

具有 Beddington-DeAngelis 发生率的 双斑块裂谷热病毒模型研究*

桑瑞, 吴浩, 张龙

(新疆大学 数学与系统科学学院, 新疆应用数学重点实验室, 乌鲁木齐 830017)

摘要:【目的】研究人口在斑块间扩散对裂谷热疾病传播的影响,提出了一个具有 Beddington-DeAngelis 发生率函数的双斑块裂谷热病毒模型。【方法】通过构造 Lyapunov 函数和运用 LaSalle 不变性原理,建立了系统无病平衡点的全局渐近稳定性准则,运用了 Routh-Hurwit 判别准则以及几何方法,建立了系统正平衡点全局渐近稳定性准则。【结果】得到了2个斑块的基本再生数 R_{10} 、 R_{20} ,建立了系统平衡点局部和全局渐近稳定的阈值准则,并通过数值模拟对理论结果进行验证。【结论】当 $R_{10} \leq 1$ 且 $R_{20} \leq 1$ 时,该疾病在2个斑块中灭绝;当 $R_{10} > 1$ 时,该疾病在2个斑块中持续生存。

关键词:裂谷热;Beddington-DeAngelis 功能反应;斑块模型;基本再生数;阈值动力学

中图分类号:O175.1

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2023)03-0094-12

裂谷热(Rift Valley fever, RVF)是由裂谷热病毒(Rift Valley fever virus, RVFV)感染家畜和人类而引起的人畜共患病,牲畜患病后导致的高死亡率和高流产率会造成重大的经济损失^[1-6]。RVFV 主要通过携带有该病毒的雌性蚊子叮咬宿主进行传播,库蚊属或伊蚊属的几种蚊子是已知的媒介物^[7]。人类会通过直接或间接接触被感染动物的血液或器官而感染 RVFV,但迄今为止未见报道该病毒会在人与人之间传播^[8]。

数学模型是评估感染风险和患病率以及优化控制策略的重要工具。为了控制疾病的蔓延,具有迁移的斑块模型在描述 RVFV 传播方面发挥了巨大的作用。2007年, Gaff 等人^[9]提出了一类斑块模型,以探讨 RVFV 的循环机制。为了解释伊蚊的垂直传播,他们还研究了感染的以及未感染的卵的仓室。随着对 RVFV 研究的进一步深入, Mpheeshe 等人^[10]修改了 Gaff 的模型,去掉了蚊子卵的仓室,排除蚊子的垂直传播,为证明无病平衡点的稳定性和疾病的持久性创造了条件。Gao 等人^[11]提出了一类三斑块空间传播的模型,研究了裂谷热在埃及的地理分布现象的动力学原理。

目前,虽然众多学者对 RVFV 进行了深入研究,但该病毒仍无时无刻不在威胁着人们的生命安全。据报道,2019年5—7月在苏丹埃马尔达马尔地区爆发的一场 RVF,导致1 129例病例患者和19例(占比1.7%)死亡^[12];在 COVID-19 大流行期间,实施的相关封锁可能导致了許多国家和地区如巴西^[13]、印度^[14]和非洲^[15]的虫媒病毒大爆发,其中非洲作为 RVF 的主要发源地,为蚊子媒介的快速繁殖提供了有利条件,这导致了 RVF 在非洲东部的肯尼亚再次爆发^[16]。截至2021年2月4日,32例 RVF 确诊病例中就有11人死亡,死亡率高达34.4%^[17]。大量 RVF 病例的出现使得社会公共安全及经济安全面临严峻的挑战。

中国于2016年确立了首例输入性 RVFV 感染病例^[18],因此该病对中国也存在潜在威胁。本文的主要目的是考虑具有空间传播的 RVFV 在人类之间传播,且主要传播途径为蚊虫叮咬,由此建立一个双斑块传染病模型来描述 RVF 的空间传播。

1 模型的建立与介绍

RVF 是一种致命的传染病,临床上的潜伏期为3~4 d,随后会突然出现不适、发烧和头痛,这为 RVF 携带者

* 收稿日期:2021-11-10 修回日期:2022-12-10 网络出版时间:2023-06-15T17:10

资助项目:新疆应用数学重点实验室开放课题(No. 2021D04014);国家自然科学基金面上项目(No. 12261087;No. 11861065);新疆维吾尔自治区自然科学基金(No. 2022D01E41);新疆维吾尔自治区高校科研重点项目(No. XJEDU2021H002)

第一作者简介:桑瑞,女,研究方向为常微分方程稳定性理论,E-mail:280435749@qq.com;通信作者:张龙,男,教授,博士生导师,E-mail:longzhang_xj@sohu.com

网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms2/detail/50.1165.N.20230615.1411.008.html

的迁徙提供了前提条件,使得人类由于迁移将 RVFV 从非洲传播到世界其他地区的可能性大大提高^[19]。假设由于病媒种群的流动性有限,它们在斑块间的扩散可以忽略。还假设蚊子种群是 Logistic 增长的,以保持一个均衡的病媒种群。这里采用更为一般的 Beddington-DeAngelis 功能反映函数^[20-21]来刻画疾病的发生率,可得到以下双斑块传染病模型:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = A_1 - \mu_1 S_1 - \frac{\alpha_1 S_1 V_1}{1+k_1 S_1+k_2 V_1} - \theta_S S_1, \\ \frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 S_1 V_1}{1+k_1 S_1+k_2 V_1} - \mu_1 I_1 - \gamma_1 I_1 - \delta_1 I_1 - \theta_I I_1, \\ \frac{dR_1}{dt} = -\mu R_1 + \gamma I_1, \\ \frac{dU_1}{dt} = \xi_1 (U_1 + V_1) - \frac{\xi_1 - v_1}{M_1} (U_1 + V_1)^2 - v_1 U_1 - \beta_1 I_1 U_1, \\ \frac{dV_1}{dt} = -v_1 V_1 + \beta_1 I_1 U_1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \frac{dS_2}{dt} = A_2 - \mu_2 S_2 - \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_S S_1, \\ \frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} - \mu_2 I_2 - \gamma_2 I_2 - \delta_2 I_2 + \theta_I I_1, \\ \frac{dR_2}{dt} = -\mu R_2 + \gamma I_2, \\ \frac{dU_2}{dt} = \xi_2 (U_2 + V_2) - \frac{\xi_2 - v_2}{M_2} (U_2 + V_2)^2 - v_2 U_2 - \beta_2 I_2 U_2, \\ \frac{dV_2}{dt} = -v_2 V_2 + \beta_2 I_2 U_2. \end{cases} \quad (2)$$

将人类种群分为 3 个类别,用 $S_i(t), I_i(t), R_i(t)$ 分别表示在 t 时刻斑块 $i(i=1,2)$ 易感者、感染者和恢复者的数量。将蚊子种群分为 2 个类别,用 $U_i(t), V_i(t)$ 分别表示在 t 时刻斑块 i 中易感蚊子和感染蚊子的数量。 A_i 为补充率,斑块 i 中人类个体的自然死亡率、病死率及治愈率分别用 μ_i, δ_i 和 γ_i 来刻画。 α_i, β_i 分别表示斑块 i 中蚊子向宿主和宿主向蚊子的传输速率, θ_S 和 θ_I 分别为斑块 1 中易感者和感染者向斑块 2 的迁移速率, ξ_i 为斑块 i 中蚊子的生长速率, v_i 为斑块 i 中蚊子的自然死亡率, M_i 为斑块 i 中蚊子的容纳量, $k_j(j=1,2,3,4)$ 为抑制率。这里所有参数都为正常数。

