DOI:10.11721/cqnuj20230211

# 求解 Rosenau-Kawahara 方程的 Sinc 配点法*

邓文超，吴蓓蓓，徐　丽
(上海电力大学 数理学院，上海 200090)

**摘要**:【目的】对 Rosenau-Kawahara 方程的初边值问题进行了数值研究,给出了求解 Rosenau-Kawahara 方程的 Sinc 配点法。【方法】空间离散采用 Sinc 配点法,时间离散采用向前有限差分法,并引入参数 $\theta$ 来建立混合差分格式。【结果】对差分格式的稳定性进行了分析,并得到了稳定性条件。【结论】数值实验证明了所构造方法的有效性,且 Crank-Nicholson 格式的数值结果优于有限差分法和五次 B 样条方法。

**关键词**:Rosenau-Kawahara 方程;Sinc 配点法;有限差分;稳定性
**中图分类号**:O241.82　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)02-0113-06

自然科学的许多现象都可以用非线性方程进行描述,例如:非线性振荡、多值响应、跳跃谐振、自激振荡等一系列现象都属于非线性现象,描述这些现象的方程统称为非线性方程。KdV 方程是一种典型的非线性方程,它主要被用于描述浅水槽中单向运动的奇特波动现象,是研究浅水运动的一个二维数学模型。由于 KdV 方程不能够解决墙与墙、波与波的问题,Rosenau 在 1986 年提出了 Rosenau 方程[1]。在 Rosenau 方程中加入粘性项时[2],便可以得到 Rosenau-Kawahara 方程。目前求解 Rosenau-Kawahara 方程的数值方法主要包括有限差分法、指数函数法、B 样条法等[3-11]。

Lund 等人[12]提出了一种利用 Sinc 函数作为基函数逼近方程的方法,称为 Sinc 配点法。Sinc 配点法的计算原理较为简明,计算量小,且具有收敛性好、收敛速度快、精度高等优点,而且在处理边界层问题与振荡问题时具有较好的逼近效果。近些年来,Sinc 配点法被广泛应用于偏微分方程的数值计算中,如 Mokhtari 等人[13]利用 Sinc 配点法求解 GRLW 方程,Kong 等人[14]将 Sinc 配点法与有限差分法结合求解 KdV 方程,杨梅等人[15]利用 Sinc-Galerkin 法求解 Burgers 方程的初边值问题,吴钦宽等人[16]利用 Sinc-Galerkin 求解非线性奇摄动方程的激波问题,等等。

本文利用 Sinc 配点法[17-21]及有限差分格式来离散 Rosenau-Kawahara 方程,并且进行了稳定性分析,给出了该差分格式的稳定性条件。数值实验表明了该方法的有效性和守恒性,且它的计算精度高于文献[5,10]的数值方法。

## 1　Sinc 函数定义

Sinc 函数的形式为[13]:$\mathrm{Sinc}(z)=\begin{cases}1, z=0\\ \sin(\pi z)/\pi z, z\neq 0\end{cases}$,其中 $z\in\mathbf{C}$。对于步长 $h$ 和整数 $l$,Sinc 函数的第 $l$ 次平移和伸展定义为:$S(l,h)(x)=\sin(\pi(x-lh)/h)/[\pi(x-lh)/h]$。对于在整个实轴上的函数 $u(x)$,它的 Whittaker 级数展开式定义为:$u(x)=\sum_{l=-\infty}^{\infty}u(lh)S(l,h)(x)$。

**定理 1**[21]　设 $D_s$ 表示为宽度为 $2d$ 的无限带区域,$d>0$,即:$D_s=\{z\in\mathbf{C}: z=x+\mathrm{i}y, |y|<d\}$。设 $B(D_s)$ 是在区域 $D_s$ 上可析的函数的集合,则有:$\int_{-d}^{d}|f(t+\mathrm{i}y)|\mathrm{d}y\rightarrow 0, t\rightarrow\pm\infty$,同时有 $N(f,D_s)=\int_{\partial D_s}|f(z)|\mathrm{d}z<$

* **收稿日期**:2021-10-05　**修回日期**:2022-12-19　**网络出版时间**:2023-04-21T08:41
**资助项目**:国家自然科学基金(No. 11502141)
**第一作者简介**:邓文超,女,研究方向为偏微分方程数值解法,E-mail:dengwenchao_530@163.com;**通信作者**:吴蓓蓓,女,副教授,博士,E-mail: beibei.wu@shiep.edu.cn
**网络出版地址**:https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.n.20230420.1423.024.html

