\rho})/(\ln|d|)\}$,圆周上扩张映射的Hölder线性化的结果如下。

定理3 设 $f,g\in C^1(S^1,S^1)$是如上定义的圆周映射,且 C^1 接近(满足$\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\mathrm{D}F(x)-d|<|d|-1$)。则存在一个同胚 $h:S^1\to S^1$ 满足方程(1),并且 h 和 h^{-1} 都是 α-Hölder连续的,其中 $0<\alpha<\alpha_0\leqslant1$。

证明 首先注意到存在 h 满足方程(1)等价于存在 h 的提升 H 满足方程:

$$H\circ F=G\circ H,\tag{2}$$

式中:F 是 f 的提升,G 是 g 的提升。

事实上,如果方程(1)成立,则 $h\circ f\circ E=g\circ h\circ E$ 也成立。由提升的定义知,对 h,f,g 的某个提升 H,F,G 有 $E\circ H\circ F=E\circ G\circ H$。根据覆盖映射的性质,存在某个整数 z,使得对所有的 $x\in\mathbf{R}$ 有:$H\circ F(x)=G\circ H(x)+z$。

由定理1,存在 $i,j,k\in\mathbf{Z}$,使得 $H+i,F+j,G+k$ 也是 h,f,g 对应的提升,且满足 $H(F(x))+j+i=G(H(x))+i\cdot d+k$,即$(H+i)\circ(F+j)=(G+k)\circ(H+i)$。这意味着不管原提升满足何种形式的共轭方程,都能通过整数平移,找到满足方程(2)形式的提升。

另一方面,在方程(2)两侧作用 E 有 $E\circ H\circ F=E\circ G\circ H$。利用提升的定义变形得,$h\circ f\circ E=g\circ h\circ E$。由于 $E:\mathbf{R}\to S^1$ 是满射,则有 $h\circ f=g\circ h$。即,圆周自映射的线性化可以转化为提升的线性化。因此,下面讨论提升的线性化。

根据引理3,F 有一个不动点 p,可以通过平移变换将 p 变为0,不妨设平移之后的映射也记为 F,即 $F(0)=0$。定义空间:$\Gamma^{\alpha}(\mathbf{R}):=\{H\in C^0(\mathbf{R})\mid H(0)=0,H$ 对所有 x 满足 $H(x+1)=H(x)+1,\sup\limits_{x\neq0}(H(x)/|x|^{\alpha})<\infty\}$,其中:$C^0(\mathbf{R})$表示 $\mathbf{R}$ 上的所有连续函数构成的集合。在空间 $\Gamma^{\alpha}(\mathbf{R})$上定义范数 $\|H\|_{C^{\alpha}}:=\sup\limits_{x\neq0}(H(x)/|x|^{\alpha})$。易知空间 $\Gamma^{\alpha}(\mathbf{R})$按范数 $\|\cdot\|_{C^{\alpha}}$ 成Banach空间。

令空间 $\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R}) := \{H \in \Gamma^\alpha(\mathbf{R})$：对所有 x, y 满足 $|H(x)-H(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha\}$，其中 $M>0$ 是一个常数。易知 $\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$ 为 $\Gamma^\alpha(\mathbf{R})$ 的闭子集，因此 $(\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R}), \|\cdot\|_{C^\alpha})$ 是一个完备的度量空间。

定义映射 $T: \Gamma_M^\alpha(\mathbf{R}) \to \Gamma^\alpha(\mathbf{R})$ 为 $T: H \mapsto G^{-1} \circ H \circ F$。可以断言 T 为集合 $\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$ 上的自映射。

根据定理 1 和引理 1 知，H, F, G 均为同胚，则 $TH \in C^0(\mathbf{R})$，且有 $TH(0) = G^{-1} \circ H \circ F(0) = 0$。对所有的 $x \in \mathbf{R}$，有 $(TH)(x+1) = G^{-1} \circ H \circ F(x+1) = d^{-1}(H(F(x))+d) = (TH)(x)+1$。

