DOI:10.11721/cqnuj20230314

基于交互间隙法的内部混合边界条件反散射问题*

汪晓青，刘立汉，吴雪娇
(重庆师范大学 数学科学学院，重庆 401331)

摘要:【目的】内部混合边界条件反散射问题在无损探测等方面有着广泛的应用。【方法】从位于腔体内部封闭曲线上点源产生的散射波出发，基于交互间隙法，构造交互间隙泛函，根据交互间隙泛函的范数性质来确定腔体的位置和形状。【结果】证明了内部混合边界条件反问题的唯一性和交互间隙泛函是单射且稠密的。【结论】由内部点源测量数据可以唯一确定未知腔体的位置、形状和阻抗函数。

关键词:交互间隙法；内部反散射问题；混合边界条件；阻抗函数

中图分类号:O221.6　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2023)03-0106-08

声波和电磁波反散射问题在雷达、声纳、医学成像、地下成像等方面有着广泛应用，该相关理论和方法的研究取得了很大的进展，见文献[1-4]。通常，发射器和接收器都位于目标外部，使用不同的反演技术从外部测量数据中提取目标的信息[5-11]。然而，在设备内部完整性的无损检测中，需要解决从设备内部的接收器和发射器获得的内部测量数据的反问题。目前，许多论文都考虑了具有内部测量数据的腔体反问题，如秦海华等人[12-13]对 Helmholtz 方程使用线性采样方法，在 Dirichlet 和 Robin 边界条件下确定不可穿透腔体的位置和形状；Cakoni 等人[14]利用线性采样法研究了内部可穿透腔体问题；秦海华等人[15]利用牛顿迭代法解决了带有 Dirichlet 边界条件的不可穿透腔体内部反散射问题；在文献[16-18]中，还用了其它的方法来解决形状重构的内部反问题。上述所有工作都仅限于重建腔体的形状。本文利用内部测量数据解决不可穿透腔体的内部混合边界条件反问题，主要是根据腔体内部曲线上测量的散射数据的知识，利用交互间隙方法[19]来确定腔体的位置和形状，在求解近场方程的基础上，得到一个积分方程来确定阻抗函数。

1 反散射问题

本文考虑具有混合边界条件的腔体 D 的散射问题，假设 $D\subset\mathbf{R}^2$ 是有界单连通区域，且边界 $\partial D=\bar{\Gamma}_D\cup\bar{\Gamma}_I$ 是 Lipschitz 的，这里 Γ_D,Γ_I 是 ∂D 的两个不相交的开子集。用 $\lambda(x)$ 表示 Γ_I 上的阻抗函数，$\lambda(x)$ 是一个连续函数，使得存在一个正数 λ_0，对于 $x\in\Gamma_I$，有 $\lambda(x)\geqslant\lambda_0>0$。$B\subset D$ 是分段非均匀介质的区域，即折射率 $n(x)$ 是分段连续的，在 B 的外部，折射率为常数。为了一致性和简单性，在本文中，对于 $x\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{B}$，令 $n(x)=1$。如果 u^i 是由光滑曲线 $C\subset D\backslash\overline{B}$ 上点源 x_0 所产生的格林函数，要解决的散射问题是找到一个解 $u\in H^1(D)$ 满足下列方程：

$$\begin{gathered}\Delta u+k^2n(x)u=0,\ x\in D,\\ u=0,\ x\in\Gamma_D,\\ \frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda(x)u=0,\ x\in\Gamma_I。\end{gathered}\tag{1}$$

上式中，k 为波速，$u=u^i+u^s$ 是总场，u^s 是由 u^i 所引起的散射场，$\boldsymbol{\nu}$ 为 ∂D 上的单位外法向量，u^i 为自由空间格

* **收稿日期:**2022-06-06　**修回日期:**2023-04-06　**网络出版时间:**2023-05-05T11:04
资助项目:国家自然科学基金青年项目(No. 12001075)；重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0167)；重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJZD-K202100503, No. KJQN201900544)；重庆市留学人员回国创新类项目(No. cx2021061, No. cx2019022)；重庆师范大学青年拔尖人才培育计划(No. 02030307/0052)；重庆市巴渝学者计划(No. BYQNCS2020002)；重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014)
第一作者简介:汪晓青，女，研究方向为数学物理反问题，E-mail: 1371582739@qq.com；**通信作者:**刘立汉，教授，博士，E-mail: mathsedu2013@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms2/detail/50.1165.N.20230504.1854.002.html

林函数，则在 $\mathbf{R}^2$ 中，对于 $x\neq x_0$，$u^i(x,x_0)=\Phi(x,x_0)+\Phi^s(x,x_0)=G(x,x_0)$。上式中，$\Phi(x,x_0)$是 Helmholtz 方程 $\Delta u(x)+k^2u(x)=-\delta(x-x_0)$的基本解，且 $\Phi(x,x_0)=\dfrac{1}{4}H_0^{(1)}(k|x-x_0|)$，这里 $H_0^{(1)}$ 是第一类零阶 Hankel 函数。记 G 是如下方程的解 $\Delta G(x,x_0)+k^2n(x)G(x,x_0)=-\delta(x-x_0)$，且符合 Sommerfeld 条件，$\lim\limits_{r\to\infty}r^{1/2}\left(\dfrac{\partial G}{\partial r}-ikG\right)=0$，$r=|x|$。根据文献[20]知，$u^i$，$u^s$ 满足交互关系，即 $x,x_0\in D\setminus\overline{B}$，$u^s(x,x_0)=u^s(x_0,x)$，$\lim\limits_{r\to\infty}r^{1/2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0$。