$\infty$，其中$\partial D_s$ 表示 $D_s$ 的边界。

Sinc 配点法需要 Sinc 函数在各节点处的导数，由文献[16]可得它的零阶导数、一阶导数、三阶导数、四阶导数及五阶导数：

$$S_{lj}^{(0)}=[S(l,h)(x)]|_{x_j}=\begin{cases}1, l=j,\\0, l\neq j。\end{cases} \tag{1}$$

$$S_{lj}^{(1)}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[S(l,h)(x)]|_{x_j}=\begin{cases}0, l=j,\\ \dfrac{(-1)^{j-l}}{h(j-l)}, l\neq j。\end{cases} \tag{2}$$

$$S_{lj}^{(3)}=\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3}[S(l,h)(x)]|_{x_j}=\begin{cases}0, l=j,\\ \dfrac{(-1)^{j-l}}{h^3(j-l)^3}[6-\pi^2(j-l)^2], l\neq j。\end{cases} \tag{3}$$

$$S_{lj}^{(4)}=\frac{\mathrm{d}^4}{\mathrm{d}x^4}[S(l,h)(x)]|_{x_j}=\begin{cases}\dfrac{\pi^4}{5h^4}, l=j,\\ \dfrac{-4(-1)^{j-l}}{h^4(j-l)^4}[6-\pi^2(j-l)^2], l\neq j。\end{cases} \tag{4}$$

$$S_{lj}^{(5)}=\frac{\mathrm{d}^5}{\mathrm{d}x^5}[S(l,h)(x)]|_{x_j}=\begin{cases}0, l=j,\\ \dfrac{(-1)^{j-l}}{h^5(j-l)^5}[120-20\pi^2(j-l)^2+\pi^2(j-l)^4], l\neq j。\end{cases} \tag{5}$$

## 2 Sinc 配点法

考虑下列定义在区域$[a,b]\times[0,T]$上的 Rosenau-Kawahara 方程[3]：

$$U_t+U_{xxx}+U_{xxxxt}+U_x+UU_x-U_{xxxxx}=0, \tag{6}$$

初始值条件为:$U(x,0)=U_0(x)$, $x\in[a,b]$。边界条件为：

$$\begin{cases}U(a,t)=U(b,t)=0\\ U_x(a,t)=U_x(b,t)=0 \quad ,t\in[0,T]。\\ U_{xx}(a,t)=U_{xx}(b,t)=0\end{cases} \tag{7}$$

利用 Sinc 配点法将方程(6)在$(x_j,t_k)$处的逼近解表示为：$u(x_j,t_k)=u_j^k=\sum\limits_{l=1}^{N}C_l^kS_l(x_j)$，其中 $C_l^k=C_l(t_k)$ 是一个与时间 $t_k$ 有关的未知量，且 $S_l(x_j)=\mathrm{Sinc}\left(\dfrac{x_j-(l-1)h-a}{h}\right)$。

在点$(x_j,t_k)$处取关于时间变量的一阶向前差分，并引入参数 $\theta(0\leqslant\theta\leqslant1)$，式(6)中偏微分方程可以离散化为：

$$\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}+\frac{(u_{xxxx})_j^{k+1}-(u_{xxxx})_j^k}{\tau}+\theta((u_x)_j^{k+1}+u_j^{k+1}(u_x)_j^{k+1}+(u_{xxx})_j^{k+1}-(u_{xxxxx})_j^{k+1})+$$
$$(1-\theta)((u_x)_j^k+u_j^k(u_x)_j^k+(u_x)_j^k+(u_{xxx})_j^k-(u_{xxxxx})_j^k)=0。 \tag{8}$$

当 $\theta=0$ 时，式(8)为差分显式格式；当 $\theta=1/2$ 时，式(8)为 Crank-Nicholson 格式；当 $\theta=1$ 时，式(8)为隐式欧拉格式。

式(8)中的非线性项 $u_j^{k+1}(u_x)_j^{k+1}$，可以按照文献[21]的处理方法，利用泰勒公式展开：

$$u_j^{k+1}=u_j^k+\tau(u_t)_j^k+o(\tau^2),(u_x)_j^{k+1}=(u_x)_j^k+\tau(u_{xt})_j^k+o(\tau^2)。$$