在时间 t 时,以 $\hat{N}_i(t) = U_i(t) + V_i(t)$ 表示的斑块 i 中的蚊子总数,满足:

$$\frac{d\hat{N}_i(t)}{dt} = (\xi_i - v_i) \hat{N}_i(t) - \frac{\xi_i - v_i}{M_i} (\hat{N}_i)^2, i=1,2.$$

对于任何正初始值,当 $t \rightarrow \infty$ 时 $\hat{N}_i(t)$ 收敛到 M_i , 因此可以考虑如下系统(1)、(2)的极限系统:

$$\begin{cases} \frac{dS_1}{dt} = A_1 - \frac{\alpha_1 S_1 V_1}{1+k_1 S_1+k_2 V_1} - d_1 S_1, \\ \frac{dI_1}{dt} = \frac{\alpha_1 S_1 V_1}{1+k_1 S_1+k_2 V_1} - d_2 I_1, \\ \frac{dV_1}{dt} = -v_1 V_1 + \beta_1 I_1 (M_1 - V_1). \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} \frac{dS_2}{dt} = A_2 - \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_S S_1 - \mu_2 S_2, \\ \frac{dI_2}{dt} = \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_I I_1 - d_3 I_2, \\ \frac{dV_2}{dt} = -v_2 V_2 + \beta_2 I_2 (M_2 - V_2). \end{cases} \quad (4)$$

式中: $d_1 = \theta_s + \mu_1, d_2 = \theta_I + \gamma_1 + \mu_1 + \delta_1, d_3 = \gamma_2 + \mu_2 + \delta_2$ 。初始条件为: $S_i(0) \geq 0, I_i(0) \geq 0, V_i(0) \geq 0, i = 1, 2$ 。通过计算, 系统(3)、(4)的无病平衡点为:

$$E_0 = (S_1^0, I_1^0, V_1^0, S_2^0, I_2^0, V_2^0) = \left(\frac{A_1}{d_1}, 0, 0, \frac{A_2 d_1 + \theta_s A_1}{\mu_2 d_1}, 0, 0 \right)。$$

令 $N(t) = S_1(t) + I_1(t) + R_1(t) + S_2(t) + I_2(t) + R_2(t)$, 易验证集合

$$\Gamma = \left\{ (S_1, I_1, V_1, S_2, I_2, V_2) \in \mathbf{R}_+^6; S_i \leq S_i^0, V_i \leq M_i, i = 1, 2; N(t) \leq \frac{A_1 + A_2}{\min(\mu_1, \mu_2)} \right\}$$

为系统(3)、(4)的正不变集。

2 基本再生数与阈值动力学

模型中所描述的迁移为单向迁移, 因此斑块 1 的动力学独立于斑块 2。

2.1 斑块 1 动力学分析

显然, $E_1^0 = (S_1^0, 0, 0)$ 是子系统(3)的唯一的无病平衡点, 为了计算系统(3)的基本再生数, 用 (I_1, V_1) 对感染变量进行排序, 遵循文献[22]的方法和符号, 给出在 E_1^0 处系统(3)的迁入及移出矩阵:

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha_1 S_1^0}{1 + k_1 S_1^0} \\ \beta_1 M_1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbf{V} = \begin{pmatrix} d_2 & 0 \\ 0 & v_1 \end{pmatrix}。$$

由此可以给出斑块 1 的基本再生数 $R_{10} = \rho(\mathbf{FV}^{-1}) = \sqrt{\frac{\alpha_1 S_1^0 \beta_1 M_1}{d_2(1 + k_1 S_1^0)v_1}} = \sqrt{\frac{\alpha_1 A_1 \beta_1 M_1}{d_2(d_1 + k_1 A_1)v_1}}$ 。

定理 1 当 $R_{10} \leq 1$ 时, 系统(3)的无病平衡点 E_1^0 全局渐近稳定。

证明 考虑 Γ 上的 Lyapunov 函数 $L_1 = \beta_1 M_1 I_1 + d_2 V_1$, 那么沿着系统(3)计算 L_1 的导数得:

$$L_1' = \left(\frac{\alpha_1 S_1 \beta_1 M_1}{1 + k_1 S_1 + k_2 V_1} - d_2 v_1 \right) V_1 - d_2 \beta_1 I_1 V_1 \leq \left[\frac{\alpha_1 S_1 \beta_1 M_1}{1 + k_1 S_1 + k_2 V_1} - \frac{\alpha_1 S_1^0 \beta_1 M_1}{(1 + k_1 S_1^0) R_{10}^2} \right] V_1 \leq \alpha_1 \beta_1 M_1 \left[\frac{S_1}{1 + k_1 S_1} - \frac{S_1^0}{(1 + k_1 S_1^0) R_{10}^2} \right] V_1 \leq \alpha_1 \beta_1 M_1 \left[\frac{S_1^0}{1 + k_1 S_1^0} - \frac{S_1^0}{(1 + k_1 S_1^0) R_{10}^2} \right] V_1 \leq 0。$$

令 $E_1 = \{(S_1, I_1, V_1) \in \Gamma | L_1' = 0\}$, E_1 的最大不变集记为 W_1 是单点集 $\{E_1^0\}$ 。

情况 1, 当 $R_{10} < 1$ 时, $E_1 = \{(S_1, I_1, V_1) \in \Gamma | V_1 = 0\}$, 由 W_1 的不变性, 对 $\forall t \in \mathbf{R}$, 系统(3)满足初始条件的解 $(S_1(t), I_1(t), V_1(t)) \in W_1 \in E_1$, 因此, 对 $\forall t \in \mathbf{R}, V_1 \equiv 0$, 由系统(3)的第 2 个方程: $\dot{I}_1(t) = -d_2 I_1$, 易得当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $I_1 \rightarrow 0$, 又由系统(3)的第 1 个方程: $\dot{S}_1(t) = A_1 - d_1 S_1$, 易得当 $t \rightarrow +\infty$ 时, $S_1 \rightarrow S_1^0$, 即 $W_1 = \{E_1^0\}$ 。

情况 2, 当 $R_{10} = 1$ 时, $E_1 = \{(S_1, I_1, V_1) \in \Gamma | V_1 = 0 \text{ 或 } S_1 = S_1^0\}$, 即对 $\forall t \in \mathbf{R}, V_1 \equiv 0$ (同情况 1) 或 $S_1 = S_1^0$, 由于 $S_1(t)$ 是连续可微的且对 $\forall t \in \mathbf{R}, S_1(t) \leq S_1^0$, 若存在某个 $t_1 \in \mathbf{R}$, 有 $S_1(t_1) = S_1^0$ 成立, 则必有 $\dot{S}_1(t_1) = 0$, 由系统(3)中第 1 个方程: $\frac{dS_1(t_1)}{dt} = A_1 - \frac{\alpha_1 S_1^0 V_1}{1 + k_1 S_1^0 + k_2 V_1} - d_1 S_1^0 = 0$, 从而 $V_1 \equiv 0$, 证明同上。由 LaSalle 不变性原理^[23]: $R_{10} \leq 1$ 时, E_1^0 全局渐近稳定。证毕

