

模系矩阵分裂迭代法定价机制转换下的 美式 Kou 型跳扩散期权*

李永杰, 刘雯娜, 刘健, 黄勤友, 甘小艇
(楚雄师范学院 数学与计算机科学学院, 云南 楚雄 675000)

摘要:【目的】研究机制转换下的美式 Kou 型跳扩散期权模型的数值解法。【方法】基于 Crank-Nicolson 拟合有限体积法离散得到的线性互补问题, 引入高效的模系矩阵分裂迭代法进行求解。【结果】给出了 H_+ 离散矩阵下算法的收敛性定理。【结论】数值实验验证了新方法的有效性、稳健性和收敛性, 且模系矩阵分裂迭代法的计算效率优于投影超松弛迭代法。
关键词: 机制转换下的美式 Kou 型跳扩散期权; 线性互补问题; 模系矩阵分裂迭代法
中图分类号: O241.82 **文献标志码:** A **文章编号:** 1672-6693(2023)02-0119-07

期权作为一种有效规避风险的金融衍生品, 在现今金融市场风险管理中起到了十分重要的作用。值得注意的是, 由于机制转换下期权定价模型充分考虑了金融市场可能会随着时间的变化而在不同的机制间转换, 例如由政治或经济的短期不确定性所引起的特定周期或循环模式等情况, 因而该模型正越来越受到众多投资者和研究者们的广泛关注和研究^[1]。与标准的期权模型定价不同, 此类型美式期权定价问题通常可表示为一组耦合的偏微分(或偏积分-微分)互补问题^[2-3], 这使得针对它的数值求解极具挑战性。近些年来, 人们在此课题上开展了深入地探索和研究, 主要采用的数值求解方法有径向基配置方法、前固定有限元法、隐显(implicit-explicit, IMEX)预测校正方法、隐显两步后向微分公式(implicit-explicit two-step backward differentiation formula, IMEX-BDF2)、拟合有限体积法等^[4-10]。基于流行的拟合有限体积法离散, 本文主要考虑采用一类已被广泛应用于求解线性互补问题高效的数值方法定价机制转换下的美式 Kou 型跳扩散期权模型。

一般地, 数值方法定价美式期权的核心任务主要有两个, 一是针对美式期权定价模型中的方程进行离散, 二是针对离散得到的线性互补问题进行快速求解。常见的数值离散方法有: 有限差分方法、有限元方法和拟合有限体积法等, 本文主要选取拟合有限体积法作为定价方程的离散方法。另一方面, 值得注意的是, 模系矩阵分裂迭代法是近些年来快速发展起来的用于求解线性互补问题的一种非常高效的数值方法。众所周知, 将线性互补问题转化成隐式不动点方程, Murty^[11]最早提出了模迭代方法。Hadjidimos^[12]和 Dong^[13]通过引入不同的参数, 分别提出了非定常外推模迭代算法和改进的模迭代方法。Bai^[14]则基于矩阵分裂思想, 提出了模系矩阵分裂迭代法, 此方法不仅包含模方法和改进的模方法, 而且利用适当的矩阵分裂还可得到一系列新的迭代方法。文献[14]中大量的数值实验表明, 基于模的逐次超松弛迭代法(modulus-based successive overrelaxation iteration method, MSOR)和基于模的加速超松弛迭代法(modulus-based accelerated overrelaxation iteration method, MAOR)的计算效率均比经典的投影超松弛迭代法(classical projected successive overrelaxation method, PSOR)要高。此后, 许多研究者对此作了大量的推广、改进和应用, 例如基于模的同步多分裂迭代方法、基于两步模的矩阵分裂迭代方法、改进的分块模方法, 等等^[15-19]。

考虑机制转换下美式 Kou 型跳扩散期权模型的数值求解, 本文基于 Crank-Nicolson 拟合有限体积法离散, 引入高效的模系矩阵分裂迭代法求解离散得到的一系列时间层上的线性互补问题, 并建立相应的收敛性定理。

* 收稿日期: 2021-11-18 修回日期: 2022-12-04 网络出版时间: 2023-04-20T15:24
资助项目: 国家自然科学基金面上项目(No. 61463002); 中央高校基本科研业务费专项资金项目(No. 22120210555); 云南省地方本科高校联合专项面上项目(No. 2019FH001-079); 云南省大学生创新训练项目(No. 202111391079)
第一作者简介: 李永杰, 女, 研究方向为计算金融, E-mail: 2320474737@qq.com; 通信作者: 甘小艇, 男, 副教授, 博士, E-mail: 9xtgan@alumni.tongji.edu.cn
网络出版地址: <https://kns.cnki.net/kcms/detail/50.1165.N.20230420.1258.008.html>