可得：

$$u_j^{k+1}(u_x)_j^{k+1}=[u_j^k+\tau(u_t)_j^k+o(\tau^2)][(u_x)_j^k+\tau(u_{xt})_j^k+o(\tau^2)]=$$
$$u_j^k(u_x)_j^k+\tau(u_x)_j^k\left(\frac{u_j^{k+1}-u_j^k}{\tau}\right)+\tau u_j^k\left(\frac{(u_x)_j^{k+1}-(u_x)_j^k}{\tau}\right)+o(\tau^2)\approx$$
$$u_j^{k+1}(u_x)_j^k+u_j^k(u_x)_j^{k+1}-u_j^k(u_x)_j^k。 \tag{9}$$

将式(9)中 $u_j^{k+1}(u_x)_j^{k+1}$ 的近似式代入式(8)，得方程(6)的离散格式为：

$$u_j^{k+1}+(u_{xxxx})_j^{k+1}+\theta\tau((u_x)_j^{k+1}+u_j^{k+1}(u_x)_j^k+u_j^k(u_x)_j^{k+1}+(u_{xxx})_j^{k+1}-(u_{xxxxx})_j^{k+1})=$$
$$u_j^k+(u_{xxxx})_j^k-(1-\theta)\tau((u_x)_j^k+(u_{xxx})_j^k-(u_{xxxxx})_j^k)+(2\theta-1)\tau u_j^k(u_x)_j^k。\tag{10}$$

再将式(1)～(5)代入式(10)中,于是有:

$$\sum_{l=1}^{N}C_l^{k+1}S_l(x_j)+\sum_{l=1}^{N}C_l^{k+1}S_l^{(4)}(x_j)+\tau\theta\Big(\sum_{l=1}^{N}C_l^{k+1}S_l'(x_j)+\sum_{l=1}^{N}C_l^{k+1}S_l^{(3)}(x_j)-\sum_{l=1}^{N}C_l^{k+1}S_l^{(5)}(x_j)+$$
$$\Big(\sum_{l=1}^{N}C_l^{k+1}S_l(x_j)\Big)\Big(\sum_{r=1}^{N}C_r^kS_r'(x_j)\Big)+\Big(\sum_{l=1}^{N}C_l^{k+1}S_l'(x_j)\Big)\Big(\sum_{r=1}^{N}C_r^kS_r(x_j)\Big)\Big)=$$
$$\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l(x_j)+\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l^{(4)}(x_j)-\tau(1-\theta)\Big(\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l'(x_j)+\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l^{(3)}(x_j)-\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l^{(5)}(x_j)\Big)+$$
$$\tau(2\theta-1)\Big(\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l'(x_j)\Big)\Big(\sum_{r=1}^{N}C_r^kS_r(x_j)\Big),j=3,\cdots,N-2。$$

由边界条件(7)可得:$\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l(a)=0,\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l(b)=0,\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l'(a)=0,\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l'(b)=0$。于是对应的矩阵形式为:$\boldsymbol{AC}^{k+1}=\boldsymbol{BC}^k$。其中:

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{S}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{(4)}+\theta\tau(\boldsymbol{N}_1^k+\boldsymbol{N}_2^k+\boldsymbol{S}^{(1)}+\boldsymbol{S}^{(3)}-\boldsymbol{S}^{(5)})],$$
$$\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{S}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{(4)}+(2\theta-1)\tau\boldsymbol{N}_1^k-(1-\theta)\tau(\boldsymbol{S}^{(1)}+\boldsymbol{S}^{(3)}-\boldsymbol{S}^{(5)})],$$
$$\boldsymbol{C}^k=[C_1^k,C_2^k,\cdots,C_N^k]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{C}^{k+1}=[C_1^{k+1},C_2^{k+1},\cdots,C_N^{k+1}]^{\mathrm{T}},$$
$$\boldsymbol{S}^{(0)}=(S_{lj}^{(0)}),\ j=1,\cdots,N,\ l=1,\cdots,N,\ \boldsymbol{S}^{(1)}=(S_{lj}^{(1)}),\ j=1,\cdots,N,\ l=1,\cdots,N,$$
$$\boldsymbol{S}^{(3)}=(S_{lj}^{(3)}),\ j=1,\cdots,N,\ l=1,\cdots,N,\ \boldsymbol{S}^{(4)}=(S_{lj}^{(4)}),\ j=1,\cdots,N,\ l=1,\cdots,N,$$
$$\boldsymbol{S}^{(5)}=(S_{lj}^{(5)}),\ j=1,\cdots,N,\ l=1,\cdots,N,$$