定理 2 当 $R_{10} > 1$ 时, 系统(3)存在唯一的地方病平衡点 $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, V_1^*)$ 。

证明 令系统(3)的右端函数等于 0, 得:

$$\begin{cases} A_1 - \frac{\alpha_1 S_1 V_1}{1 + k_1 S_1 + k_2 V_1} - d_1 S_1 = 0, \\ \frac{\alpha_1 S_1 V_1}{1 + k_1 S_1 + k_2 V_1} - d_2 I_1 = 0, \\ -v_1 V_1 + \beta_1 I_1 (M_1 - V_1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

联立(5)式的前 2 个方程可解得 $S_1 = \frac{A_1 - d_2 I_1}{d_1}$, 由第 3 个方程可得 $V_1 = \frac{\beta_1 I_1 M_1}{v_1 + \beta_1 I_1}$, 将它们代入第 2 个方程并整

理得:

$$C_0 I_1^2 + C_1 I_1 + C_2 = 0. \tag{6}$$

式中:

$$C_0 = k_1 \beta_1 d_2, C_1 = -(d_1 \beta_1 + k_1 \beta_1 A_1 - k_1 v_1 d_2 + \alpha_1 \beta_1 M_1 + k_2 d_1 \beta_1 M_1),$$

$$C_2 = \frac{\alpha_1 A_1 \beta_1 M_1}{d_2} - (d_1 + k_1 A_1) v_1 = (R_{10}^2 - 1)(d_1 + k_1 A_1) v_1.$$

$$\begin{aligned} \Delta = C_1^2 - 4C_0 C_2 &= (d_1 \beta_1 + k_1 \beta_1 A_1 - k_1 v_1 d_2 + \alpha_1 \beta_1 M_1 + k_2 d_1 \beta_1 M_1)^2 - 4k_1 \beta_1 d_2 \left[\frac{\alpha_1 A_1 \beta_1 M_1}{d_2} - (d_1 + k_1 A_1) v_1 \right] = \\ &= (\alpha_1 \beta_1 M_1 - k_1 \beta_1 A_1)^2 + (d_1 \beta_1 - k_1 v_1 d_2 + k_2 d_1 \beta_1 M_1)^2 + 4k_1 \beta_1 d_2 (d_1 + k_1 A_1) v_1 + \\ &= 2(\alpha_1 \beta_1 M_1 + k_1 \beta_1 A_1)(d_1 \beta_1 - k_1 v_1 d_2 + k_2 d_1 \beta_1 M_1) = (d_1 \beta_1 - k_1 \beta_1 A_1 - k_1 v_1 d_2 + \alpha_1 \beta_1 M_1 + k_2 d_1 \beta_1 M_1)^2 + \\ &+ 4k_1 \beta_1 A_1 (d_1 \beta_1 + k_2 d_1 \beta_1 M_1) + 4k_1 \beta_1 d_2 d_1 v_1 = (C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1)^2 + d > 0. \end{aligned}$$

式中: $d = 4k_1 \beta_1 A_1 (d_1 \beta_1 + k_2 d_1 \beta_1 M_1) + 4k_1 \beta_1 d_2 d_1 v_1$ 。因此,方程(2)有 2 个实根:

$$I_1 = \frac{-C_1 \pm \sqrt{C_1^2 - 4C_0 C_2}}{2C_0} = \frac{-C_1 \pm \sqrt{(C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1)^2 + d}}{2C_0}.$$

当 $I_1 = \frac{-C_1 + \sqrt{(C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1)^2 + d}}{2C_0}$ 时,有:

$$A_1 - d_2 I_1 = A_1 - \frac{-C_1 + \sqrt{(C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1)^2 + d}}{2k_1 \beta_1} < A_1 - \frac{-C_1 + |C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1|}{2k_1 \beta_1} \leq 0.$$

即 $A_1 - d_2 I_1 < 0$, 也就是 $S_1 < 0$, 不符合生物学意义。

当 $I_1 = \frac{-C_1 - \sqrt{(C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1)^2 + d}}{2C_0}$ 时,有:

$$A_1 - d_2 I_1 = A_1 - \frac{-C_1 - \sqrt{(C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1)^2 + d}}{2k_1 \beta_1} > A_1 - \frac{-C_1 - |C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1|}{2k_1 \beta_1} \geq 0.$$

即 $S_1 > 0$, 符合生物学意义。因此,当 $R_{10} > 1$ 时,系统存在唯一的正平衡点 $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, V_1^*)$, 其中 $I_1 = \frac{-C_1 - \sqrt{(C_1 + 2k_1 \beta_1 A_1)^2 + d}}{2C_0}$, 记为 I_1^* , 对应的 S_1 和 V_1 分别记为 S_1^*, V_1^* 。

定理 3 当 $R_{10} > 1$ 时,系统(3)唯一的地方病平衡点 $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, V_1^*)$ 局部渐近稳定。

证明 系统(3)在 E_1^* 处的 Jacobian 矩阵为:

$$J_1^* = \begin{pmatrix} -d_1 - \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} & 0 & -\frac{\alpha_1 S_1^* (1+k_1 S_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \\ \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} & -d_2 & \frac{\alpha_1 S_1^* (1+k_1 S_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \\ 0 & \beta_1 (M_1 - V_1^*) & -(v_1 + \beta_1 I_1^*) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

J_1^* 的特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$, 式中:

$$a_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} + d_2 + v_1 + \beta_1 I_1^* > 0,$$

$$a_2 = a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} >$$

$$\left[d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \right] (v_1 + \beta_1 I_1^*) + d_2 (v_1 + \beta_1 I_1^*) - \beta_1 (M_1 - V_1^*) \frac{\alpha_1 S_1^* (1+k_1 S_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2}. \tag{7}$$

由式(5)的第 3 个方程得 $V_1^* = \frac{\beta_1 I_1^* (M_1 - V_1^*)}{v_1}$, 代入第 2 个方程得 $\frac{\alpha_1 S_1^* \beta_1 I_1^* (M_1 - V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} - d_2 I_1^* = 0$, 那么有:

$$\beta_1 (M_1 - V_1^*) = \frac{d_2 (1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*) v_1}{\alpha_1 S_1^*}.$$

代入式(7)有:

$$\begin{aligned}
 a_2 &> \left[d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \right] (v_1 + \beta_1 I_1^*) + d_2 (v_1 + \beta_1 I_1^*) - \frac{d_2 (1+k_1 S_1^*) v_1}{1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*} > \\
 &\quad \left[d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \right] (v_1 + \beta_1 I_1^*) + d_2 \beta_1 I_1^* > 0, \\
 a_3 &= -a_{11} a_{22} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{13} a_{32} = \\
 &\quad \left[d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \right] d_2 (v_1 + \beta_1 I_1^*) - d_1 \beta_1 (M_1 - V_1^*) \frac{\alpha_1 S_1^* (1+k_1 S_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} > \\
 &\quad \left[d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \right] d_2 (v_1 + \beta_1 I_1^*) - d_1 d_2 v_1 > 0, \\
 a_1 a_2 - a_3 &> \left[d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} + d_2 + v_1 + \beta_1 I_1^* \right] \left[\left(d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \right) (v_1 + \beta_1 I_1^*) + d_2 \beta_1 I_1^* \right] - \\
 &\quad \left[d_1 + \frac{\alpha_1 V_1^* (1+k_2 V_1^*)}{(1+k_1 S_1^* + k_2 V_1^*)^2} \right] d_2 (v_1 + \beta_1 I_1^*) > 0.
 \end{aligned}$$