由 $TH(0)=0$ 有：

$$\sup_{x\neq 0}\frac{|TH(x)|}{|x|^\alpha}=\sup_{x\neq 0}\frac{1}{|d|}\cdot\frac{|H\circ F(x)-H\circ F(0)|}{|x|^\alpha}\leqslant$$

$$\sup_{x\neq 0}\frac{M}{|d|}\cdot\frac{|F(x)-F(0)|^\alpha}{|x|^\alpha}\leqslant\sup_{x\neq 0}\frac{M}{|d|}\cdot|\mathrm{D}F(\xi_{0,x})|\leqslant M\frac{\rho^\alpha}{|d|}<\infty。$$

对所有的 $x, y \in \mathbf{R}$ 有：

$$|TH(x)-TH(y)|=|G^{-1}\circ H\circ F(x)-G^{-1}\circ H\circ F(y)|=$$

$$\frac{1}{|d|}|H\circ F(x)-H\circ F(y)|\leqslant\frac{M}{|d|}|F(x)-F(y)|^\alpha\leqslant\frac{M}{|d|}\cdot\rho^\alpha|x-y|^\alpha。$$

由 $\alpha<(\ln|d|)/(\ln\rho)$ 知，$\rho^\alpha/|d|<1$，则对所有的 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $|TH(x)-TH(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$ 成立。

故 T 是自映射 $(TH \in \Gamma_M^\alpha(\mathbf{R}))$。

下证 T 是压缩映射。对任意 $H_1, H_2 \in \Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$，有：

$$\|TH_1-TH_2\|_{C^\alpha}=\sup_{x\neq 0}\frac{1}{|d|}\cdot\frac{|H_1\circ F(x)-H_2\circ F(x)|}{|x|^\alpha}=\sup_{x\neq 0}\frac{1}{|d|}\cdot\frac{|H_1\circ F(x)-H_2\circ F(x)|}{|F(x)|^\alpha}\cdot\frac{|F(x)|^\alpha}{|x|^\alpha}\leqslant$$

$$\sup_{F(x)\neq 0}\frac{|H_1\circ F(x)-H_2\circ F(x)|}{|F(x)|^\alpha}\cdot\sup_{x\neq 0}\frac{|\mathrm{D}F(\xi_{0,x})|^\alpha}{|d|}\leqslant\frac{\rho^\alpha}{|d|}\cdot\|H_1-H_2\|_{C^\alpha}。$$

由压缩映像原理知，压缩映射 T 在完备的度量空间 $\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$ 中存在唯一一个不动点 H_*。

下证 H_* 是同胚。由 $H_*(x+1)=H_*(x)+1$ 知，映射 $\hat{H}_*(x+1) := H_*(x)-x$ 满足：

$$\hat{H}_*(x+1)=H_*(x+1)-x-1=H_*(x)-x=\hat{H}_*(x)。$$

即 $\hat{H}_*(x)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，那么当 x 趋于正负无穷时，$H_*(x)=\hat{H}_*(x)+x$ 也趋于正负无穷，故 H_* 是满射。

下证 H_* 是单射。假设存在 $a\neq b$，使得 $H_*(a)=H_*(b)$。对式(2)进行迭代，得到 $H_*\circ F^n=G^n\circ H_*$。则有：

$$0=|G^n\circ H_*(a)-G^n\circ H_*(b)|=|H_*\circ F^n(a)-H_*\circ F^n(b)|=$$

$$|H_*\circ F^n(a)-F^n(a)+F^n(a)-H_*\circ F^n(b)+F^n(b)-F^n(b)|\geqslant$$

$$|F^n(a)-F^n(b)|-|H_*\circ F^n(a)-F^n(a)|-|H_*\circ F^n(b)-F^n(b)|\geqslant$$

$$|\mathrm{D}F^n(\xi_{a,b})|\cdot|a-b|-|H_*\circ F^n(a)-F^n(a)|-|H_*\circ F^n(b)-F^n(b)|\geqslant$$

$$\prod_{i=0}^{n-1}|\mathrm{D}F(F^i(\xi_{a,b}))|\cdot|a-b|-|H_*\circ F^n(a)-F^n(a)|-|H_*\circ F^n(b)-F^n(b)|。$$