为了更加方便的研究问题(1)，需要定义以下几个空间：令 $\Gamma_0\subset\Gamma=\partial D$ 是边界的一部分，定义：

$$H^{1/2}(\Gamma_0)=\{u|_{\Gamma_0}:u\in H^{1/2}(\Gamma)\},\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_0)=\{u\in H^{1/2}(\Gamma):\mathrm{supp}\ u\subset\overline{\Gamma}_0\},H^{-1/2}(\Gamma_0)=\{H^{1/2}(\Gamma_0)\text{的对偶空间}\}。$$

与问题(1)相对应的外部混合边界条件问题是，对于 $f\in H^{1/2}(\Gamma_D)$，$h\in H^{-1/2}(\Gamma_I)$，求 $u\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2\setminus\overline{D})$满足如下方程：

$$\begin{gathered}\Delta u+k^2n(x)u=0,\ x\in\mathbf{R}^2\setminus D,\\ u=f,\ x\in\Gamma_D,\\ \frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda(x)u=g,x\in\Gamma_I,\\ \lim_{r\to\infty}r^{1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)=0。\end{gathered}\tag{2}$$

根据文献[21]可知，问题(2)是适定的。令 Ω 是 D 内的一个有界 Lipschitz 域，D_C 是 C 的内部，则有 $D_C\subset\Omega\subset D$，本文中的反散射问题是根据$\partial\Omega$ 上 u^s 的柯西数据来确定 D 的形状和阻抗函数 λ。

定义 1[19]　设非零数 $k^2\in\mathbf{R}$，若存在一个非平凡的解 $u\in H^1(D)$，满足：

$$\begin{gathered}\Delta u+k^2n(x)u=0,\ x\in D,\\ u=0,\ x\in\partial D。\end{gathered}$$

则称 k^2 是$-\Delta$ 在 D 内的一个广义的 Dirichlet 特征值。

接下来，证明具有混合边界条件反散射问题的唯一性定理。

定理 1　假设 k^2 不是$-\Delta$ 在 D_C 或 Ω 内的一个广义的 Dirichlet 特征值，又设 D_1 和 D_2 分别是两个对应阻抗为 λ_1 和 λ_2 的散射物体，使得在固定波数下，所有点源 $x_0\in C$ 对应的散射场均在$\partial\Omega$ 上重合，则 $D_1=D_2$，$\lambda_1=\lambda_2$。

证明　i) 先证 $D_1=D_2$。假设 $D_1\neq D_2$ 是包含 Ω 的两个有界区域，u_1^s，u_2^s 分别是方程(1)的区域 D 被 D_1，D_2 替代后的解，又设 $u_1^s(x,x_0)=u_2^s(x,x_0)$，$\forall x\in\partial\Omega$，$x_0\in C$，令 $v^s=u_1^s-u_2^s$，$\forall x_0\in C$，则有：

$$\begin{gathered}\Delta v^s+k^2n(x)v^s=0,\ x\in\Omega,\\ v^s=0,\ x\in\partial\Omega。\end{gathered}$$

由于 k^2 不是$-\Delta$ 在 Ω 中的一个广义 Dirichlet 特征值，则在 $\overline{\Omega}$ 内，$v^s=0$。假设 D_0 是 $D_1\cap D_2$ 的连通分支，且 $\Omega\subset D_0$，由解析性可得，在 D_0 内，$v^s=0$，即 $u_1^s(x,x_0)=u_2^s(x,x_0)$，$\forall x\in D_0$，$x_0\in C$，根据交互关系，有 $u_1^s(x_0,x)=u_2^s(x_0,x)$，$\forall x_0\in C$，$x\in D_0\setminus\overline{B}$，再利用上面的讨论，有 $u_1^s(x,x_0)=u_2^s(x,x_0)$，$\forall x_0,x\in D_0\setminus\overline{B}$。

不失一般性，令 $x^*\in\partial D_1$ 且 $x^*\notin\partial D_2$ 使得 $O_\varepsilon(x^*)\cap\partial D_1\subset\Gamma_{1D}$ 或 $O_\varepsilon(x^*)\cap\partial D_1\subset\Gamma_{1I}$，这里 $O_\varepsilon(x^*)$是以 x^* 为中心，ε 为半径的一个小邻域。令 T 是 $O_\varepsilon\cap\partial D_1$ 上的 Dirichlet 或 Robin 边界条件，选择足够小的 $h>0$，使得 $z_n:=x^*+\dfrac{h}{n}\boldsymbol{\nu}(x^*)\in D_0\setminus\overline{B}$，$n=1,2,\cdots$，这里 $\boldsymbol{\nu}(x^*)$是∂D_1 上指向 D_1 外部的单位法向量。