根据 Routh-Hurwit 判别准则, J_1^* 的所有特征根均具有负实部, 地方病平衡点 E_1^* 局部渐近稳定。

下面遵循 Li 等人^[24] 提出的几何方法研究正平衡点的全局渐近稳定性。

引理 1 考虑一个动力系统 $\frac{dX}{dt} = f(X)$, 其中 $f: D \mapsto \mathbf{R}^n$ 是 C^1 函数且 $D \in \mathbf{R}^n$ 是一个单连通域, 假设存在一个紧吸引集 $K \subset D$ 且系统 D 中有唯一的正平衡点 X^* , 如果 $\bar{q}_2 < 0$, 则 X^* 在 D 中全局渐近稳定, 式中:

$$\bar{q}_2 = \limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{X_0 \in K} \frac{1}{t} \int_0^t m(Q(X(s, X_0))) ds. \tag{8}$$

式中: Q 是一个矩阵值函数, 定义为 $Q = P_f P^{-1} + P J^{[2]} P^{-1}$, 其中 $P(X)$ 是 D 中 $\begin{pmatrix} 2 \\ n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ n \end{pmatrix}$ 的矩阵值 C^1 函数, P_f 是沿着 f 方向的 P 的导数, $J^{[2]}$ 是雅可比矩阵 $J(X) = Df(X)$ 的第二加性复合矩阵^[25], 同时对于矩阵范数,

$m(Q)$ 是 Q 的 Lozinskii 度量, 即 $m(Q) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{|I + hQ| - 1}{h}$, 其中 I 表示单位矩阵。

定理 4 $R_{10} > 1$ 时, 系统(3)唯一的地方病平衡点 $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, V_1^*)$ 全局渐近稳定。

证明 通过计算, 斑块 1 中线性化子系统的雅可比矩阵为:

$$J_1 = \begin{pmatrix} -d_1 - \frac{\alpha_1 V_1 (1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} & 0 & -\frac{\alpha_1 S_1 (1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} \\ \frac{\alpha_1 V_1 (1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} & -d_2 & \frac{\alpha_1 S_1 (1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} \\ 0 & \beta_1 (M_1 - V_1) & -(v_1 + \beta_1 I_1) \end{pmatrix},$$

相关联的第二加性复合矩阵为:

$$J_1^{[2]} = \begin{pmatrix} -(d_1 + d_2) - \frac{\alpha_1 V_1 (1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} & \frac{\alpha_1 S_1 (1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} & \frac{\alpha_1 S_1 (1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} \\ \beta_1 (M_1 - V_1) & -(d_1 + v_1 + \beta_1 I_1) - \frac{\alpha_1 V_1 (1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 V_1 (1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1 + k_2 V_1)^2} & -(d_2 + v_1 + \beta_1 I_1) \end{pmatrix}.$$

定义 $P_1 = \text{diag}\left(1, \frac{I_1}{V_1}, \frac{I_1}{V_1}\right)$, 且令 F_1 表示斑块 1 的向量场, 则有 $P_1 F_1 P_1^{-1} = \text{diag}\left(0, \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{V}_1}{V_1}, \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{V}_1}{V_1}\right)$, 且:

$$P_1 J_1^{[2]} P_1^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -(d_1+d_2) - \frac{\alpha_1 V_1(1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} & \frac{V_1}{I_1} \frac{\alpha_1 S_1(1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} & \frac{V_1}{I_1} \frac{\alpha_1 S_1(1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} \\ \frac{I_1}{V_1} \beta_1 (M_1 - V_1) & -(d_1+v_1+\beta_1 I_1) - \frac{\alpha_1 V_1(1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_1 V_1(1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} & -(d_2+v_1+\beta_1 I_1) \end{pmatrix},$$

矩阵 $\mathbf{Q}^{(1)} = \mathbf{P}_{1F_1} \mathbf{P}_1^{-1} + \mathbf{P}_1 \mathbf{J}_1^{[2]} \mathbf{P}_1^{-1}$ 可以用矩阵块 $\mathbf{Q}^{(1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11}^{(1)} & \mathbf{Q}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{Q}_{21}^{(1)} & \mathbf{Q}_{22}^{(1)} \end{pmatrix}$ 的形式表示。其中:

$$\mathbf{Q}_{11}^{(1)} = -(d_1+d_2) - \frac{\alpha_1 V_1(1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2}, \mathbf{Q}_{12}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{V_1}{I_1} \frac{\alpha_1 S_1(1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} & \frac{V_1}{I_1} \frac{\alpha_1 S_1(1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{21}^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{I_1}{V_1} \beta_1 (M_1 - V_1) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q}_{22}^{(1)} = \begin{pmatrix} -(d_1+v_1+\beta_1 I_1) - \frac{\alpha_1 V_1(1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} + \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{V}_1}{V_1} & 0 \\ \frac{\alpha_1 V_1(1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} & -(d_2+v_1+\beta_1 I_1) + \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{V}_1}{V_1} \end{pmatrix}.$$

对于任何的 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3$, 定义它的向量范数为 $|(x_1, x_2, x_3)| = \max(|x_1|, |x_2+x_3|)$ 。设 m 表示关于这个范数的 Lozinskii 度量。通过直接计算得 $m(\mathbf{Q}^{(1)}) = \sup(g_1^{(1)}, g_2^{(1)})$, 其中 $g_1^{(1)} = m_1(\mathbf{Q}_{11}^{(1)}) + |\mathbf{Q}_{12}^{(1)}|$, $g_2^{(1)} = |\mathbf{Q}_{21}^{(1)}| + m_1(\mathbf{Q}_{22}^{(1)})$, 这里 $|\mathbf{Q}_{12}^{(1)}|$ 和 $|\mathbf{Q}_{21}^{(1)}|$ 是由 L_1 范数诱导的矩阵范数, 且 m_1 表示相对于 L_1 范数的 Lozinskii 度量。

$$g_1^{(1)} = -(d_1+d_2) - \frac{\alpha_1 V_1(1+k_2 V_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} + \frac{V_1}{I_1} \frac{\alpha_1 S_1(1+k_1 S_1)}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)^2} \leq \frac{V_1}{I_1} \frac{\alpha_1 S_1}{(1+k_1 S_1+k_2 V_1)} - (d_1+d_2) = \frac{\dot{I}_1}{I_1} - d_1,$$

$$g_2^{(1)} = \frac{I_1}{V_1} \beta_1 (M_1 - V_1) + \frac{\dot{I}_1}{I_1} - \frac{\dot{V}_1}{V_1} - v_1 - \beta_1 I_1 + \sup(-d_1, -d_2).$$

由系统(3)中第 3 个方程得 $\frac{\dot{V}_1}{V_1} = -v_1 + \frac{\beta_1 I_1 (M_1 - V_1)}{V_1}$, 代入上式得: $g_2^{(1)} \leq \frac{\dot{I}_1}{I_1} + \sup(-d_1, -d_2)$ 。记 $l_1 =$

$\min(d_1, d_2)$, 则有 $g_1^{(1)} \leq \frac{\dot{I}_1}{I_1} - l_1, g_2^{(1)} \leq \frac{\dot{I}_1}{I_1} - l_1$ 。因此, $m(\mathbf{Q}^{(1)}) \leq \frac{\dot{I}_1}{I_1} - l_1$ 。由于 $0 \leq I_1(t) \leq N(t) \leq \frac{A_1 + A_2}{\min(\mu_1, \mu_2)}$,