数值实验以 5 机制转换下的美式 Kou 型跳扩散期权模型为例,验证了新方法的收敛性、稳健性和高效性。

1 机制转换下美式 Kou 型跳扩散期权模型及线性互补问题

本文主要考虑机制转换下美式跳扩散期权的定价问题。假设 α_t 是定义在概率空间 (Ω, F, P) , 且在有限机制空间 $\varepsilon = \{e_1, e_2, \dots, e_j\}$ 中取值的连续时间马尔可夫链过程, 其中 $e_i = (e_q^i)$ 为 J 维向量 (J 为正整数), 且元素取值为: $e_q^i = \begin{cases} 1, & \text{当 } q=i \\ 0, & \text{当 } q \neq i \end{cases}$ 。若假设矩阵 $G = (g_{ij})_{J \times J}$ 为 α_t 的生成器, 则矩阵 G 中的元素 g_{ij} 满足: i) $g_{ij} \geq 0, i \neq j$; ii) $g_{ii} \leq 0$, 且 $g_{ii} = -\sum_{j \neq i} g_{ij}$ 对所有的 i 。

由文献[7]可知, 在风险中性测度下, 机制转换下跳扩散期权的标的资产价格 S_t 服从随机过程: $dS_t/S_{t-} = (r_t - d_t - \lambda_t \kappa_t) dt + \sigma_t dW_t + \eta_t dN_t$, 式中: W_t 是一个 Wiener 过程; $N_t = \langle M_t, \alpha_t \rangle$ 是一个强度为 $\lambda_t = \langle \lambda, \alpha_t \rangle$ 的 Poisson 过程, $M_t = [N_t^1, N_t^2, \dots, N_t^J]^T$, $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_J]^T$; 随机变量 $\eta_t = \langle \eta, \alpha_t \rangle$, $\eta = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_J]^T$; 无风险利率 $r_t = \langle r, \alpha_t \rangle$, $r = [r_1, r_2, \dots, r_J]^T$, $r_i > 0$; 波动率 $\sigma_t = \langle \sigma, \alpha_t \rangle$, $\sigma = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_J]^T$; 持续的股息收益率 $d_t = \langle d, \alpha_t \rangle$, $d = [d_1, d_2, \dots, d_J]^T$; $\kappa_t = \langle \kappa, \alpha_t \rangle$, $\kappa = [\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_J]^T$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 J 维向量空间 \mathbf{R}^J 上的内积。

假设 $V_i(S, t)$ 是第 i ($i=1, 2, \dots, J$) 个机制下美式跳扩散期权的价值, 执行价格为 K , 到期日为 T 。通过引入时间变换 $\tau = T - t$, 则相应的美式 Kou 型期权定价问题可表述为如下的抛物型偏积分-微分互补问题^[7]:

对 $i=1, 2, \dots, J$, 有:

$$\begin{cases} L_i \mathbf{V}(S, \tau) \geq 0, \\ \mathbf{V}(S, \tau) - \mathbf{V}^*(S) \geq 0, \\ L_i \mathbf{V}(S, \tau) \cdot (\mathbf{V}(S, \tau) - \mathbf{V}^*(S)) = 0. \end{cases} \quad (1)$$

式中: $(S, \tau) \in (0, +\infty) \times [0, T]$, $\mathbf{V}(S, \tau) = [V_1(S, \tau), V_2(S, \tau), \dots, V_J(S, \tau)]^T$, $\mathbf{V}^*(S)$ 为期权的收益函数, 且有:

$$L_i \mathbf{V}(S, \tau) = \frac{\partial V_i}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma_i^2 S^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} - (r_i - d_i - \lambda_i \kappa_i) S \frac{\partial V_i}{\partial S} + (r_i + \lambda_i - \alpha_{ii}) V_i - \sum_{l \neq i} \alpha_{il} V_l - \lambda_i \int_0^\infty V_i(S y_i, \tau) g(y_i) dy, \quad (2)$$

$$\text{式中: } g(y_i) = \begin{cases} q_i v_{2,i} y_i^{v_{2,i}-1}, & y_i < 1 \\ p_i v_{1,i} y_i^{-v_{1,i}-1}, & y_i \geq 1 \end{cases}, \kappa_i = \frac{p_i v_{1,i}}{v_{1,i}-1} + \frac{q_i v_{2,i}}{v_{2,i}+1} - 1, \text{ 且 } p_i, q_i, v_{1,i} > 1, v_{2,i} \text{ 为正常数, } p_i + q_i = 1.$$