由于 $|\mathrm{D}F(x)|>1$，且 $H_*(x)-x$ 有界，因此当 n 趋于无穷时，有 $|G^n\circ H_*(a)-G^n\circ H_*(b)|\to+\infty$，得出矛盾，故而 H_* 是同胚。

事实上，交换 F 和 G 的位置，在完备度量空间 $\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$ 中，映射 $\tilde{T}(\tilde{H}) := F^{-1}\circ\tilde{H}\circ G$ 在满足 $0<\alpha<\frac{\ln\hat{\rho}}{\ln|d|}\leqslant 1$ 的条件下，也是集合 $\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$ 上的压缩自映射，并且存在唯一的不动点映射 $\tilde{H}: \mathbf{R}\to\mathbf{R}$，对所有的 $x, y \in \mathbf{R}$ 有：

$$F\circ\tilde{H}(x)=\tilde{H}\circ G(x), \tag{3}$$

$$|\tilde{H}(x)-\tilde{H}(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha。$$

由式(2)、(3)知，对任意的 $x, y \in \mathbf{R}$ 有 $\tilde{H}\circ H_*(x+1)=\tilde{H}\circ H_*(x)+1$，$|\tilde{H}\circ H_*(x)-\tilde{H}\circ H_*(y)|\leqslant M^{1+\alpha}|x-y|^{\alpha^2}$，且 $(\tilde{H}\circ H_*)\circ F=F\circ(\tilde{H}\circ H_*)$。

易知 $\tilde{H}\circ H_*-Id$ 是 $\mathbf{R}$ 上周期为 1 的映射，记为 η。根据引理 2，$F-G$ 也是周期为 1 的映射，记为 $\zeta := F-G$。因此 $(Id+\eta)\circ(G+\zeta)=(G+\zeta)\circ(Id+\eta)$，即 $\zeta+\eta\circ F=d\eta+\zeta\circ(Id+\eta)$。

易证空间:$X(\mathbf{R}):=\{\eta\in C^0(\mathbf{R})\mid\eta(0)=0,\eta$ 对所有 x 满足 $\eta(x+1)=\eta(x),\sup\limits_{x\neq0}|\eta(x)|<\infty\}$,按上确界范数$\|\cdot\|$成 Banach 空间。

定义映射 $S:X(\mathbf{R})\to C^0(\mathbf{R}),S(\eta)=d^{-1}(\zeta+\eta\circ F-\zeta\circ(Id+\eta))$。显然,$S$ 是 $X(\mathbf{R})$上的自映射,且对任意 $\eta_1,\eta_2\in X(\mathbf{R})$有:$\|S\eta_1-S\eta_2\|\leqslant\dfrac{1+\|\mathrm{D}\zeta\|}{|d|}\cdot\|\eta_1-\eta_2\|$。当$\|\mathrm{D}\zeta\|<|d|-1$ 时,S 是压缩映射,在 $X(\mathbf{R})$中有唯一不动点 $\hat{\eta}$,使得$(Id+\hat{\eta})\circ F=F\circ(Id+\hat{\eta})$。

明显地,$\eta=0\in X(\mathbf{R})$也是该方程的解。由压缩不动点的唯一性知,该方程仅有唯一解 $\hat{\eta}=0$,故 $\widetilde{H}\circ H_*=Id$。同理地,有 $H_*\circ\widetilde{H}=Id$,从而 $\widetilde{H}\circ H_*=H_*\circ\widetilde{H}=Id$。