如果 t 足够大, 那么 $\frac{\ln(I_1(t)) - \ln(I_1(0))}{t} \leq \frac{l_1}{2}$ 。于是, 当 t 足够大时, 有:

$$\frac{1}{t} \int_0^t m(\mathbf{Q}^{(1)}) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{\dot{I}_1}{I_1} - l_1 \right) ds = \frac{\ln(I_1(t)) - \ln(I_1(0))}{t} - l_1 \leq -\frac{l_1}{2}.$$

故可得 $\bar{q}_2^{(1)} := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(\mathbf{Q}^{(1)}) ds \leq -\frac{l_1}{2} < 0$, 这表明 $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, V_1^*)$ 在第一个斑块是全局渐近稳定的。

2.2 斑块 2 动力学分析

情形 1, 当 $R_{10} \leq 1$ 时, 斑块 1 无病平衡点 $E_1^0 = (S_1^0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的, 因此, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 对于斑块 2 可得如下极限系统:

$$\begin{cases} \frac{dS_2(t)}{dt} = A_2 - \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_S S_1^0 - \mu_2 S_2, \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} - d_3 I_2, \\ \frac{dV_2(t)}{dt} = -v_2 V_2 + \beta_2 I_2 (M_2 - V_2). \end{cases} \quad (9)$$

通过计算,系统(9)有唯一的无病平衡点 $E_2^0 = \left(\frac{A_2 d_1 + \theta_s A_1}{\mu_2 d_1}, 0, 0\right)$, 并得到它的基本再生数为 $R_{20} = \sqrt{\frac{\alpha_2 S_2^0 \beta_2 M_2}{d_3(1+k_3 S_2^0) v_2}}$.

定理 5 $R_{10} \leq 1, R_{20} \leq 1$ 时,系统(9)的无病平衡点 E_2^0 全局渐近稳定; $R_{10} \leq 1, R_{20} > 1$ 时,系统(9)存在唯一的地方病平衡点 $\bar{E}_2 = (\bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{V}_2)$ 且是全局渐近稳定的。

证明 情形 1, 由于系统(9)与系统(3)具有完全相同的结构,关于平衡点稳定性的证明与定理 1 以及定理 4 相同,此处省去。

情形 2, 当 $R_{10} > 1$ 时,斑块 1 地方病平衡点 $E_1^* = (S_1^*, I_1^*, V_1^*)$ 全局渐近稳定,因此,当 $t \rightarrow \infty$ 时,斑块 2 可得如下极限系统:

$$\begin{cases} \frac{dS_2(t)}{dt} = A_2 - \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_s S_1^* - \mu_2 S_2, \\ \frac{dI_2(t)}{dt} = \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_I I_1^* - d_3 I_2, \\ \frac{dV_2(t)}{dt} = -v_2 V_2 + \beta_2 I_2 (M_2 - V_2). \end{cases} \quad (10)$$

从生物的角度,研究系统(10)正平衡点的唯一性具有重要意义,如果它存在,应该满足以下代数方程:

$$\begin{cases} A_2 - \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_s S_1^* - \mu_2 S_2 = 0, \\ \frac{\alpha_2 S_2 V_2}{1+k_3 S_2+k_4 V_2} + \theta_I I_1^* - d_3 I_2 = 0, \\ -v_2 V_2 + \beta_2 I_2 (M_2 - V_2) = 0. \end{cases} \quad (11)$$

联立式(11)的第 1 个和第 2 个方程有: $S_2 = \frac{A_2 + \theta_s S_1^* + \theta_I I_1^* - d_3 I_2}{\mu_2}$ 。由第 3 个方程可得: $V_2 = \frac{\beta_2 I_2 M_2}{v_2 + \beta_2 I_2}$, 将它们代入第 2 个方程整理得:

$$B_0 I_2^3 + B_1 I_2^2 + B_2 I_2 + B_3 = 0, \quad (12)$$

式中:

$$\begin{aligned} B_0 &= d_3^2 k_3 \beta_2, B_1 = -\alpha_2 d_3 \beta_2 M_2 - d_3 \mu_2 \beta_2 - d_3 k_3 \beta_2 A + d_3^2 k_3 v_2 - d_3 k_4 \mu_2 \beta_2 M_2 - \theta_I I_1^* d_3 k_3 \beta_2, \\ B_2 &= \alpha_2 A \beta_2 M_2 - d_3 \mu_2 v_2 - d_3 k_3 v_2 A + \theta_I I_1^* \beta_2 \mu_2 + \theta_I I_1^* k_3 \beta_2 A - \theta_I I_1^* k_3 v_2 d_3 + \theta_I I_1^* k_4 \mu_2 \beta_2 M_2, \\ B_3 &= \theta_I I_1^* \mu_2 v_2 + \theta_I I_1^* k_3 v_2 A. \end{aligned}$$

这里 $A = A_2 + \theta_s S_1^* + \theta_I I_1^*$ 。由于 $B_0 > 0, B_3 > 0$, 由笛卡尔符号规则,如果满足以下 3 个条件中的任何一个,式(12)有两个正实根或没有正实根:

$$\begin{cases} B_1 > 0, B_2 < 0, \\ B_1 < 0, B_2 > 0, \\ B_1 < 0, B_2 < 0. \end{cases} \quad (13)$$

注 1 以上条件严格地说只是代数方程(12)正根的存在,要使系统(10)的正平衡点存在还必须满足:

$$S_2 = \frac{A_2 + \theta_s S_1^* + \theta_I I_1^* - d_3 I_2}{\mu_2} > 0.$$

定理 6 当 $R_{10} > 1$ 时,如果系统(10)的地方病平衡点 $E_2^* = (S_2^*, I_2^*, V_2^*)$ 存在,则是局部渐近稳定的。

证明 系统在 E_2^* 处的雅可比矩阵为:

$$J_2^* = \begin{pmatrix} -\mu_2 - \frac{\alpha_2 V_2^* (1+k_4 V_2^*)}{(1+k_3 S_2^*+k_4 V_2^*)^2} & 0 & -\frac{\alpha_2 S_2^* (1+k_3 S_2^*)}{(1+k_3 S_2^*+k_4 V_2^*)^2} \\ \frac{\alpha_2 V_2^* (1+k_4 V_2^*)}{(1+k_3 S_2^*+k_4 V_2^*)^2} & -d_3 & \frac{\alpha_2 S_2^* (1+k_3 S_2^*)}{(1+k_3 S_2^*+k_4 V_2^*)^2} \\ 0 & \beta_2 (M_2 - V_2^*) & -(v_2 + \beta_2 I_2^*) \end{pmatrix} \triangleq \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

J_2^* 的特征方程为 $f(\lambda) = \lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$, 式中:

$$a_1 = -(a_{11} + a_{22} + a_{33}) = \mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} + d_3 + v_2 + \beta_2 I_2^* > 0,$$

$$a_2 = a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32} >$$

$$\left[\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} \right] (v_2 + \beta_2 I_2^*) + d_3 (v_2 + \beta_2 I_2^*) - \beta_2 (M_2 - V_2^*) \frac{\alpha_2 S_2^* (1 + k_3 S_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2}.$$