下面，考虑 $u_{n,j}^s(x)$是散射问题(1)对应 $D=D_j$，$\lambda=\lambda_j$，$j=1,2$ 的解，则 $u_{n,1}^s(x,z_n)=u_{n,2}^s(x,z_n)$，$\forall x,z_n\in D_0\setminus\overline{B}$。一方面，由正问题解的适定性，则存在 $c>0$，使得：$\lim\limits_{n\to\infty}\|Tu_1^s(x,z_n)\|_{H^S(\partial D_0\cap O_\varepsilon)}=\lim\limits_{n\to\infty}\|Tu_2^s(x,z_n)\|_{H^S(\partial D_0\cap O_\varepsilon)}=\|Tu_2^s(x,x^*)\|_{H^S(\partial D_0\cap O_\varepsilon)}\leqslant c$；另一方面，$\lim\limits_{n\to\infty}\|Tu_1^s(x,z_n)\|_{H^S(\partial D_0\cap O_\varepsilon)}=\lim\limits_{n\to\infty}\|T\Phi(x,z_n)\|_{H^S(\partial D_0\cap O_\varepsilon)}=\infty$。

这里，若 T 为 Dirichlet 边界算子，则 $s=1/2$，若 T 为 Robin 边界算子，则 $s=-1/2$。故矛盾，从而 $D_1=D_2$。

ii) 再证 $\lambda_1=\lambda_2$。假设 $\Gamma_{2D}\subset\Gamma_{1D}$ 不成立,令 $\Gamma_0\subset\Gamma_{2D}\backslash(\Gamma_{2D}\cap\Gamma_{1D})\neq\varnothing$ 是一个连通的边界弧,根据文献[12]得到,$D=D_1=D_2$,$u=u_1(x,x_0)=u_2(x,x_0)$,$\forall x_0\in C$。由 u 在 Γ_{2D} 上符合 Dirichlet 条件,则在 Γ_0 上,$u=0$,又因为 $\Gamma_0\subset\Gamma_{1I}$,则在 Γ_0 上,$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda_1 u=0$,因此在 Γ_0 上,$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0$。由 Holmgren 定理可知,$\forall x\in D\backslash\{x_0\}$,$u(x)=0$,注意 $u(x)$ 在 $D\backslash\{x_0\}$ 内都解析,则 $u^s(x,x_0)=-\Phi(x,x_0)$,$x\neq x_0$,当 $x\to x_0$ 时,u^s 无界,得出矛盾,故 $\Gamma_{2D}\subset\Gamma_{1D}$,同理可证 $\Gamma_{1D}\subset\Gamma_{2D}$,故 Γ_D 唯一,从而 Γ_I 唯一。在 D 内,$u=u_1=u_2$,特别的,在 Γ_I 上,$u_1=u_2$,$\frac{\partial u_1}{\partial \boldsymbol{\nu}}=\frac{\partial u_2}{\partial \boldsymbol{\nu}}$,故在 Γ_I 上,$(\lambda_1-\lambda_2)u=0$。假设对于 $x^*\in\Gamma_I$,$\lambda_1\neq\lambda_2$,由 λ 的连续性,则存在一个 x^* 的领域 $\Omega_\varepsilon(x^*)$ 使得,在 $\Omega_\varepsilon(x^*)\cap\Gamma_I$ 上,$\lambda_1\neq\lambda_2$,则表明 $u=0$,$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}=0$。由 Holmgren 定理可知,$\forall x\in D\backslash\{x^*\}$,$u(x)=0$,故矛盾,从而 $\lambda_1=\lambda_2$。 证毕

2 交互间隙法

在这一部分,根据交互间隙法来重构腔体的形状以及阻抗函数 λ。首先定义两个空间:

$$H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})=\{v\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega}):\Delta v+k^2 n(x)v=0,x\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega},\lim_{r\to\infty}r^{\frac{1}{2}}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-\mathrm{i}kv\right)=0,$$

$$U=\{u:u\text{ 是方程(1)的解且 }u^i=G(x,x_0),x_0\in C\}。$$

对于 $\forall v\in H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})$,$u\in U$,定义如下的交互间隙泛函 $R(u,v)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}s$,上式中 $\boldsymbol{\nu}$ 是 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量,$R(u,v)$ 可被看作算子 $R:H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})\to L^2(C)$,对所有 $x_0\in C$,由于 u 依赖于 x_0,则算子 R 定义为

$$R(v)(x_0)=R(u,v)。\tag{3}$$

接下来,证明如果 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D_c 内的一个广义 Dirichlet 特征值,则 R 是单射且稠密的。

定理 2 假设 $\Gamma_I\neq\varnothing$,式(3)定义的算子 $R:H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})\to L^2(C)$ 是一个单射。

证明 令 $v\in H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})$,使得 $Rv=0$,即对 $u\in U$,有 $R(u,v)=0$。根据格林公式和边界条件,则:

$$R(u,v)=\int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}-v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_I}u\left(\frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda v\right)\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s。$$

注意到 $\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\bigg|_{\Gamma_D},u|_{\Gamma_I}\right)$ 在 $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)\times\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)$ 中,接下来说明 $\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\bigg|_{\Gamma_D},u|_{\Gamma_I}\right):u\in U\right\}$ 在 $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_D)\times\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_I)$ 中稠密。根据对偶性,假设存在 $f\in H^{1/2}(\Gamma_D)$,$g\in H^{-1/2}(\Gamma_I)$ 使得:

$$\int_{\Gamma_D}f\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_I}gu\,\mathrm{d}s=0,\ \forall u\in U。$$

下证 f,g 恒为零。令 w 是下列方程的解:

$$\Delta w+k^2 n(x)w=0,\ x\in D,$$
$$w=-f,\ x\in\Gamma_D,$$
$$\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda(x)w=g,\ x\in\Gamma_I。$$