上述结论说明 f 与 g 拓扑共轭,且共轭映射 h 和 h^{-1} 都是 α-Hölder 连续的。 证毕

2.2 参数依赖性

定理 4 设 Θ 为 Banach 空间,给定 $\tilde{\theta}\in\Theta,B(\tilde{\theta},\delta):=\{\theta\in\Theta\mid|\theta-\tilde{\theta}|<\delta\}\subset\Theta,\Pi:B(\tilde{\theta},\delta)\to C_e^1(S^1,S^1)$,记 $f_\theta:=\Pi(\theta)$,对任意 $\theta\in B(\tilde{\theta},\delta)$。设 F_θ 为 f_θ 的提升且 $F_\theta(0)=0$ 对任意 $\theta\in\Theta$ 都成立,$\mathrm{D}F_\theta$ 在 $\tilde{\theta}$ 处 Hölder 连续,即:

$$\|\mathrm{D}F_\theta-\mathrm{D}F_{\tilde{\theta}}\|\leqslant L|\theta-\tilde{\theta}|^\gamma,0<\gamma<1,\tag{4}$$

则对任意 $\theta\in\Theta$,存在 $H_\theta,H_\theta^{-1}\in\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$满足方程(2),且:

$$\|H_\theta-H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}\leqslant\frac{M}{|d|-(\rho_{\tilde{\theta}}+L\delta^\gamma)^\alpha}L^\alpha|\theta-\tilde{\theta}|^{\gamma\alpha},$$

$$\|H_\theta^{-1}-H_{\tilde{\theta}}^{-1}\|_{C^\alpha}\leqslant\frac{M|d|^\alpha}{\hat{\rho}_{\tilde{\theta}}(\hat{\rho}_{\tilde{\theta}}-L\delta^\gamma-|d|^\alpha)}L|\theta-\tilde{\theta}|^\gamma。$$

其中:M 如定理 3 证明中所述,H_θ 是 h_θ 的一个提升,H_θ^{-1} 是 h_θ^{-1} 的提升。

证明 固定 $\tilde{\theta}\in\Theta$,对任意 $\theta\in\Theta$,存在 $\delta>0$,使得$|\theta-\tilde{\theta}|<\delta$,由引理 2 知:$\deg(f_\theta)=\deg(f_{\tilde{\theta}})=\deg(g)=d$。

令 $\rho_\theta:=\sup\limits_{x\in\mathbf{R}}|\mathrm{D}F_\theta(x)|>1,\hat{\rho}_\theta:=\inf\limits_{x\in\mathbf{R}}|\mathrm{D}F_\theta(x)|>1,\alpha_\theta:=\min\left\{\dfrac{\ln|d|}{\ln\rho_\theta},\dfrac{\ln\hat{\rho}_\theta}{\ln|d|}\right\}$。由不等式(4)知:

$$\big||\mathrm{D}F_\theta(x)|-|\mathrm{D}F_{\tilde{\theta}}(x)|\big|\leqslant\sup_{x\neq0}|\mathrm{D}F_\theta(x)-\mathrm{D}F_{\tilde{\theta}}(x)|\leqslant L\delta^\gamma。$$

自然地,有 $\hat{\rho}_{\tilde{\theta}}-L\delta^\gamma\leqslant\hat{\rho}_\theta\leqslant\rho_\theta\leqslant\rho_{\tilde{\theta}}+L\delta^\gamma$,因此存在 $\min\limits_{|\theta-\tilde{\theta}|<\delta}\{\alpha_\theta\}:=\min\left\{\dfrac{\ln|d|}{\ln(\rho_{\tilde{\theta}}+L\delta^\gamma)},\dfrac{\ln(\hat{\rho}_{\tilde{\theta}}-L\delta^\gamma)}{\ln|d|}\right\}$,记为 $\tilde{\alpha}$。

根据定理 3,存在常数 α,满足 $0<\alpha<\tilde{\alpha}$,使得对所有的 $x,y\in\mathbf{R}$ 和满足条件的 θ 有:$|H^\pm(x)-H^\pm(y)|\leqslant M|x-y|^\alpha$,那么对任意的 $H_\theta,H_{\tilde{\theta}}\in\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$,就有:

$$\begin{aligned}\|H_\theta-H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}&=\|T_\theta H_\theta-T_{\tilde{\theta}}H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}\leqslant\|T_\theta H_\theta-T_\theta H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}+\|T_\theta H_{\tilde{\theta}}-T_{\tilde{\theta}}H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}\leqslant\\&(\rho_\theta^\alpha/|d|)\cdot\|H_\theta-H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}+\|T_\theta H_{\tilde{\theta}}-T_{\tilde{\theta}}H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha},\end{aligned}$$