由式(11)第 3 个方程得: $V_2^* = \frac{\beta_2 I_2^* (M_2 - V_2^*)}{v_2}$, 代入第 2 个方程有: $\beta_2 (M_2 - V_2^*) < \frac{d_3 (1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*) v_2}{\alpha_2 S_2^*}$,

则有:

$$a_2 > \left[\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} \right] (v_2 + \beta_2 I_2^*) + d_3 (v_2 + \beta_2 I_2^*) - \frac{d_3 (1 + k_3 S_2^*) v_2}{1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*} >$$

$$\left[\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} \right] (v_2 + \beta_2 I_2^*) + d_3 (v_2 + \beta_2 I_2^*) - d_3 v_2 > 0,$$

$$a_3 = -a_{11} a_{22} a_{33} + a_{11} a_{23} a_{32} - a_{21} a_{13} a_{32} =$$

$$\left[\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} \right] d_3 (v_2 + \beta_2 I_2^*) - \mu_2 \beta_2 (M_2 - V_2^*) \frac{\alpha_2 S_2^* (1 + k_3 S_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} >$$

$$\left[\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} \right] d_3 (v_2 + \beta_2 I_2^*) - \mu_2 d_3 v_2 > 0,$$

$$a_1 a_2 - a_3 >$$

$$\left[\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} + d_3 + v_2 + \beta_2 I_2^* \right] \left[\left(\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} \right) (v_2 + \beta_2 I_2^*) + d_3 (v_2 + \beta_2 I_2^*) - d_3 v_2 \right] -$$

$$\left[\mu_2 + \frac{\alpha_2 V_2^* (1 + k_4 V_2^*)}{(1 + k_3 S_2^* + k_4 V_2^*)^2} \right] d_3 (v_2 + \beta_2 I_2^*) > 0.$$

根据 Routh-Hurwitz 判别准则, J_2^* 的所有特征根均具有负实部, 地方病平衡点 E_2^* 局部渐近稳定。

定理 7 当 $R_{10} > 1$ 时, 如果系统(10)的地方病平衡点 $E_2^* = (S_2^*, I_2^*, V_2^*)$ 存在且唯一, 则是全局渐近稳定的。

证明 通过计算, 斑块 2 中线性化子系统的雅可比矩阵为:

$$J_2 = \begin{pmatrix} -\mu_2 - \frac{\alpha_2 V_2 (1 + k_4 V_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & 0 & -\frac{\alpha_2 S_2 (1 + k_3 S_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} \\ \frac{\alpha_2 V_2 (1 + k_4 V_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & -d_3 & \frac{\alpha_2 S_2 (1 + k_3 S_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} \\ 0 & \beta_2 (M_2 - V_2) & -(v_2 + \beta_2 I_2) \end{pmatrix},$$

相关联的第二加性复合矩阵为:

$$J_2^{[2]} = \begin{pmatrix} -d_3 - \mu_2 - \frac{\alpha_2 V_2 (1 + k_4 V_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & \frac{\alpha_2 S_2 (1 + k_3 S_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & \frac{\alpha_2 S_2 (1 + k_3 S_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} \\ \beta_2 (M_2 - V_2) & -(\mu_2 + v_2 + \beta_2 I_2) - \frac{\alpha_2 V_2 (1 + k_4 V_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2 V_2 (1 + k_4 V_2)}{(1 + k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & -(d_3 + v_2 + \beta_2 I_2) \end{pmatrix}.$$

定义 $P_2 = \text{diag}\left(1, \frac{I_2}{V_2}, \frac{I_2}{V_2}\right)$, 且令 F_2 表示斑块 2 的向量场, 则有 $P_2 F_2 P_2^{-1} = \text{diag}\left(0, \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \frac{\dot{V}_2}{V_2}, \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \frac{\dot{V}_2}{V_2}\right)$, 且:

$$P_2 J_2^{[2]} P_2^{-1} =$$

$$\begin{pmatrix} -d_3 - \mu_2 - \frac{\alpha_2 V_2 (1+k_4 V_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & \frac{V_2}{I_2} \frac{\alpha_2 S_2 (1+k_3 S_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & \frac{V_2}{I_2} \frac{\alpha_2 S_2 (1+k_3 S_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} \\ \frac{I_2}{V_2} \beta_2 (M_2 - V_2) & -(\mu_2 + v_2 + \beta_2 I_2) - \frac{\alpha_2 V_2 (1+k_4 V_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_2 V_2 (1+k_4 V_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & -(d_3 + v_2 + \beta_2 I_2) \end{pmatrix},$$

矩阵 $Q^{(2)} = P_{2F_2} P_2^{-1} + P_2 J_2^{[2]} P_2^{-1}$ 可以用矩阵块 $Q^{(2)} = \begin{pmatrix} Q_{11}^{(2)} & Q_{12}^{(2)} \\ Q_{21}^{(2)} & Q_{22}^{(2)} \end{pmatrix}$ 的形式表示。其中:

$$Q_{11}^{(2)} = -d_3 - \mu_2 - \frac{\alpha_2 V_2 (1+k_4 V_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2}, Q_{12}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{V_2}{I_2} \frac{\alpha_2 S_2 (1+k_3 S_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & \frac{V_2}{I_2} \frac{\alpha_2 S_2 (1+k_3 S_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} \end{pmatrix},$$

$$Q_{21}^{(2)} = \begin{pmatrix} \frac{I_2}{V_2} \beta_2 (M_2 - V_2) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$Q_{22}^{(2)} = \begin{pmatrix} -(\mu_2 + v_2 + \beta_2 I_2) - \frac{\alpha_2 V_2 (1+k_4 V_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} + \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \frac{\dot{V}_2}{V_2} & 0 \\ \frac{\alpha_2 V_2 (1+k_4 V_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} & -(d_3 + v_2 + \beta_2 I_2) + \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \frac{\dot{V}_2}{V_2} \end{pmatrix}.$$

然后有 $m(Q^{(2)}) = \sup(g_1^{(2)}, g_2^{(2)})$, 其中:

$$g_1^{(2)} = -d_3 - \mu_2 - \frac{\alpha_2 V_2 (1+k_4 V_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} + \frac{V_2}{I_2} \frac{\alpha_2 S_2 (1+k_3 S_2)}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)^2} \leq \frac{V_2}{I_2} \frac{\alpha_2 S_2}{(1+k_3 S_2 + k_4 V_2)} - d_3 - \mu_2 \leq \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \mu_2,$$

$$g_2^{(2)} = \frac{I_2}{V_2} \beta_2 (M_2 - V_2) + \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \frac{\dot{V}_2}{V_2} - v_2 - \beta_2 I_2 - \mu_2.$$

由系统(10)中第 3 个方程得 $\frac{\dot{V}_2}{V_2} = -v_2 + \frac{\beta_2 I_2 (M_2 - V_2)}{V_2}$, 代入上式得: $g_2^{(2)} \leq \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \mu_2$. 因此, $m(Q^{(2)}) \leq \frac{\dot{I}_2}{I_2} - \mu_2$.