考察美式看跌期权, 初始条件为:

$$V_i(S, 0) = \max\{K - S, 0\}, \quad (3)$$

边界条件为:

$$V_i(0, \tau) = K, \lim_{S \rightarrow \infty} V_i(S, \tau) = 0. \quad (4)$$

为简单起见, 本文主要考虑 Kou 型跳扩散期权的定价, 且主要以两机制转换 (即 $J=2$) 为例, 与当 $J \geq 3$ 时的情形以及考虑 Merton 型跳扩散期权时的处理相类似, 则由互补问题(1)可知, 两机制转换下的美式跳扩散期权定价问题可表示为: 对 $i=1, 2$, 有:

$$\begin{cases} L_i \mathbf{V}(S, \tau) \geq 0, \\ \mathbf{V}(S, \tau) - \mathbf{V}^*(S) \geq 0, \\ L_i \mathbf{V}(S, \tau) \cdot (\mathbf{V}(S, \tau) - \mathbf{V}^*(S)) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

式中: $(S, \tau) \in (0, +\infty) \times [0, T]$, $\mathbf{V}(S, \tau) = [V_1(S, \tau), V_2(S, \tau)]^T$, 且有:

$$L_1 \mathbf{V}(S, \tau) = \frac{\partial V_1}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma_1^2 S^2 \frac{\partial^2 V_1}{\partial S^2} - (r_1 - d_1 - \lambda_1 \kappa_1) S \frac{\partial V_1}{\partial S} + (r_1 + \lambda_1 - \alpha_{11}) V_1 - \alpha_{12} V_2 - \lambda_1 \int_0^\infty V_1(S y_1, \tau) g(y_1) dy, \quad (6)$$

$$L_2 \mathbf{V}(S, \tau) = \frac{\partial V_2}{\partial \tau} - \frac{1}{2} \sigma_2^2 S^2 \frac{\partial^2 V_2}{\partial S^2} - (r_2 - d_2 - \lambda_2 \kappa_2) S \frac{\partial V_2}{\partial S} +$$

$$(r_2 + \lambda_2 - \alpha_{22})V_2 - \alpha_{22}V_1 - \lambda_2 \int_0^\infty V_2(Sy_2, \tau)g(y_2)dy, \tag{7}$$

且初始条件和边界条件分别为式(3)、(4)。

为了数值求解期权定价问题(5)~(7),须将标的资产 S 限制在有限区域 $I=[0, X]$ 上,其中 X 的选取要足够大。同时,边界条件(4)变为:

$$V_i(0, \tau) = K, V_i(X, \tau) = 0, i = 1, 2. \tag{8}$$

接下来采用文献[9]中的 Crank-Nicolson 拟合有限体积法离散两机制转换下的美式 Kou 型跳扩散期权定价问题(5)~(8),则可得如下一系列时间层上的线性互补问题:

$$\begin{cases} \mathbf{A}\mathbf{V}^{(j)} \geq \mathbf{B}\mathbf{V}^{(j-1)} + \Delta\tau\mathbf{F}, \\ \mathbf{V}^{(j)} \geq \mathbf{V}^*, \\ (\mathbf{A}\mathbf{V}^{(j)} - \mathbf{B}\mathbf{V}^{(j-1)} - \Delta\tau\mathbf{F})^T(\mathbf{V}^{(j)} - \mathbf{V}^*) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

式中: $j = 1, \dots, N, \Delta\tau = T/N, \mathbf{V}^{(j)} = [V_1^{(j)}, V_2^{(j)}]^T, \mathbf{V}^* = [V_1^*, V_2^*]^T, \mathbf{V}^0 = \mathbf{V}^*, \mathbf{F} = [F_1, F_2]^T$, 且 $\mathbf{A} = \mathbf{I} - \frac{\Delta\tau}{2}\mathbf{C}$,

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} + \frac{\Delta\tau}{2}\mathbf{C}, \mathbf{C} = \mathbf{M} - \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{M}_1 & -\alpha_{11}\mathbf{I} \\ -\alpha_{22}\mathbf{I} & \mathbf{M}_2 \end{pmatrix}_{(2M-2)^2} - \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{R}_2 \end{pmatrix}_{(2M-2)^2},$$

这里: \mathbf{M}_1 和 \mathbf{M}_2 为拟合有限体积离散矩阵, \mathbf{R}_1 和 \mathbf{R}_2 为积分离散矩阵, F_1 和 F_2 为经边界处理后的常数项, M 为空间网格剖分数, \mathbf{O} 为 $(M-1) \times (M-1)$ 全零矩阵, \mathbf{I} 为 $(M-1) \times (M-1)$ 单位阵, 矩阵中的元素可参见文献[9-10]。