$$\boldsymbol{N}_1^k=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\-\dfrac{C_2^k}{h}&\cdots&\cdots&\cdots&\dfrac{(-1)^{2-N}C_2^k}{h(2-N)}\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\\dfrac{(-1)^{N-2}C_{N-1}^k}{h(N-2)}&\cdots&\cdots&\cdots&\dfrac{C_{N-1}^k}{h}\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}_{N\times N},\boldsymbol{N}_2^k=\begin{bmatrix}0&\cdots&\cdots&\cdots&0\\\vdots&\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l^{(1)}(x_2)&&&\vdots\\\vdots&&\vdots&&\vdots\\\vdots&&&\sum_{l=1}^{N}C_l^kS_l^{(1)}(x_{N-1})&\vdots\\0&\cdots&\cdots&\cdots&0\end{bmatrix}_{N\times N}。$$

## 3　稳定性分析

现在分析 Rosenau-Kawahara 方程(6)的稳定性。参照文献[14,21]的方法,可以得到下列误差公式:

$$[\boldsymbol{S}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{(4)}+\theta\tau(\boldsymbol{N}_1^k+\boldsymbol{N}_2^k+\boldsymbol{S}^{(1)}+\boldsymbol{S}^{(3)}-\boldsymbol{S}^{(5)})]\boldsymbol{e}^{k+1}=$$
$$[\boldsymbol{S}^{(0)}+\boldsymbol{S}^{(4)}+(2\theta-1)\tau\boldsymbol{N}_1^k-(1-\theta)\tau(\boldsymbol{S}^{(1)}+\boldsymbol{S}^{(3)}-\boldsymbol{S}^{(5)})]\boldsymbol{e}^k。$$

式中:$\boldsymbol{e}^k=\boldsymbol{C}_{\mathrm{exact}}^k-\boldsymbol{C}_{\mathrm{approx}}^k,\boldsymbol{e}^{k+1}=\boldsymbol{Ce}^k,\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$。

要保证上面格式的稳定性,需满足条件 $\rho(\boldsymbol{C})\leqslant 1$,这里 $\rho(\boldsymbol{C})$ 表示 $\boldsymbol{C}$ 的谱半径,即:

$$\left|\frac{\lambda+(2\theta-1)\lambda_{N1}-(1-\theta)\lambda_2}{\lambda+\theta(\lambda_2+\lambda_{N1}+\lambda_{N2})}\right|\leqslant 1。\tag{11}$$

式中:$\boldsymbol{S}^{(0)}$ 是单位矩阵,所以它的特征值 $\lambda_0=1$;$\boldsymbol{S}^{(1)}$、$\boldsymbol{S}^{(3)}$ 和 $\boldsymbol{S}^{(5)}$ 是反对称矩阵,具有纯虚数特征值分别为 $\lambda_1$、$\lambda_3$ 和 $\lambda_5$;$\boldsymbol{S}^{(4)}$ 是实对称矩阵,具有纯实数特征值,它的特征值为 $\lambda_4$;$\boldsymbol{N}_1^k$ 特征值为 $\lambda_{N1}$,$\boldsymbol{N}_2^k$ 特征值为 $\lambda_{N2}$,且

$$\lambda=\lambda_4+\lambda_0,\lambda_2=\tau|\lambda_1|+\tau|\lambda_3|-\tau|\lambda_5|,\lambda_{N1}^R=\tau\mathrm{Re}(\lambda_{N1}),$$
$$\lambda_{N1}^I=\tau\mathrm{Im}(\lambda_{N1}),\lambda_{N2}^R=\tau\mathrm{Re}(\lambda_{N2}),\lambda_{N2}^I=\tau\mathrm{Im}(\lambda_{N2})。\tag{12}$$

由式(11)、(12)可得:$\left|\dfrac{\lambda+(2\theta-1)\lambda_{N1}^R+i((2\theta-1)\lambda_{N1}^I-(1-\theta)\lambda_2)}{\lambda+\theta(\lambda_{N1}^R+\lambda_{N2}^R)+i(\theta(\lambda_{N1}^I+\lambda_{N2}^I+\lambda_2))}\right|\leqslant 1$,即:

$$[\lambda+(2\theta-1)\lambda_{N1}^R]^2+[(2\theta-1)\lambda_{N1}^I-(1-\theta)\lambda_2]^2\leqslant[\lambda+\theta(\lambda_{N1}^R+\lambda_{N2}^R)]^2+[\theta(\lambda_{N1}^I+\lambda_{N2}^I+\lambda_2)]^2。$$