由于 $0 \leq I_2(t) \leq N(t) \leq \frac{A_1 + A_2}{\min(\mu_1, \mu_2)}$, 如果 t 足够大, 那么 $\frac{\ln(I_2(t)) - \ln(I_2(0))}{t} \leq \frac{\mu_2}{2}$, 于是, 当 t 足够大时, 有:

$$\frac{1}{t} \int_0^t m(Q^{(2)}) ds \leq \frac{1}{t} \int_0^t \left(\frac{\dot{I}_2}{I_2} - \mu_2 \right) ds = \frac{\ln(I_2(t)) - \ln(I_2(0))}{t} - \mu_2 \leq -\frac{\mu_2}{2}.$$

故可得 $\bar{q}_2^{(2)} := \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t m(Q^{(2)}) ds \leq -\frac{\mu_2}{2} < 0$, 这表明 $E_2^* = (S_2^*, I_2^*, V_2^*)$ 是全局渐近稳定的。 证毕

3 数值模拟

基于 Gao 等人^[11]的工作, 具体参数值见表 1。

图 1 为平衡点稳定性数值模拟。其中图 1a 表示当 $R_{10} < 1, R_{20} < 1$, 整个系统疾病灭绝, 即无病平衡点 $E_0 = (S_1^0, 0, 0, S_2^0, 0, 0)$ 全局渐近稳定; 图 1b 表示当 $R_{10} < 1, R_{20} > 1$, 斑块 1 疾病灭绝, 斑块 2 疾病持续生存, 边界平衡点 $\bar{E} = (S_1^0, 0, 0, \bar{S}_2, \bar{I}_2, \bar{V}_2)$ 全局渐近稳定。对于图 1c 和图 1d 有如下结论:

1) 当 $\alpha_1 = 3 \times 10^{-3}, \alpha_2 = 0.5 \times 10^{-3}$, 这时 $R_{10} = 1.0996 > 1, R_{20} = 0.8152 < 1, B_1 = -5.6278 \times 10^{-5}, B_2 = -0.0158$, 满足条件(13), 这时方程(12)有两个正实根: $I_2^{1*} = 128, I_2^{2*} = 1129$, 与之对应的 $S_2^{1*} = 4.1637 \times 10^5, S_2^{2*} = -1.7118 \times 10^3$, 这里 $S_2^{2*} < 0$, 不符合生物学意义。因此, 系统(10)具有唯一的正平衡点 $E_2^* = (416370, 128, 218.6788)$ 是全局渐近稳定的。对应于图 1c。

2) 当 $\alpha_1 = 3 \times 10^{-3}, \alpha_2 = 1 \times 10^{-3}$, 这时 $R_{10} = 1.0996 > 1, R_{20} = 1.1529 > 1, B_1 = -8.6350 \times 10^{-5}, B_2 = 0.0180$ 满足条件(13)。这时方程(12)有两个正实根: $I_2^{1*} = 403.2, I_2^{2*} = 1131.6$, 与之对应的 $S_2^{1*} = 3.0143 \times$

$10^5, S_2^{2*} = -2.7997 \times 10^3$, 这里 $S_2^{2*} < 0$, 不符合生物学意义。因此, 系统(10)具有唯一的正平衡点 $E_2^* = (301430, 403.2, 524.4537)$ 是全局渐近稳定的。对应于图 1d。因此, 只要 $R_{10} > 1$, 系统就具有唯一的正平衡点且全局渐近稳定。

表 1 系统(3)、(4)的相关参数取值

Tab. 1 Related parameters of the system (3), (4)

参数	意义	值	来源
A_i	斑块 i 易感者出生率	300	文献[11]
α_1	S_1 和 I_1 的传播率	3×10^{-3}	估计
α_2	S_2 和 I_2 的传播率	$0.5 \times 10^{-3}, 1 \times 10^{-3}$	估计
k_j	抑制率	3×10^{-3}	估计
θ_s	S_1 从斑块 1 向斑块 2 的转移率	0.2	文献[11]
θ_I	I_1 从斑块 1 向斑块 2 的转移率	0.4	文献[11]
μ_i	S_i, I_i 的自然死亡率	1.2×10^{-3}	文献[11]
γ_i	斑块 i 治愈率	0.4	文献[11]
δ_i	斑块 i 的病死率	0.1	文献[11]
v_i	斑块 i 蚊子自然死亡率	0.06	文献[11]
β_i	斑块 i 寄主对蚊子的传输速率	8×10^{-5}	文献[11]
M_1	斑块 1 蚊子的承载能力	1 000	文献[11]
M_2	斑块 2 蚊子的承载能力	1 500	文献[11]

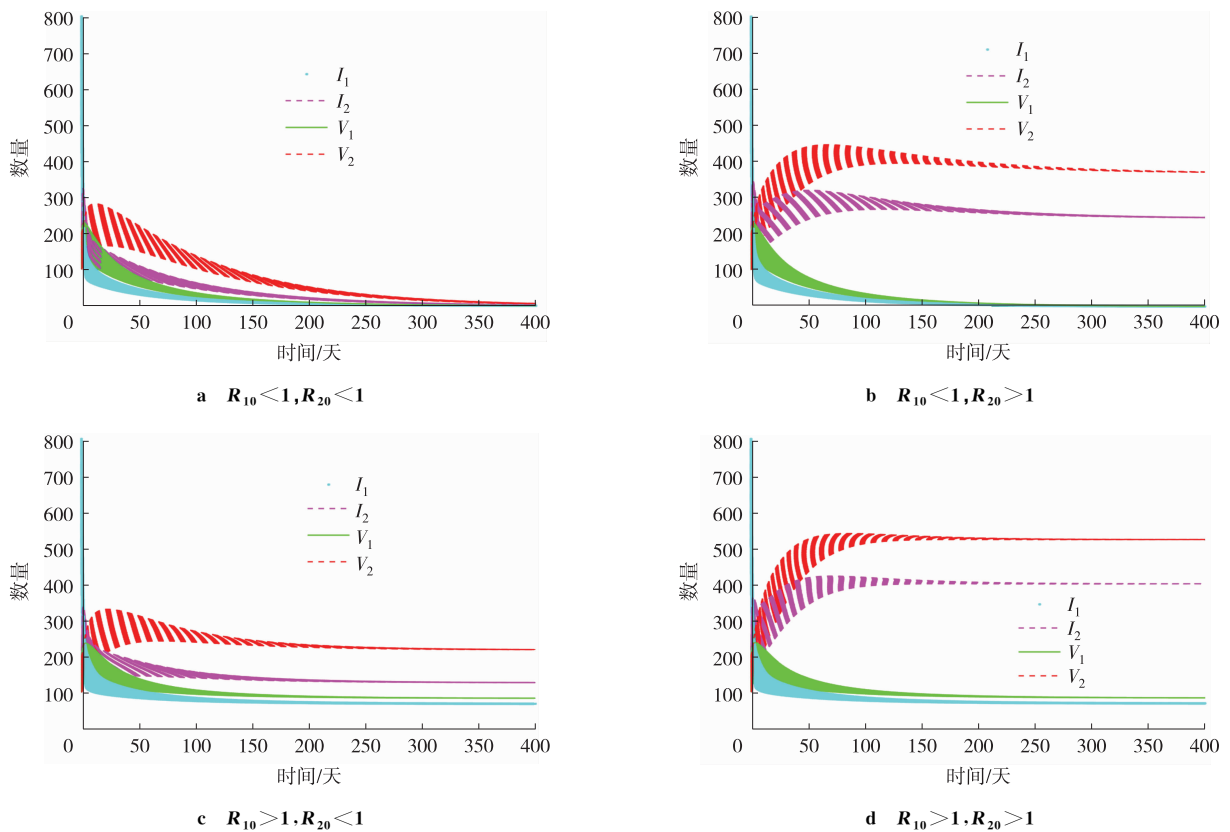


图 1 平衡点稳定性数值模拟

Fig. 1 Numerical simulation of equilibrium point stability

4 结论

本文考虑了一类具有斑块迁移的 RVFV 模型,采用分斑块讨论的方法分析了 2 个斑块疾病的阈值动力学。最终得到只要 $R_{10} > 1$,该疾病在所有 2 个斑块中持续生存;如果 $R_{10} \leq 1$ 且 $R_{20} > 1$,则该疾病在斑块 1 中灭绝,但在斑块 2 中持续生存;如果 $R_{10} \leq 1$ 且 $R_{20} \leq 1$,则该疾病在 2 个斑块中灭绝, E_0 全局渐近稳定。同时,数值模拟验证了结论的正确性。本文的研究加强了 RVFV 在空间传播上的认识。