特别地,在线性互补问题(9)中令: $\mathbf{z} := \mathbf{V}^{(j)} - \mathbf{V}^*$ 和 $\mathbf{q} := \mathbf{A}\mathbf{V}^* - \mathbf{B}\mathbf{V}^{(j-1)} - \Delta\tau\mathbf{F}$, 则可得标准的线性互补问题(简记为 $\text{LCP}(\mathbf{q}, \mathbf{A})$):

$$\begin{cases} \mathbf{w} := \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{q} \geq 0, \\ \mathbf{z} \geq 0, \\ \mathbf{z}^T \mathbf{w} = 0. \end{cases} \tag{10}$$

针对式(9)中的代数系统矩阵 \mathbf{A} , 由文献[9-10]易知有如下定理成立。

定理 1 线性互补问题(9)中的全离散矩阵 \mathbf{A} 为 H_+ -矩阵。

证明 由文献[9-10]可知,采用 Crank-Nicolson 拟合有限体积法离散期权定价问题(5)~(8)得到的全离散矩阵 \mathbf{A} 中元素具有负的非对角元,正的对角元且是严格对角占优的特点,因此由文献[1]可知,矩阵 \mathbf{A} 为 M -矩阵。又因为矩阵 \mathbf{A} 的比较矩阵 $\langle \mathbf{A} \rangle = \mathbf{A}$, 即 \mathbf{A} 的比较矩阵亦为 M -矩阵,且对角元为正,因此文献[14]可知 \mathbf{A} 是 H_+ -矩阵。证毕

2 模系矩阵分裂迭代法

本节针对线性互补问题(10)的数值求解,引入模系矩阵分裂迭代法的求解并建立收敛性定理。

令 $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U}$, 其中: \mathbf{D} 、 $-\mathbf{L}$ 、 $-\mathbf{U}$ 分别为 \mathbf{A} 的对角阵、严格下三角矩阵和严格上三角矩阵。接下来将给出求解线性互补问题常用的几个不同算法,分别是 MSOR、MAOR 和 PSOR 方法,相关数学推导和分析详见文献[14-16]。显然,由 MAOR 算法可知,该迭代方法在每一次迭代中只需求解一个线性方程组,而且通过恰当地选取松弛参数 α 和 β 可使收敛性大大改善。MAOR 方法另一优点是,既不像 PSOR 方法那样要求将迭代结果投影到空间 \mathbf{R}_+^n ,也不要要求矩阵 \mathbf{A} 的所有对角元素非零,这在实际应用中易于实现且非常高效。

由文献[14-16]易知,当 MSOR 和 MAOR 算法满足一定的参数条件假设时,则有如下的收敛性定理成立。

定理 2 令 \mathbf{A} 是 Crank-Nicolson 拟合有限体积法离散机制转换下的美式 Kou 型跳扩散期权定价问题(5)得到的代数系统矩阵。由定理 1 可知,矩阵 \mathbf{A} 为 H_+ -矩阵。则如前所令 $\mathbf{A} = \mathbf{D} - \mathbf{L} - \mathbf{U} := \mathbf{D} - \mathbf{Z}$, 当正对角矩阵 $\mathbf{\Omega}$ 满足 $\mathbf{\Omega} \geq \mathbf{D}$ 时,有如下结论成立:

i) 对于任意的初始向量 $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$, 当松弛因子 α 满足

$$0 < \alpha < \frac{1}{\rho(\mathbf{D}^{-1}|\mathbf{Z}|)} \tag{11}$$

时,MSOR 迭代法产生的迭代序列 $\{\mathbf{z}^m\}_{m=0}^\infty \subset \mathbf{R}_+^n$ 均收敛于 $\text{LCP}(\mathbf{q}, \mathbf{A})$ 式(10)的唯一解。

ii) 对于任意的初始向量 $\mathbf{x}^0 \in \mathbf{R}^n$, 当松弛因子 α, β 满足

$$0 < \beta \leq \alpha < \frac{1}{\rho(\mathbf{D}^{-1}|\mathbf{Z}|)} \tag{12}$$

时, MAOR 迭代法产生的迭代序列 $\{\mathbf{z}^m\}_{m=0}^{\infty} \subset \mathbf{R}_+^n$ 均收敛于 LCP(\mathbf{q}, \mathbf{A}) 式(10)的唯一解。

注 1 结论 i) 和 ii) 成立的前提条件是全离散矩阵 \mathbf{A} 的 H_+ -矩阵性质, 文中显然满足。具体收敛性证明可以参考文献[16]中定理 4.1 的证明。此外, 由定理 2 不难看出, MSOR 和 MAOR 算法的收敛条件(11)和(12)均为充分条件。

注 2 为了描述简便, 文中仅考虑了两机制转换下的期权定价问题, 当然文中数值方法同样适用于更多机制转换下的期权定价的求解, 但计算规模会随之增大, 下一章节的数值实验也验证了这一点。