根据文献[21]可知,上述方程在 $H^1(D)$ 中有唯一解,且它连续依赖于 f,g。对 $\forall u\in U$,$u=u^s+G(\cdot,x_0)$,则:

$$0=\int_{\Gamma_D}f\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s+\int_{\Gamma_I}gu\,\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_I}u\left(\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda w\right)\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_D}w\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\left(u\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}-w\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\partial D}(u^s+G(\cdot,x_0))\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}-w\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\nu}}(u^s+G(\cdot,x_0))\mathrm{d}s=\int_{\partial D}u^s\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}+G(\cdot,x_0)\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}-w\frac{\partial u^s}{\partial \boldsymbol{\nu}}-w\frac{\partial G(\cdot,x_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\partial D}\left(u^s\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}-w\frac{\partial u^s}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)+\left(G(\cdot,x_0)\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}-w\frac{\partial G(\cdot,x_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}s=\int_{\partial D}G(\cdot,x_0)\frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}}-w\frac{\partial G(\cdot,x_0)}{\partial \boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s=w(x_0)。$$

则 $\forall x_0\in C$,有 $w(x_0)=0$。由于 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D_c 内的一个广义 Dirichlet 特征值,则在 $\overline{D}_c$ 内 $w=0$。由唯一延拓定理,在 D 内,得到 $w=0$,由迹定理可知,$f=0$,$g=0$。根据方程(2)的唯一性可得,在 $\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$ 内,$v=0$,又

$\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}\subset\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega}$，由唯一延拓定理知，在 $\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega}$ 中，$v=0$。故 R 是一个单射。　　证毕

定理 3　假设 $\Gamma_I\neq\varnothing$，式(3)定义的算子 $R:H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})\to L^2(C)$ 是稠密的。

证明　令 $\varphi\in L^2(C)$ 使得对于所有 $v\in H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})$，有 $(\varphi,Rv)=0$。由式(3)和 R 的双线性，则 $(\varphi,Rv)=\int_C\varphi(x_0)R(u,v)\mathrm{d}s(x_0)=R(h,v)$，上式中 $h(x)=\int_C\varphi(x_0)u(x,x_0)\mathrm{d}s(x_0)$。对上式利用格林公式和问题(1)的边界条件，对 $v\in H(\mathbf{R}^2\backslash\overline{\Omega})$，有：

$$0=R(h,v)=\int_{\partial\Omega}\left(h\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}-v\frac{\partial h}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\left(h\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}-v\frac{\partial h}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right)\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_I}h\left(\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{\nu}}+i\lambda v\right)\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_D}v\frac{\partial h}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s。\tag{4}$$

定义：

$$v_g(x)=\int_C\Phi(x,y)g(y)\mathrm{d}s(y),x\in\mathbf{R}^2\backslash C,\tag{5}$$

式中 $g\in L^2(C)$。根据文献[21]，可知 $\{v_g|_{\partial D}:g\in L^2(C)\}$ 在 $H^1(D)$ 中稠密，由迹定理和方程(2)的适定性可以计算得 $\left(v_g,\frac{\partial v_g}{\partial\boldsymbol{\nu}}+i\lambda v\right)$ 在 $H^{1/2}(\Gamma_D)\times H^{-1/2}(\Gamma_I)$ 中稠密。因此式(4)表明在 Γ_I 上 $h(x)=0$，在 Γ_D 上 $\frac{\partial h}{\partial\boldsymbol{\nu}}=0$，则 h 在边界上有零柯西数据。令 B_R 是一个足够大的球使得 $\overline{D}\subset B_R$，在 $B_R\backslash\overline{D}$ 中，用 0 扩充 h，可以得到 $h(x)|_{B_R\backslash\overline{B}}\in H^1(B_R\backslash\overline{B})$ 且 $h(x)$ 在 $B_R\backslash\overline{B}$ 中满足 Helmholtz 方程 $\Delta h+k^2n(x)h=0$，则 $h(x)$ 在 $B_R\backslash\overline{B}$ 内解析。又由于在 $B_R\backslash\overline{D}$ 中，$h(x)=0$，根据延拓定理得，在 $D\backslash\overline{D}_C$ 内，$h(x)=0$，因此，在曲线 C 上，$h(x)=0$。又因为在 D_C 内，$\Delta h+k^2n(x)h=0$ 且 k^2 不是 $-\Delta$ 在 D_C 内的一个广义 Dirichlet 特征值，则在 D_C 内 $h(x)=0$。根据单层势能的跳跃关系有 $0=\frac{\partial h^-}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\frac{\partial h^+}{\partial\boldsymbol{\nu}}=\varphi$，则算子的稠密性得证。　　证毕

3　重构未知腔体的位置和形状

接下来，令 v 是式(5)定义的单层势能 v_g，则 $v_g\in H(R\backslash\overline{\Omega})$。目的是找到一个近似解 $g\in L^2(C)$，对于所有 $u\in U$ 有：

$$R(u,v_g)=R(u,\Phi_z),\tag{6}$$

式中：$\Phi_z=\Phi(\cdot,z)$，$z\in\Omega$，特别地，将说明如何使用这个函数 g 来描述 ∂D 的特征。一般来说式(6)的解不存在，然而，证明近似解的存在是有可能的。为此，考虑特殊的外部混合边界问题，由文献[21]知，$u_z\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2\backslash D)$ 是下列方程的唯一解：

$$\begin{gathered}\Delta u_z+k^2u_z=0,\ x\in\mathbf{R}^2\backslash D,\\ u_z=-\Phi(\cdot,z),\ x\in\Gamma_D,\\ \frac{\partial u_z}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda(x)u_z=-\frac{\partial\Phi(\cdot,z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\mathrm{i}\lambda(x)\Phi(\cdot,z),\ x\in\Gamma_I,\\ \lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r}-\mathrm{i}ku_z\right)=0。\end{gathered}\tag{7}$$