即$\|H_\theta-H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{1-\rho_\theta^\alpha/|d|}\|T_\theta H_\theta-T_{\tilde{\theta}}H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}$。

事实上,

$$\begin{aligned}&\|T_\theta H_\theta-T_{\tilde{\theta}}H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}=\|G^{-1}\circ H_{\tilde{\theta}}\circ F_\theta-G^{-1}\circ H_{\tilde{\theta}}\circ F_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}=(1/|d|)\|H_{\tilde{\theta}}\circ F_\theta-H_{\tilde{\theta}}\circ F_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}\leqslant\\&(M/|d|)\sup_{x\neq0}\frac{|F_\theta(x)-F_{\tilde{\theta}}(x)|^\alpha}{|x|^\alpha}\leqslant(M/|d|)\sup_{x\neq0}\frac{|(F_\theta-F_{\tilde{\theta}})(x)-(F_\theta-F_{\tilde{\theta}})(0)|^\alpha}{|x|^\alpha}\leqslant\\&(M/|d|)\sup_{x\neq0}|\mathrm{D}F_\theta(\xi_{0,x})-\mathrm{D}F_{\tilde{\theta}}(\xi_{0,x})|^\alpha\leqslant(M/|d|)L^\alpha|\theta-\tilde{\theta}|^{\gamma\alpha}。\end{aligned}$$

因此$\|H_\theta-H_{\tilde{\theta}}\|_{C^\alpha}\leqslant\dfrac{M}{|d|-\rho_\theta^\alpha}L^\alpha|\theta-\tilde{\theta}|^{\gamma\alpha}\leqslant\dfrac{M}{|d|-(\rho_{\tilde{\theta}}+L\delta^\gamma)^\alpha}L^\alpha|\theta-\tilde{\theta}|^{\gamma\alpha}$。

类似地,对任意 $H_\theta^{-1},H_{\tilde{\theta}}^{-1}\in\Gamma_M^\alpha(\mathbf{R})$,有$\|H_\theta^{-1}-H_{\tilde{\theta}}^{-1}\|_{C^\alpha}\leqslant\dfrac{1}{1-|d|^\alpha/\hat{\rho}_\theta}\|\widetilde{T}_\theta H_{\tilde{\theta}}^{-1}-\widetilde{T}_{\tilde{\theta}}H_{\tilde{\theta}}^{-1}\|_{C^\alpha}$。且:

$$\|\widetilde{T}_\theta H_{\tilde{\theta}}^{-1}-\widetilde{T}_{\tilde{\theta}}H_{\tilde{\theta}}^{-1}\|_{C^\alpha}=\|F_\theta^{-1}\circ H_{\tilde{\theta}}^{-1}\circ G-F_{\tilde{\theta}}^{-1}\circ H_{\tilde{\theta}}^{-1}\circ G\|_{C^\alpha},$$

$$|F_\theta^{-1}(x)-F_{\tilde\theta}^{-1}(x)|=|F_\theta^{-1}(x)-F_\theta^{-1}\circ F_\theta\circ F_{\tilde\theta}^{-1}(x)|=$$
$$|\mathrm{D}F_\theta^{-1}(\xi_1)|\cdot|x-F_\theta\circ F_{\tilde\theta}^{-1}(x)|=|\mathrm{D}F_\theta^{-1}(\xi_1)|\cdot|F_{\tilde\theta}\circ F_{\tilde\theta}^{-1}(x)-F_\theta\circ F_{\tilde\theta}^{-1}(x)|=$$
$$|\mathrm{D}F_\theta^{-1}(\xi_1)|\cdot|\mathrm{D}F_{\tilde\theta}(\xi_2)-\mathrm{D}F_\theta(\xi_2)|\cdot|F_{\tilde\theta}^{-1}(x)|\leqslant\hat\rho_\theta^{-1}\hat\rho_{\tilde\theta}^{-1}L|\theta-\tilde\theta|^\gamma\cdot|x|。$$