整理后有:

$$(2\theta-2)\lambda\lambda_{N1}^{R}+2(\theta^2-3\theta+1)\lambda_2\lambda_{N1}^{I}-2\theta^2\lambda_{N1}^{R}\lambda_{N2}^{R}-2\theta\lambda\lambda_{N2}^{R}-2\theta^2\lambda_{N1}^{I}\lambda_{N2}^{I}-2\theta^2\lambda_2\lambda_{N2}^{I}\leqslant (-3\theta^2+4\theta-1)((\lambda_{N1}^{R})^2+(\lambda_{N1}^{I})^2)+(2\theta-1)\lambda_2^2+\theta^2((\lambda_{N2}^{R})^2+(\lambda_{N2}^{I})^2)。\quad(13)$$

式(13)必须满足对各个矩阵的所有特征值都成立,方程才会达到稳定条件。由此可知,当 $1/2\leqslant\theta\leqslant1$ 时式(13)成立。从图1可见 $\rho(\boldsymbol{C})\leqslant1$ 在 $1/2\leqslant\theta\leqslant1$ 时显然成立,故该方法的稳定性条件为 $1/2\leqslant\theta\leqslant1$。

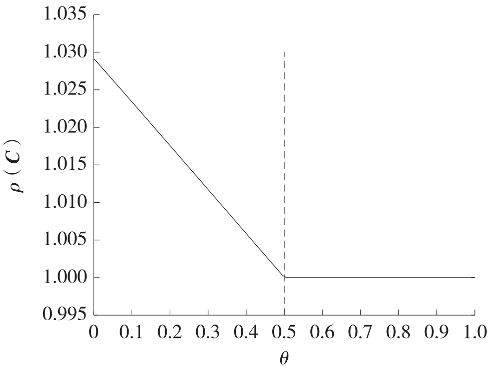


**图1 收敛性与 $\theta$ 值相关性的数值证明**

**Fig. 1 Numerical demonstration of convergence dependence on $\theta$ value**

## 4 数值实验

考虑下列方程的初边值问题[5]:

$$\begin{cases}U_t+U_{xxxxt}+U_x+U_{xxx}+U_{xxxxx}+UU_x=0,\\ U(a,t)=U(b,t)=0,\\ U_x(a,t)=U_x(b,t)=0,\\ U_{xx}(a,t)=U_{xx}(b,t)=0,\\ U_0(x,0)=\left(-\dfrac{35}{12}+\dfrac{35}{156}\sqrt{205}\right)\mathrm{sech}^4\left(\dfrac{\sqrt{-13+\sqrt{205}}}{2}x\right),\\ -40\leqslant x\leqslant100,T=10,40。\end{cases}$$

该方程的精确解为:$U(x,t)=\left(-\dfrac{35}{12}+\dfrac{35}{156}\sqrt{205}\right)\mathrm{sech}^4\left(\dfrac{\sqrt{-13+\sqrt{205}}}{2}\left(x-\dfrac{1}{13}\sqrt{205}\,t\right)\right)$。

在数值实验中绝对误差的计算公式为[10]:

$$L_\infty=\|U-u\|_\infty\cong\max_{1\leqslant j\leqslant N}|U_j-u_j|,L_2=\|U-u\|\cong\sqrt{h\sum_{j=1}^{N}|U_j-u_j|}。$$

由文献[7]知,方程的离散能量计算公式为:

$$Q^n=\int_a^b U(x,t)\mathrm{d}x\approx h\sum_{j=1}^{N}U_j^k,E^n=\int_a^b U(x,t)+U_{xx}^2(x,t)\mathrm{d}x\approx h\sum_{j=1}^{N}((U_j^k)^2+[(U_j^k)_{xx}]^2)。$$

将本文的Sinc配点法($\theta=0.5$)与文献[5]中非线性Crank-Nicolson保守差分格式(NCNCDS)[5]和线性保守差分格式(ALCDS)[5]以及文献[10]中的五次B样条方法(QBS)的绝对误差进行比较,从表1中可以看出本文的数值结果好于其他几种方法。