定理 4　假设 $\Gamma_I\neq\varnothing$，则：

i) 若 $z\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$，则存在一个序列 $\{g_n\}$，$g_n\in L^2(C)$，$\forall u\in U$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}R(u,v_{g_n})=R(u,\Phi_z)$，且在 $H^1_{\mathrm{loc}}(R^2\backslash\overline{D})$ 内，v_{g_n} 收敛。

ii) 若 $z\in D\backslash\overline{\Omega}$，对任意一个序列 $\{g_n\}$，$g_n\in L^2(C)$，$\forall u\in U$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}R(u,v_{g_n})=R(u,\Phi_z)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\|v_{g_n}\|_{H^1_{\mathrm{loc}}(R^2\backslash D)}=\infty$。

证明　i) 若 $z\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$，则：

$$\begin{gathered}R(u,v_{g_n}-\Phi_z)=\int_{\partial D}(u\partial_{\boldsymbol{\nu}}(v_{g_n}-\Phi_z)-(v_{g_n}-\Phi_z)\partial_{\boldsymbol{\nu}}u)\mathrm{d}s=\\ \int_{\Gamma_I}u[\partial_{\boldsymbol{\nu}}(v_{g_n}-\Phi_z)+\mathrm{i}\lambda(v_{g_n}-\Phi_z)]\mathrm{d}s-\int_{\Gamma_D}(v_{g_n}-\Phi_z)\partial_{\boldsymbol{\nu}}u\mathrm{d}s。\end{gathered}\tag{8}$$

根据文献[14]可知,$\{v_g|_{\partial D}, g\in L^2(C)\}$在$H^{1/2}(\partial D)$中稠密,则$\Phi_z\in H^{1/2}(\partial D)$能被$v_g$逼近,即存在序列$\{v_{g_n}\}$,$g_n\in L^2(C)$,在$H^{1/2}(\partial D)$中,使得$v_{g_n}\to\Phi_z$,由迹定理得,在$H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2\backslash\overline{D})$中,$v_{g_n}$收敛。通过式(8)可知,$\forall u\in U$,当$n\to\infty$时,有$R(u,v_{g_n})=R(u,\Phi_z)$。

ii) 若$z\in D\backslash\overline{\Omega}$,对于$u(\cdot,x_0)\in U$,令$\tilde{u}^s(x,x_0)=u^s(x,x_0)+\Phi^s(x,x_0)$,则有:

$$R(u(\cdot,x_0),\Phi_z)=\int_{\partial\Omega}u(x,x_0)\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\Phi(x,z)\frac{\partial u(x,x_0)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s(x)=$$
$$\int_{\partial\Omega}\tilde{u}^s(x,x_0)\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\Phi(x,z)\frac{\partial\tilde{u}^s(x,x_0)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s(x)+$$
$$\int_{\partial\Omega}\Phi(x,x_0)\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\Phi(x,z)\frac{\partial\Phi(x,x_0)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s(x)。\tag{9}$$

由于u^s和Φ^s满足Helmholtz方程,且在$D\backslash\overline{B}$内满足交互关系,因此,$x_0\in D\backslash\overline{B}$,$\tilde{u}^s$和$\frac{\partial\tilde{u}^s(x,x_0)}{\partial\boldsymbol{\nu}}$是Helmholtz方程的解。令$v(x_0)=\int_{\partial\Omega}\tilde{u}^s(x,x_0)\frac{\partial\Phi(x,z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\Phi(x,z)\frac{\partial\tilde{u}^s(x,x_0)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s(x)$,则在$D\backslash\overline{B}$内,$v(x_0)$也是Helmholtz方程的解。由式(9),利用格林公式可得$R(u(\cdot,x_0),\Phi_z)=v(x_0)-\Phi(z,x_0)$。

另一方面,

$$R(u(\cdot,x_0),v_g)=\int_{\Gamma_I}u(x,x_0)\partial_{\boldsymbol{\nu}}v_g(x)\mathrm{d}s(x)-\int_{\partial D}v_g(x)\partial_{\boldsymbol{\nu}}u(x,x_0)\mathrm{d}s(x),\tag{10}$$