其中：ξ_1,ξ_2 均由中值定理产生。则有：

$$\|\tilde T_\theta H_{\tilde\theta}^{-1}-\tilde T_{\tilde\theta}H_{\tilde\theta}^{-1}\|_{C^\alpha}\leqslant\sup_{x\neq0}\hat\rho_\theta^{-1}\hat\rho_{\tilde\theta}^{-1}L|\theta-\tilde\theta|^\gamma\cdot|H_{\tilde\theta}^{-1}(dx)|\cdot|x|^{-\alpha}\leqslant$$
$$\sup_{x\neq0}\hat\rho_\theta^{-1}\hat\rho_{\tilde\theta}^{-1}L|\theta-\tilde\theta|^\gamma\cdot M|dx|^\alpha\cdot|x|^{-\alpha}\leqslant\hat\rho_\theta^{-1}\hat\rho_{\tilde\theta}^{-1}ML|d|^\alpha|\theta-\tilde\theta|^\gamma$$

因此 $\|H_\theta^{-1}-H_{\tilde\theta}^{-1}\|_{C^\alpha}\leqslant\dfrac{ML|d|^\alpha}{\hat\rho_{\tilde\theta}(\hat\rho_{\tilde\theta}-L\delta^\gamma-|d|^\alpha)}|\theta-\tilde\theta|^\gamma$。 证毕

参考文献：

[1] BONCKAERT P,DUMORTIER F. On a linearization theorem of Sternberg for germs of diffeomorphisms[J]. Mathematische Zeitschrift,1984,185:115-135.

[2] BONCKAERT P. On the continuous dependence of the smooth change of coordinates in parametrized normal form theorems[J]. Journal of Differential Equations,1993,106:107-120.

[3] RODRIGUES H M,SOLA-MORALES J. On the Hartman-Grobman theorem with parameters[J]. Journal of Dynamics and Differential Equations,2010,22(23:473-489.

[4] 雷玄. 一维非双曲映射的 C^0 与 Hölder 线性化问题[J]. 内江师范学院学报,2020,35(2):25-28.
LEI X. C^0 and Hölder linearization of one-dimensional non-hyperbolic mapping[J]. Journal of Neijiang Normal University,2020,35(2):25-28.

[5] 刘鹏. Hartman 线性化定理中共轭映射关于参数的光滑依赖性[D]. 重庆:重庆师范大学,2018.
LIU P. Smooth dependence on parameters of the conjugacy in Hartman linearization theorem[D]. Chongqing:Chongqing Normal University,2018.

[6] ZHANG W M,LIU P,LEI X. On Hölder dependence of the parameterized Hartman-Grobman theorem[J]. Acta Mathematics Sinica,2022,38(1):137-147.

[7] TANG X,ZHANG W M. Smooth dependence of nonautonomous linearization on parameters[J]. Journal of Differential Equations,2022,337:1-31.

[8] SHUB M. Endomorphisms of compact differentiable manifolds[J]. American Journal of Mathematics,1969,91(1):175-199.

[9] 张筑生. 微分动力系统原理[M]. 北京:科学出版社,1987.
ZHANG Z S. Principle of differential dynamic system[M]. Beijing:Science Press,1987.

[10] KATOK A,HASSELBLATT B. Introduction to the modern theory of dynamical systems[M]. New York:Cambridge University Press,1995.

The Hölder Dependence on Parameters in Linearization of Expanding Map on the Circle

LI Xiao, TANG Xiao

(School of Mathematics and Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**]In order to extend the result of smooth linearization to torus, and know the dependence of parameters under disturbance. [**Methods**] A complete metric space is constructed by classical methods, and a special norm is defined to achieve compressibility of mapping. [**Findings**] The Hölder linearization of expending map is realized on one-dimensional circle, and the condition that makes the conjugate mappings Hölder depend on parameters is given. [**Conclusions**] Generally speaking, the linearization result can be improved to Hölder, and the linearization of circular dynamic system is consistent with that of one-dimensional linear dynamic system.

Keywords: expanding map; linearization; parameter dependence

(责任编辑 黄 颖)