表2给出了当 $\theta=0.5$ 时,在不同时间和空间的离散能量,可见本文提出的方法较好地拟合了原方程的守恒性,适合长时间的运算。

## 5 结束语

本文采用Sinc配点法求解Rosenau-Kawahara方程。数值实验表明:Sinc配点法对求解Rosenau-Kawahara方程是有效的。另外,通过调整参数 $\theta$ 值,可以提高数值解的精确度。对于相同的网格剖分,Sinc配点法计算的绝对误差小于文献[5,10]中的方法,具有较高的精确度。随着时间和空间节点的逐渐增加,守恒性变强。

表 1　当 $T=40,\theta=0.5,\tau=h$ 时数值解的误差

Tab. 1　The errors of numerical solutions for $T=40,\theta=0.5,\tau=h$

| | $t$ | NCNCDS[5] | ALCDS[5] | QBS[10] | Sinc 配点法 |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $L_\infty$ | $L_\infty$ | $L_\infty$ | $L_\infty$ |
| $h=\tau=0.1$ | 10 | 7.52E−05 | 1.48E−04 | 3.03E−05 | 2.70E−05 |
| | 20 | 1.42E−04 | 2.82E−04 | 5.67E−05 | 5.27E−05 |
| | 30 | 2.00E−04 | 3.99E−04 | 7.91E−05 | 7.35E−05 |
| | 40 | 2.50E−04 | 5.01E−04 | 9.98E−05 | 9.65E−05 |
| $h=\tau=0.05$ | 10 | 1.88E−05 | 3.70E−05 | 7.84E−06 | 6.74E−06 |
| | 20 | 3.55E−05 | 7.06E−05 | 1.47E−05 | 1.31E−05 |
| | 30 | 4.99E−05 | 9.98E−05 | 2.04E−05 | 1.83E−05 |
| | 40 | 6.26E−05 | 1.26E−04 | 2.58E−05 | 2.37E−05 |
| $h=\tau=0.025$ | 10 | 4.70E−06 | 9.26E−06 | 2.22E−06 | 1.69E−06 |
| | 20 | 8.89E−06 | 1.77E−05 | 4.18E−06 | 3.28E−06 |
| | 30 | 1.25E−05 | 2.50E−05 | 5.71E−06 | 4.50E−06 |
| | 40 | 1.57E−05 | 3.14E−05 | 7.43E−06 | 5.90E−06 |

表 2　当 $\theta=0.5$ 时不同时刻下离散能量

Tab. 2　The discrete energy at different time for $\theta=0.5$

| $t$ | $h=\tau=0.1$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| | $E^n$ | $\lvert E^0-E^n \rvert$ | $Q^n$ | $\lvert Q^0-Q^n \rvert$ |
| 0 | 0.836 189 53 | 0 | 4.120 893 69 | 0 |
| 10 | 0.836 189 54 | 1.253 37E−09 | 4.120 894 14 | 4.498 53E−07 |
| 20 | 0.836 189 54 | 1.704 64E−09 | 4.120 894 41 | 2.758 44E−07 |
| 30 | 0.836 189 54 | 5.930 41E−10 | 4.120 895 14 | 7.282 77E−07 |
| 40 | 0.836 189 54 | 1.847 66E−10 | 4.120 894 55 | 5.881 49E−07 |

## 参考文献：


[1] ROSENAU P. A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line[J]. Physica Scripta，1986，34(6B)：827-829.

[2] 王婷婷，胡劲松. Rosenau-KdV 方程的一个线性守恒加权差分逼近[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2016，33(4)：94-99.
WANG T T，HU J S. A weighted linear conservative difference approximation for Rosenau-KdV equation[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)，2016，33(4)：94-99.

[3] ZUO J M. Solitons and periodic solutions for the Rosenau-KdV and Rosenau-Kawahara equations[J]. Applied Mathematics & Computation，2009，215(2)：835-840.

[4] BISWAS A，TRIKI H，LABIDI M. Bright and dark solitons of the Rosenau-Kawahara equation with power law nonlinearity [J]. Physics of Wave Phenomena，2011，19(1)：24-29.

[5] HU J，XU Y，BING H. Two conservative difference schemes for Rosenau-Kawahara equation[J]. Advances in Mathematical Physics，2014，2014：1-11.

[6] MAHDAVI E. Exp-function method for finding some exact solutions of Rosenau Kawahara and Rosenau Korteweg-de Vries equations[J]. International Journal of Mathematical and Computational Sciences，2014，8(6)：990-996.