假设存在一个序列$\{g_n\}$,$g_n\in L^2(C)$,$\forall u\in U$,使得$\lim\limits_{n\to\infty}R(u,v_{g_n})=R(u,\Phi_z)$。假设$\|v_{g_n}\|_{H^{1/2}(\partial D)}$有界,则存在子序列$\left(v_{g_n}|_{\Gamma_D},\frac{\partial v_{g_n}}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda v_{g_n}|_{\Gamma_I}\right)$弱收敛到$(f,g)\in H^{1/2}(\Gamma_D)\times H^{-1/2}(\Gamma_I)$。令$\tilde{v}(x_0)=\int_{\Gamma_I}g(x)u(x,x_0)\mathrm{d}s(x)-\int_{\Gamma_D}f(x)\partial_{\boldsymbol{\nu}}u(x,x_0)\mathrm{d}s(x)$,$\forall x_0\in D\backslash\overline{B}$。根据式(10)可知,当$\forall x_0\in C$,$n\to\infty$时,有$R(u(\cdot,x_0),v_{g_n})\to\tilde{v}(x_0)$,则$\forall x_0\in C$,有$\tilde{v}(x_0)$和$v(x_0)-\Phi(z,x_0)$是相等的。因为$\tilde{v}(x_0)$和$v(x_0)-\Phi(z,x_0)$在$\overline{D}_C$内可以连续作为$\Delta u+k^2n(x)u=0$的解,根据唯一延拓定理得,$\forall x_0\in D\backslash\{z\}$,$\tilde{v}(x_0)$和$v(x_0)-\Phi(z,x_0)$是相等的。然而,当$z=x_0$时,$\Phi(z,x_0)$是奇异的。当$x_0\to z$时,得到矛盾,因此,$\|v_{g_n}\|_{H^{1/2}(\partial D)}$是无界的,通过迹定理$\|v_{g_n}\|_{H^1_{\mathrm{loc}}(R^2\backslash D)}$也无界。

本文的剩下部分致力于推导λ的重构公式。

4 反演未知腔体的阻抗函数λ

对于固定$z\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$,定义$v_z:=u_z+\Phi(\cdot,z)$,这里,$u_z$是外部混合边值问题(7)的解,因为$u_z\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2\backslash\overline{D})$,则有$v_z|_\Gamma\in H^{1/2}(\Gamma)$,$\left.\frac{\partial v_z}{\partial\boldsymbol{\nu}}\right|_\Gamma\in H^{-1/2}(\Gamma)$且$v_z|_{\Gamma_D}=0$,$\left.\left(\frac{\partial v_z}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda v_z\right)\right|_{\Gamma_I}=0$。

引理1 假设k不是问题(7)的外部特征值,$\forall z_1,z_2\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$,使得:

$$\int_{\Gamma_I}\lambda(x)v_{z_1}\overline{v}_{z_2}\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{i}}{2}(u_{z_1}-\overline{u}_{z_2})-k\int_S u_{z_1,\infty}\overline{u_{z_2,\infty}}\mathrm{d}s,$$

式中S是一个单位圆。

证明 根据格林第二定理和文献[22]中引理2.1有:

$$2\mathrm{i}\int_{\Gamma_I}\lambda(x)v_{z_1}\overline{v}_{z_2}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}v_{z_1}\frac{\partial\overline{v}_{z_2}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\overline{v}_{z_2}\frac{\partial v_{z_1}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s=\int_{\partial D}\Phi(\cdot,z_1)\frac{\partial\overline{\Phi(\cdot,z_2)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\Phi(\cdot,z_2)\frac{\partial\Phi(\cdot,z_1)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s+$$
$$\int_{\partial D}u_{z_1}\frac{\partial\overline{\Phi(\cdot,z_2)}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\Phi(\cdot,z_2)\frac{\partial u_{z_1}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s+\int_{\partial D}\Phi(\cdot,z_1)\frac{\partial\overline{u}_{z_2}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\overline{u}_{z_2}\frac{\partial\Phi(\cdot,z_1)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s+$$
$$\int_{\partial D}u_{z_1}\frac{\partial\overline{u}_{z_2}}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\overline{u}_{z_2}\frac{\partial u_{z_1}}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s=-(u_{z_1}-\overline{u}_{z_2})-2\mathrm{i}k\int_S u_{z_1,\infty}\overline{u_{z_2,\infty}}\mathrm{d}s,$$

对上式两边同时乘$-2i$，再化简有 $4\int_{\Gamma_I}\lambda(x)v_{z_1}\overline{v}_{z_2}\mathrm{d}s=2\mathrm{i}(u_{z_1}-\overline{u}_{z_2})-4k\int_S u_{z_1,\infty}\overline{u_{z_2,\infty}}\mathrm{d}s$，则：

$$\int_{\Gamma_I}\lambda(x)v_{z_1}\overline{v}_{z_2}\mathrm{d}s=\frac{\mathrm{i}}{2}(u_{z_1}-\overline{u}_{z_2})-k\int_S u_{z_1,\infty}\overline{u_{z_2,\infty}}\mathrm{d}s。$$

证毕

特别地，令 $z:=z_1=z_2$，则引理 1 可被重写为如下的引理。

引理 2　假设 k 不是问题(7)的外部特征值，$\forall z\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$，有：

$$\int_{\Gamma_I}\lambda(x)\left|u_z+\Phi(\cdot,z)\right|\mathrm{d}s=-\mathrm{Im}\ u_z(z)-k\int_S\left|u_{z,\infty}\right|^2\mathrm{d}s,\tag{11}$$

式中 S 是一个单位圆。

引理 3　考虑 $B_r\subset\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$ 是一个开邻域，定义 $v:=\{f\in L^2(\Gamma_I):f=u_z+\Phi(\cdot,z)|_{\Gamma_I},z\in B_r,u_z$ 是(7)的解$\}$，则 v 在 $L^2(\Gamma_I)$中完备。