参考文献:

- [1] MCMILLEN C M, ARORA N, BOYLES D A, et al. Rift Valley fever virus induces fetal demise in Sprague-Dawley rats through direct placental infection[J]. *Science Advances*, 2018, 4(12): eaau9812.
- [2] ALBE J R, BOYLES D A, WALTERS A W, et al. Neutrophil and macrophage influx into the central nervous system are inflammatory components of lethal Rift Valley fever encephalitis in rats[J]. *PLoS Pathogens*, 2019, 15(6): 1-26.
- [3] WALTERS A W, KUJAWA M R, ALBE J R, et al. Vascular permeability in the brain is a late pathogenic event during Rift Valley fever virus encephalitis in rats[J]. *Virology*, 2019, 526: 173-179.
- [4] NIELSEN S S, ALVAREZ J, BICOUD D J, et al. Rift Valley fever-epidemiological update and risk of introduction into Europe [J]. *EFSA Journal*, 2020, 18(3): e06041.
- [5] YOUSSEF H, SUBIROS M, DENNETIERE G, et al. Rift Valley fever Outbreak, Mayotte, France, 2018–2019[J]. *Emerging Infectious Diseases*, 2020, 26(4): 769-772.
- [6] OYMANS J, WICHGERS SCHREUR P J, VAN KEULEN L, et al. Rift Valley fever virus targets the maternal-foetal interface in ovine and human placentas[J]. *PLoS Neglected Tropical Diseases*, 2020, 14(1): 1-18.
- [7] LINTHICUM K J, DAVIES F G, KAIRO A, et al. Rift Valley fever virus (family Bunyaviridae, genus *Phlebovirus*). Isolations from Diptera collected during an inter-epizootic period in Kenya[J]. *Epidemiology and Infection*, 1985, 95(1): 197-209.
- [8] World Health Organization. Rift Valley fever[EB/OL]. (2018-02-19)[2021-11-10]. <http://www.who.int/mediacentre/factsheets/fs207/en/>.
- [9] GAFF H D, HARTLEY D M, LEAHY, N P. An epidemiological model of Rift Valley Fever [J]. *Electronic Journal of Differential Equations*, 2007, 115: 1-12 .
- [10] MPESHE S C, HAARIO H, TCHUENCHE J M. A mathematical model of Rift Valley fever with human host [J]. *Acta Biotheoretica*, 2011, 59: 231-250.
- [11] GAO D, RUAN S, COSNER C, et al. Modeling the spatial spread of Rift Valley fever in Egypt [J]. *Bulletin of Mathematical Biology*, 2013, 75: 523-542.
- [12] AHMED A, ALI Y, ELDUMA A, et al. Unique outbreak of Rift Valley fever in Sudan, 2019 [J]. *Emerging Infectious Diseases*, 2020, 26(12): 3030.
- [13] JAIN S, ROCHA I C N, MAHESHWARI C, et al. Chikungunya and COVID-19 in Brazil: the danger of overlapping crises [J]. *Journal of Medical Virology*, 2021, 93(7): 4090.
- [14] HARAPAN H, RYAN M, YOHAN B, et al. COVID-19 and dengue: double punches for dengue endemic countries in Asia [J]. *Reviews in Medical Virology*, 2021, 31(2): e2161.
- [15] SIEDNER M J, KRAEMER J D, MEYER M J, et al. Access to primary healthcare during lockdown measures for COVID-19 in rural South Africa: a longitudinal cohort study [J]. *MedRxiv: the preprint server for health sciences*, 2020.
- [16] Center for Infectious Disease Research and Policy (CIDRAP). Rift Valley Fever outbreak reported in Kenya [EB/OL]. (2021-01-26)[2021-11-10]. <https://www.cidrap.umn.edu/news-perspective/2021/01/news-scan-jan-26-2021>.
- [17] ROSE S. Rift Valley Fever in Eastern Kenya [EB/OL]. (2021-02-18)[2021-11-10]. <https://www.outbreakobservatory.org/outbreakthursday-1/2/17/2021/rift-valley-fever-in-eastern-kenya>.
- [18] LIU W, SUN F J, TONG Y G, et al. Rift Valley fever virus imported in to China from Angola [J]. *The Lancet Infectious Diseases*, 2016, 16(11): 1226-1226.
- [19] SHOPE R E, PETERS C J, DAVIES F G. The spread of Rift Valley fever and approaches to its control [J]. *Bull WHO*, 1982, 60: 299-304.
- [20] BEDDINGTON J. Mutual interference between parasites or predator and its effect on searching efficiency [J]. *The Journal of*

Animal Ecology, 1975, 44(1): 331-340.

- [21] DEANGELIS D, GOLDSTEIN R, ONEILL R. Model for trophic interaction[J]. Ecology, 1975, 56(4): 881-892.
- [22] VAN DEN DRIESSCHE P, WATMOUGH J. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission[J]. Mathematical Biosciences, 2002, 180: 29-48.
- [23] LASALLE J P. The stability of dynamical systems[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1976.
- [24] LI M Y, MULDOWNNEY J S. A geometric approach to global-stability problems[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 1996, 27: 1070-1083.
- [25] LI M Y, MULDOWNNEY J S. On RA Smith's autonomous convergence theorem[J]. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 1995, 25(1): 365-379.

A Two-Patch Rift Valley Fever Virus Model with Beddington-DeAngelis Incidence

SANG Rui, WU Hao, ZHANG Long

(College of Mathematics and System Sciences, Xinjiang University, Urumqi Xinjiang 830046, China)

Abstract: [Purposes] In order to study the impact of population migration on the spread of the Rift Valley fever disease, a two-patch Rift Valley fever virus model is proposed based on the Beddington-DeAngelis incidence function. [Methods] By constructing Lyapunov function and applying LaSalle invariance principle, the global asymptotic stability of the disease-free equilibrium of the system is proved. Routh-hurwit criterion and geometric method are used to prove the stability of the positive equilibrium and the positive equilibrium of the system is global asymptotic stable. [Results] The basic regeneration number R_{10} and R_{20} of the two patches is got, established the threshold criteria for local and global asymptotic stability of the equilibrium and the theoretical results were verified by numerical simulation. [Conclusions] In two patches, the disease is extinct if $R_{10} \leq 1$, $R_{20} \leq 1$, while it is uniform persistent if $R_{10} > 1$.

Keywords: Rift Valley fever; Beddington-DeAngelis functional response; patch model; basic reproduction number; threshold dynamics

(责任编辑 黄颖)