[7] HE D. New solitary solutions and a conservative numerical method for the Rosenau-Kawahara equation with power law nonlinearity[J]. Nonlinear Dynamics，2015，82(3)：1177-1190.

[8] MANOROT P，CHAROENSAWAN P，DANGSKUL S. Numerical solutions to the Rosenau-Kawahara equation for shallow water waves via pseudo-compact methods[J]. Thai Journal of Mathematics，2019，17(2)：571-595.

[9] GHILOUFI A，RAHMENI M，OMRANI K. Convergence of two conservative high-order accurate difference schemes for the

generalized Rosenau-Kawahara-RLW equation[J]. Engineering with Computers, 2020, 36(2): 617-632.

[10] ÖZER S. Numerical solution by quintic B-spline collocation finite element method of generalized Rosenau-Kawahara equation [J]. Mathematical Sciences, 2022, 16: 213-224.

[11] CHEN T, XIANG K, CHEN P. A new linear difference scheme for generalized Rosenau-Kawahara equation[J]. Mathematical Problems in Engineering, 2018, 2018: 1-8.

[12] LUND J, BOWERS K L. Sinc methods for quadrature and differential equations[M]. Philadelphia: SIAM, 1992.

[13] MOKHTARI R, MOHAMMADI M. Numerical solution of GRLW equation using Sinc-collocation method[J]. Computer Physics Communications, 2010, 181(7): 1266-1274.

[14] KONG D, XU Y, ZHENG Z. A hybrid numerical method for the KdV equation by finite difference and Sinc collocation method [J]. Applied Mathematics and Computation, 2019, 355: 61-72.

[15] 杨梅,赵凤群,郭冲. 基于 Hopf-Cole 变换的 Burgers 方程初边值问题的 Sinc-Galerkin 法[J]. 计算力学学报, 2019, 36(6): 807-812.

YANG M, ZHAO F Q, GUO C. The Sinc-Galerkin methods of the Burgers' equation based on the Hopf-Cole transformatio [J]. Chinese Journal of Computatioal Mechanics, 2019, 36(6): 807-812.

[16] 吴钦宽. 一类非线性方程激波解的 Sinc-Galerkin 方法[J]. 物理学报, 2006, 55(4): 1561-1564.

WU Q K. Shock solutions for a class of nonlinear equations by the sinc-Galerkin method[J]. Acta Physica Sinica, 2006, 55(4): 1561-1564.

[17] REVELLI R, RIDOLFI L. Sinc collocation-interpolation method for the simulation of nonlinear waves[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2003, 46(8/9): 1443-1453.

[18] RASHIDINIA J, BARATI A. Numerical solutions of one-dimensional non-linear parabolic equations using Sinc collocation method[J]. Ain Shams Engineering Journal, 2015, 6(1): 381-389.

[19] QIU W, XU D, GUO J. Numerical solution of the fourth-order partial integro-differential equation with multi-term kernels by the Sinc-collocation method based on the double exponential transformation[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 392: 125693.

[20] NOEIAGHDAM S, ARAGHI M, ABBASBANDY S. Valid implementation of Sinc-collocation method to solve the fuzzy Fredholm integral equation[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2019, 370: 112632.

[21] AL-KHALED K, HAYNES N, SCHIESSER W. Eventual periodicity of the forced oscillations for a Korteweg-de Vries type equation on a bounded domain using a Sinc collocation method[J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2018, 330: 417-28.

## Solving the Rosenau-Kawahara Equation with Sinc Collocation Method

DENG Wenchao, WU Beibei, XU Li

(School of Mathematics and Physics, Shanghai University of Electric Power, Shanghai 200090, China)

**Abstract**: [**Purposes**]The initial-boundary value problem of Rosenau-Kawahara equation is numerically studied. The Sinc collocation method for solving Rosenau-Kawahara equation is proposed. [**Methods**]The equation is fully-discretized by using Sinc collocation method for spatial discretization and the forward finite difference for time discretization. A hybrid difference scheme is obtained by means of parameter $\theta$. [**Findings**]The stability of difference scheme is analyzed and the stability condition is given. [**Conclusions**]A numerical experiment is performed to illustrate the validity of the constructed method. The numerical results of the Crank-Nicholson scheme are better than those of the conservative finite difference schemes and the quintic B-spline collocation finite element method.

**Keywords**: Rosenau-Kawahara equation; Sinc collocation method; finite difference; stability

(责任编辑 许 甲)