证明　假设 $\varphi\in L^2(\Gamma_I)$，使得 $\forall z\in B_r$，$\int_{\Gamma_I}(u_z+\Phi(\cdot,z))\varphi\mathrm{d}s=0$，构造 $u\in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2\backslash\overline{D})$是下列外部混合边界问题的解：

$$\begin{gathered}\Delta u+k^2n(x)u=0,\ x\in\mathbf{R}^2\backslash D,\\ u=0,\ x\in\Gamma_D,\\ \frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda(x)u=\varphi,\ x\in\Gamma_I,\\ \lim_{r\to\infty}r^{1/2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-\mathrm{i}ku\right)=0。\end{gathered}\tag{12}$$

由于 k 不是问题(12)的外部特征值，故上述问题存在唯一解。$\forall z\in B_r$，有：

$$0=\int_{\Gamma_I}v_z\varphi\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_I}v_z\left(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda u\right)\mathrm{d}s=\int_{\partial D}v_z\left(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda u\right)\mathrm{d}s=\int_{\partial D}(u_z+\Phi(\cdot,z))\left(\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda u\right)\mathrm{d}s=$$

$$\int_{\partial D}u_z\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda u_zu+\Phi(\cdot,z)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda\Phi(\cdot,z)u\ \mathrm{d}s=\int_{\partial D}u_z\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+u\left(-\frac{\partial u_z}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\frac{\partial\Phi(\cdot,z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}-\mathrm{i}\lambda\Phi(\cdot,z)\right)\mathrm{d}s+$$

$$\int_{\partial D}\Phi(\cdot,z)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}+\mathrm{i}\lambda\Phi(\cdot,z)u\ \mathrm{d}s=\int_{\partial D}\Phi(\cdot,z)\frac{\partial u}{\partial\boldsymbol{\nu}}-u\frac{\partial\Phi(\cdot,z)}{\partial\boldsymbol{\nu}}\mathrm{d}s=u(z)。$$

由于 k 不是问题(12)外部特征值，则 $u(z)=0$，$\forall z\in B_r$，由唯一延拓定理可知，$u(z)=0$，$\forall z\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$，根据迹定理有 $\varphi=0$。

证毕

方程(11)可以看作 λ 的第一类积分方程，因为 $u_z+\Phi(\cdot,z)$在 Γ_D 上为零，可以用∂D 代替积分区域 Γ_I，利用引理 3，很容易证明，方程的左边是一个单射紧致的积分算子，方程的右边和它的核都可以通过实测数据近似计算出来，如果 g_z 是数据方程的近似解，$R(u,v_{g_z})=R(u,\Phi(\cdot,z))$可被写作 $Ag_z=\varphi(\cdot,z)$，这里 $A:L^2(C)\to L^2(C)$是一个积分算子，这里核 $\mathrm{A}:C\times C\to C$ 定义为 $\mathrm{A}(y_0,x_0)=R(u(\cdot,x_0),\Phi(\cdot,y_0))$，且：

$$\varphi(\cdot,z)=R(u(\cdot,x_0),\Phi(\cdot,z)),\ v_{g_z}(x)=\int_C\Phi(x,y)g_z(y)\mathrm{d}s(y)。$$

在实际中，基于 Tikhonov 正则化解确定 D，$\forall z\in B_r\subset\mathbf{R}^2\backslash\overline{D}$，计算 v_{g_z}，然后解积分方程：

$$\int_{\Gamma_I}\lambda(x)\left|v_{g_z}+\Phi(\cdot,z)\right|\mathrm{d}s=-\mathrm{Im}\ v_{g_z,\infty}(z)-k\int_S\left|v_{g_z,\infty}\right|^2\mathrm{d}s,v_{g_z,\infty}(\hat{x})=$$

$$\gamma\int_C\mathrm{e}^{-ik\hat{x}\cdot y}g_{z,\infty}(y)\mathrm{d}s(y),\gamma=\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}{\sqrt{8\pi k}}。$$

定理 5　令 $\lambda\in L_\infty(\Gamma_I)$是问题(1)的阻抗函数，则：

$$\|\lambda\|_{L_\infty(\Gamma_I)}=\sup_{\substack{z_i,z_j\in B_r\\ \alpha_i\in C}}\frac{\sum_{i,j}\alpha_i\overline{\alpha}_j\left[\frac{\mathrm{i}}{2}(u_{z_1}-\overline{u}_{z_2})-k\int_S u_{z_1,\infty}\overline{u_{z_2,\infty}}\mathrm{d}s\right]}{\left\|\sum_i\alpha_i(u_{z_i}+\Phi(\cdot,z_i))\right\|^2_{L^2(\partial D)}}。$$

证明　根据文献[21]知：$\|\lambda\|_{L_\infty(\Gamma_I)}=\mathrm{ess\ sup}\ \lambda=\sup_{f\in L^2(\Gamma_I)}\frac{1}{\|f\|^2_{L^2(\Gamma_I)}}\int_{\Gamma_I}\lambda(x)\left|f\right|^2\mathrm{d}s$，令 $C=\mathrm{ess\ sup}\ \lambda>0$，则

$\frac{1}{\|f\|^2_{L^2(\Gamma_I)}}\int_{\Gamma_I}\lambda(x)|f|^2\mathrm{d}s\leqslant C,\forall f\in L^2(\Gamma_I)$,对于 $0<\varepsilon<C$,集合 $M_\varepsilon=\{x\in\Gamma_I:|\lambda(x)|\geqslant C-\varepsilon\}$ 有正测度,$\forall f_\varepsilon\in L^2(\Gamma_I)$ 是 M_ε 中的支集,则有 $\frac{1}{\|f\|^2_{L^2(\Gamma_I)}}\int_{\Gamma_I}\lambda(x)|f|^2\mathrm{d}s\geqslant C-\varepsilon$。 证毕