3 数值实验

本节利用数值实验来验证模系矩阵分裂迭代法求解机制转换下的美式跳扩散期权的有效性。机制转换下美式跳扩散看跌期权的模型参数取为:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}, \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \\ 0.05 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{V}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{p} = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix},$$

其中: 期权的到期日 $T=0.25$, 敲定价格 $K=100$, 截断 $X=3K$, 且

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & -1 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & -1 & 0.25 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & -1 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & -1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} 0.1 \\ 0.3 \\ 0.5 \\ 0.7 \\ 0.9 \end{pmatrix}.$$

这里的模型参数与文献[5, 7, 9-10]中的取值相同。

为公平起见, 数值实验中 MSOR 和 MAOR 方法的参数矩阵取 $\boldsymbol{\Omega}=\mathbf{D}$, 且 PSOR、MSOR 和 MAOR 这 3 种方法中的松弛因子均选取使计算时间最少对应的值。此外, 3 种数值方法的收敛准定义为:

$$\|\min(\mathbf{Az} + \mathbf{q}, \mathbf{z})\|_2 < e_{\text{tol}} = 1 \times 10^{-6}, \tag{13}$$

式中: $\|\cdot\|_2$ 表示 L_2 范数, e_{tol} 表示容许误差。此外, 定义: $R_{\text{ratio}} = \frac{|V_{\Delta\tau}^h - V_{\Delta\tau/2}^{\Delta h/2}|}{|V_{\Delta\tau/2}^{\Delta h/2} - V_{\Delta\tau/4}^{\Delta h/4}|}$, 这里 $V_{\Delta\tau}^h$ 表示 V 在空间步长为 h 和时间步长为 $\Delta\tau$ 时的数值解, 则数值格式的收敛阶为: $R_{\text{rate}} = \log_2 R_{\text{ratio}}$ 。

实验的硬件环境为 CPU 主频 3.4 GHz 和内存 32 GB, 软件环境为 Matlab R2015a。 m 和 n 分别表示空间和时间方向的网格剖分数。

表 1~5 中基于 Crank-Nicolson 拟合有限体积格式和 MSOR 方法的求解, 分别列出了在 $\tau=T$ 时刻, 机制转换下美式 Kou 型跳扩散期权在 $S=90, 100, 110$ 处对应的期权值, 以及数值解的连续变化情况(Error)和收敛阶 R_{rate} 。由表 1~5 中不难看出, 期权值随着网格剖分的加密变得更加精确且收敛至文献[9]中的结果, 这表明了本文的模系矩阵分裂迭代法是有效的。同时, 由于收敛阶都为 2, 这又说明了 Crank-Nicolson 拟合有限体积格式结合 MSOR 方法所求得数值解的收敛阶是 2 阶的。

其次, 在图 1 中基于网格剖分 $(m, n) = (300, 300)$, 采用 Crank-Nicolson 拟合有限体积格式和 MSOR 方法求解, 画出了第 3 机制转换下美式 Kou 型跳扩散期权的期权曲面图和最佳实施边界, 以及 $\tau=T$ 时刻的期权值、Delta 值和 Gamma 值。从图 1 中不难看出, 计算所得的数值解性态优良, 无振荡和跳跃发生, 这表明了该方法是稳健的。其他机制下的情形相类似, 这里就不再作一一展示和讨论。

最后, 在图 2 中给出了 3 种不同数值方法求解式(10)的 CPU 时间比较。从图 2 中不难看出, 在同一计算规模下 MAOR 方法的计算效率优于 MSOR 方法, MSOR 方法优于 PSOR 方法。

表 1 美式 Kou 型跳扩散期权在 $S=90,100$ 和 110 处的计算结果(机制 1)

Tab. 1 Caculation results of American options under Kou's jump-diffusion processes at $S=90,100$ and 110 (Regime 1)

(m, n)	S=90			S=100			S=110		
	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}
(150,150)	15.011 562 0	—	—	9.841 721 7	—	—	6.227 137 2	—	—
(300,300)	15.017 701 6	6.14E-03	—	9.848 090 7	6.37E-03	—	6.232 418 2	5.28E-03	—
(600,600)	15.019 259 2	1.56E-03	2.0	9.849 708 2	1.62E-03	2.0	6.233 762 2	1.34E-03	2.0
(1 200,1 200)	15.019 656 4	3.97E-04	2.0	9.850 121 6	4.13E-04	2.0	6.234 106 8	3.45E-04	2.0
文献[9]	15.019 645 6			9.850 145 4			6.234 138 6		

表 2 美式 Kou 型跳扩散期权在 $S=90,100$ 和 110 处的计算结果(机制 2)