特别地,在阻抗函数 $\lambda>0,z=z_1=z_2$ 时,得到更简单的公式,即:

$$\lambda=\frac{-\mathrm{Im}\,v_{g_z,\infty}(z)-k\int_S|v_{g_z,\infty}(\hat{x})|^2\mathrm{d}s(\hat{x})}{\|v_{g_z}(\cdot)+\Phi(\cdot,z)\|^2_{L^2(\partial D)}},z\in\mathbf{R}^2\backslash\overline{D},\hat{x}=\frac{x}{|x|}。$$

参考文献:

[1] CAKONI F,COLTON D. Qualitative methods in inverse scattering theory[M]. Berlin:Springer,2006.

[2] CAKONI F, COLTON D, MONK P. The linear sampling method in inverse electromagnetic scattering[M]. CBMS-NSF, Philadelphia:SIAM Publications,2011.

[3] KIRSCH A,GRINBERG N. The factorization method for inverse problems[M]. New York:Oxford University Press,2008.

[4] POTTHAST R. A point source method for inverse acoustic and electromagnetic obstacle scattering problems[J]. IMA Journal of Applied Mathematics,1998,61(2):119-140.

[5] CAKONI F,COLTON D. The determination of the surface impedance of a partially coated obstacle from far field data[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,2004,64(2):709-723.

[6] CAKONI F,COLTON D,MONK P. The determination of the surface conductivity of a partially coated dielectric[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,2005,65(3):767-789.

[7] CAKONI F,KRESS R,SCHUFT C. Integral equations for shape and impedance reconstruction in corrosion detection[J]. Inverse Problems,2010,26(9):1-24.

[8] LIU J J, NAKAMURA G, SINI M. Reconstruction of the shape and surface impedance for acoustic scattering data for an arbitrary cylinder[J]. SIAM Journal on Applied Mathematics,2007,67(4):1124-1146.

[9] WANG H B,LIU J J. On the reconstruction of surface impedance from the far-field data in inverse scattering problems[J]. Applicable Analysis,2012,91(4):787-806.

[10] CAKONI F, MONK P. The determination of anisotropic surface impedance in electromagnetic Scattering[J]. Journal on Methods and Applications of Analysis,2010,17(4):379-394.

[11] LIU J J, SINI M. On the accuracy of the numerical detection of complex obstacles from far field data using the probe method [J]. SIAM Journal on Scientific Computing,2009,31(4):2665-2687.

[12] QIN H H,COLTON D. The inverse scattering problem for cavities with impedance boundary condition[J]. Journal of Advances in Computational Mathematics,2012,36(2):157-174.

[13] QIN H H,COLTON D. The inverse scattering problem for cavities[J]. Journal of Applied Numerical Mathematics,2012,62 (6):699-708.

[14] CAKONI F,COLTON D,MENG S X,The inverse scattering problem for a penetrable cavity with internal measurements[J]. AMS,Contemporary Mathematics,2014,615(2):71-88.

[15] QIN H H,CAKONI F. Nonlinear integral equations for shape reconstruction in the inverse interior scattering problem[J]. Inverse Problems,2011,27(3):563-648.

[16] IKEHATA M,ITOU H. On reconstruction of a cavity in a linearized viscoelastic body from infinitely many transient boundary data[J]. Inverse Problems,2012,28(12):142-161.

[17] IKEHATA M,ITOU H. An inverse acoustic scattering problem inside a cavity with dynamical back-scattering data[J]. Inverse Problems,2012,28(9):765-778.

[18] JAKUBIK P, POTTHAST R. Testing the integrity of some cavity-the Cauchy problem and the range test[J]. Applied Numerical Mathematics,2008,58(6):899-914.

[19] ZENG F,LIU X D,SUN J G,et al. Reciprocity gap method for an interior inverse scattering problem[J]. Journal of Inverse and Ill-posed Problems,2017,25(1):57-68.

[20] QIN H H,LIU X D. The interior inverse scattering problem for cavities with an artificial obstacle[J]. Applied Numerical Mathematics,2015,88(2):18-30.

[21] CAKONI F, COLTON D, MONK P. The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles[J]. Inverse

Problems,2001,17(6):1997-2015.

[22] CAKONI F,KRESS R. Eigenvalues of the far field operator and inverse scattering theory[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis,1995,26(3):601-615.

Reciprocity Gap Method for an Interior Inverse Scattering Problem with a Mixed Boundary Condition

WANG Xiaoqing, LIU Lihan, WU Xuejiao

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: [**Purposes**] The interior inverse scattering problem with a mixed boundary condition is widely used in nondestructive detection. [**Methods**] From the scattered wave generated by the point source located on the closed curve inside the cavity, the reciprocity gap functional is constructed based on the reciprocity gap method, the position and shape of the cavity are determined according to the norm property of the interaction gap functional. [**Results**] It is proved that the solution of interior inverse problem with a mixed boundary condition is unique and the reciprocity gap functional is injective and dense. [**Conclusions**] The position, shape and boundary impedance function of unknown cavity can be uniquely determined from the measurement data.

Keywords: reciprocity gap method; interior inverse scattering problem; mixed boundary condition; impedance function

(责任编辑 陈 乔)