Tab. 2 Caculation results of American options under Kou's jump-diffusion processes at $S=90,100$ and 110 (Regime 2)

(m, n)	S=90			S=100			S=110		
	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}
(150,150)	15.025 334 0			10.373 603 9			6.755 460 6		
(300,300)	15.508 215 6	5.68E-03	—	10.379 546 6	5.94E-03	—	6.760 429 2	4.97E-03	—
(600,600)	15.509 638 6	1.42E-03	2.0	10.381 034 4	1.49E-03	2.0	6.761 673 6	1.24E-03	2.0
(1 200,1 200)	15.509 994 7	3.56E-04	2.0	10.381 406 8	3.72E-04	2.0	6.761 985 1	3.12E-04	2.0
文献[9]	15.510 032 5			10.381 467 5			6.762 042 8		

表 3 美式 Kou 型跳扩散期权在 $S=90,100$ 和 110 处的计算结果(机制 3)

Tab. 3 Caculation results of American options under Kou's jump-diffusion processes at $S=90,100$ and 110 (Regime 3)

(m, n)	S=90			S=100			S=110		
	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}
(150,150)	16.006 614 5			10.910 281 5			7.284 346 8		
(300,300)	16.012 085 5	5.47E-03	—	10.916 054 3	5.77E-03	—	7.289 219 3	4.87E-03	—
(600,600)	16.013 453 6	1.37E-03	2.0	10.917 497 8	1.44E-03	2.0	7.290 438 3	1.22E-03	2.0
(1 200,1 200)	16.013 796 0	3.42E-04	2.0	10.917 859 2	3.61E-04	2.0	7.290 743 6	3.05E-04	2.0
文献[9]	16.013 852 0			10.917 930 5			7.290 807 3		

表 4 美式 Kou 型跳扩散期权在 $S=90,100$ 和 110 处的计算结果(机制 4)

Tab. 4 Caculation results of American options under Kou's jump-diffusion processes at $S=90,100$ and 110 (Regime 4)

(m, n)	S=90			S=100			S=110		
	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}
(150,150)	16.519 352 3	—	—	11.448 087 3	—	—	7.811 223 0	—	—
(300,300)	16.534 842 4	5.49E-03	—	11.453 843 6	5.76E-03	—	7.816 088 9	4.87E-03	—
(600,600)	16.526 215 5	1.37E-03	2.0	11.455 283 2	1.44E-03	2.0	7.817 306 3	1.22E-03	2.0
(1 200,1 200)	16.526 559 2	3.44E-04	2.0	11.455 643 6	3.60E-04	2.0	7.817 611 2	3.05E-04	2.0
文献[9]	16.526 621 1			11.455 717 4			7.817 676 2		

表 5 美式 Kou 型跳扩散期权在 $S=90,100$ 和 110 处的计算结果(机制 5)

Tab. 5 Caculation results of American options under Kou's jump-diffusion processes at $S=90,100$ and 110 (Regime 5)

(m, n)	S=90			S=100			S=110		
	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}	期权值	误差	R_{rate}
(150,150)	17.030 295 6	—	—	11.980 742 1	—	—	8.332 702 8	—	—
(300,300)	17.035 862 6	5.57E-03	—	11.986 506 8	5.76E-03	—	8.337 572 5	4.87E-03	—
(600,600)	17.037 255 1	1.39E-03	2.0	11.987 948 5	1.44E-03	2.0	8.338 790 9	1.22E-03	2.0
(1 200,1 200)	17.037 603 7	3.49E-04	2.0	11.988 309 5	3.61E-04	2.0	8.339 096 0	3.05E-04	2.0
文献[9]	17.037 668 8			11.988 384 5			8.339 161 5		

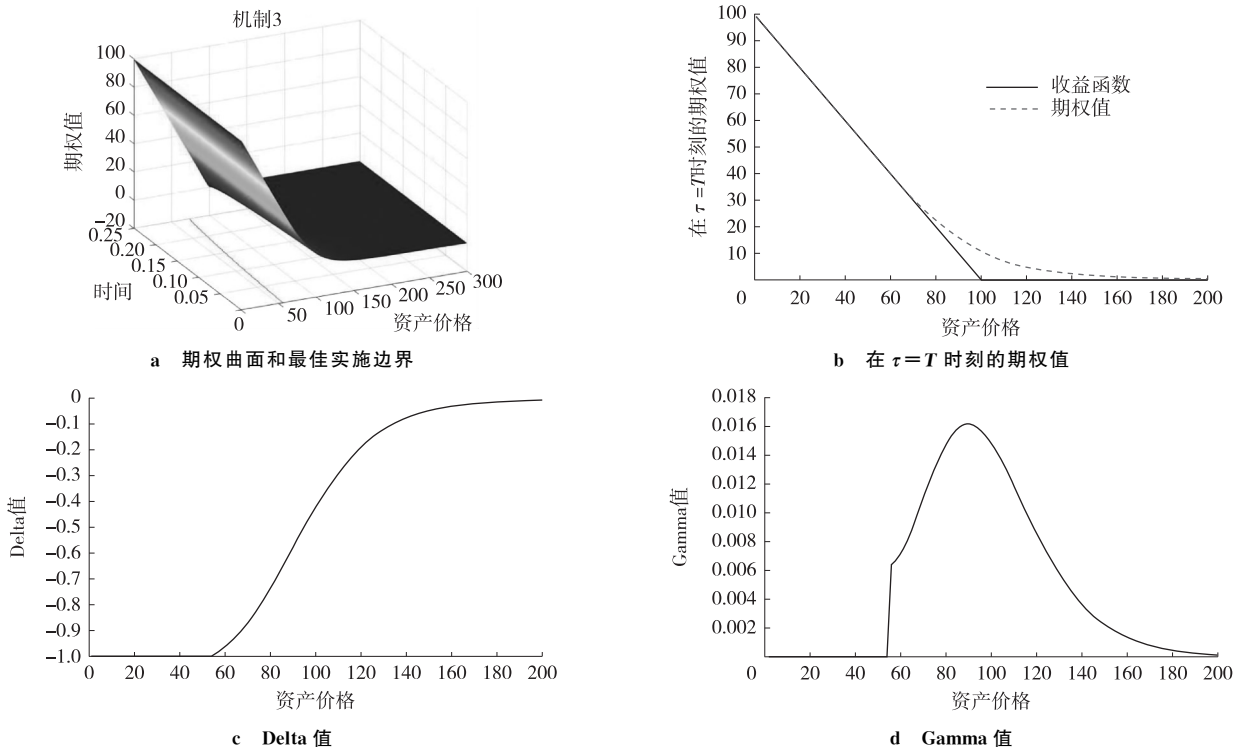


图 1 当 $(m, n) = (300, 300)$ 时, 机制 3 下的美式跳扩散期权

Fig. 1 American jump-diffusion options at the regime 3 of economy based on $(m, n) = (300, 300)$

4 结束语

本文主要研究机制转换下美式 Kou 型跳扩散期权的数值解法。针对 Crank-Nicolson 拟合有限体积法离散得到的一系列时间层上的线性互补问题, 引入模系矩阵分裂迭代法的求解并建立关于它的收敛性定理。数值实验验证了新方法的有效性, 且在最优松弛参数选取下, MAOR 方法的计算效率优于 MSOR 方法, MSOR 方法优于 PSOR 方法。后续研究会将文中数值方法推广应用至回报率带跳的 Bates 型和回报率与波动性均带跳的 SVCJ 型美式期权模型的定价中, 其中二维空间上的数值离散方法可借鉴文献[20]中一类重心网格剖分下有限体积法的离散。

参考文献:

[1] 张凯. 美式期权定价: 基于罚方法的金融计算[M]. 北京: 经济科学出版社, 2012.
 ZHANG K. Pricing american options: financial computation based on the penalty method[M]. Beijing: Economic Science Press, 2012.

[2] ZHANG K, YANG X Q. Power penalty approach to American options pricing under regime switching[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2018, 179(1): 311-331.

[3] TOUR G, THAKOOR N, TANGMAN D Y, et al. A high-order RBF-FD method for option pricing under regime-switching stochastic volatility models with jumps[J]. Journal of Computational Science, 2019, 35: 25-43.

[4] BASTANI A F, AHMADI Z, DAMIRCHELII D. A radial basis collocation method for pricing American options under regime-switching jump-diffusion models[J]. Applied Numerical Mathematics, 2013, 65(2): 79-90.

[5] LEE Y. Financial options pricing with regime-switching jump-diffusions[J]. Computers & Mathematics with Applications, 2014, 68(3): 392-404.

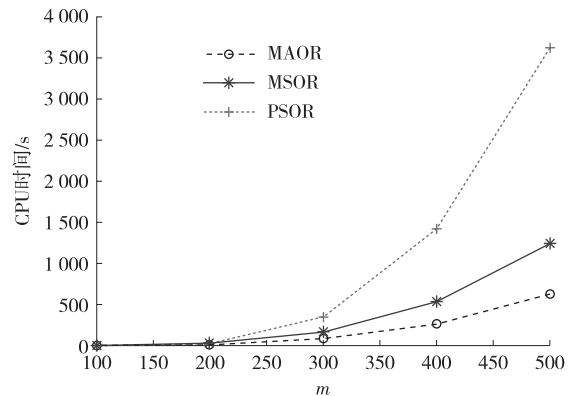


图 2 当 $m=n$ 时, 3 种不同数值方法的 CPU 时间比较
 Fig. 2 Comparison of CPU time for the three numerical methods when $m=n$

- [6] HEIDARI S, AZARI H. A front-fixing finite element method for pricing American options under regime-switching jump-diffusion models[J]. *Computers & Mathematics with Applications*, 2018, 37(3):3691-3707.
- [7] KAZMI K. An IMEX predictor-corrector method for pricing options under regime-switching jump-diffusion models[J]. *International Journal of Computer Mathematics*, 2019, 96(6):1137-1157.
- [8] CHEN Y Z, XIAO A G, WANG W S. An IMEX-BDF2 compact scheme for pricing options under regime-switching jump-diffusion models[J]. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 2019, 42(1):2646-2663.
- [9] 甘小艇, 江忠东, 李保荣. 状态转换下美式跳扩散期权的修正 Crank-Nicolson 拟合有限体积法[J]. *系统科学与数学*, 2021, 41(1):178-196.
- GAN X T, JIANG Z D, LI B R. A modified Crank-Nicolson fitted finite volume method for american options under regime-switching jump-diffusion processes[J]. *Journal of Systems Science and Mathematical Sciences*, 2021, 41(1):178-196.
- [10] GAN X T, YIN J F, LI R. Fitted finite volume method for pricing American options under regime-switching jump-diffusion models based on penalty method[J]. *Advances in Applied Mathematics and Mechanics*, 2020, 12(3):748-773
- [11] MURTY K. *Linear complementarity, linear and nonlinear programming*[M]. Berlin: Heldermann-Verlag, 1988.
- [12] HADJIDIMOS A, TZOUMAS M. Nonstationary extrapolated modulus algorithms for the solution of the linear complementarity problem[J]. *Linear Algebra and Its Applications*, 2009, 431(2):197-210.
- [13] DONG J L, JIANG M Q. A modified modulus method for symmetric positive-definite linear complementarity problems[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2009, 16(2):129-143.
- [14] BAI Z Z. Modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2010, 17(6):917-933.
- [15] 张丽丽. 关于线性互补问题的模系矩阵分裂迭代法[J]. *计算数学*, 2012, 34(4):373-386.
- ZHANG L L. On modulus-based matrix splitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2012, 34(4):373-386.
- [16] BAI Z Z, ZHANG L L. Modulus-based synchronous multisplitting iteration methods for linear complementarity problems[J]. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 2013, 20:425-439.
- [17] CAO Y, WANG A. Two-step modulus-based matrix splitting iteration methods for implicit complementarity problems[J]. *Numerical Algorithms*, 2019, 82(4):1377-1394.
- [18] MEZZADRI F, GALLIGANI E. Modulus-based matrix splitting methods for horizontal linear complementarity problems[J]. *Numerical Algorithms*, 2020, 83(1):201-219.
- [19] 张丽丽, 任志茹. 改进的分块模方法求解对角占优线性互补问题[J]. *计算数学*, 2021, 43(3):401-412.
- ZHANG L L, REN Z R. An improved block modulus method for diagonally dominant linear complementarity problems[J]. *Mathematica Numerica Sinica*, 2021, 43(3):401-412.
- [20] GAN X T, CHEN X L, XU D G. Modulus-based successive overrelaxation iteration method for pricing American options with the two-asset Black-Scholes and Heston's models based on finite volume discretization[J]. *Taiwanese Journal of Mathematics*, 2022, 26(1):69-101.

Modulus-Based Matrix Splitting Iteration Methods Pricing American Options under Regime-Switching Kou's Jump-Diffusion Processes

LI Yongjie, LIU Wenna, LIU jian, HUANG Qinyou, GAN Xiaoting

(School of Mathematics and Computer Science, Chuxiong Normal University, Chuxiong Yunnan 675000, China)

Abstract: [Purposes] As for the valuation of American options under regime-switching Kou's jump-diffusion processes. [Methods] Based on the linear complementarity problem discretized by Crank Nicolson fitted finite volume method, an efficient modulus matrix splitting iterative method is introduced to solve it. [Findings] The convergence theorem of the algorithms are given under the H^{+} -matrix property of the discrete matrix. [Conclusions] Numerical experiments verify the effectiveness, robustness and convergence of the new method, and the computational efficiency of the modulus-based matrix splitting iteration methods is superior to the projected successive overrelaxation iteration method.

Keywords: American options under regime-switching Kou's jump-diffusion processes; linear complementarity problem; modulus-based matrix splitting iteration method