2023 年 5 月 重庆师范大学学报(自然科学版) May 2023
第 40 卷 第 3 期 Journal of Chongqing Normal University (Natural Science) Vol. 40 No. 3

DOI:10.11721/cqnuj20230303

Φ-w-平坦模与非诣零 w-凝聚环*

张晓磊
(山东理工大学 数学与统计学院,山东 淄博 255000)

摘要:【目的】为了研究非诣零 w-凝聚环的理想理论刻画和模理论刻画。【方法】引入并研究了 Φ-w-平坦模,并证明了 Φ-w-平坦模类是盖类。【结果】类似于经典的凝聚环刻画,给出了非诣零 w-凝聚环的理想理论刻画和模理论刻画。【结论】非诣零 w-凝聚环是 w-算子中非常值得研究的 Φ-环。

关键词:余挠理论;Φ-w-平坦模;非诣零 w-凝聚环
中图分类号:O154.2 **文献标志码:**A **文章编号:**1672-6693(2023)03-0122-07

在本文中,R 是有单位元的交换环。将 R 的诣零根记为 Nil(R),R 的零因子元素集合记为 $Z(R)$。如果 Nil(R)是一个素理想,则称 R 为 NP-环。记

$$H=\{R\text{ 是一个交换环并且对任意 } x\notin \mathrm{Nil}(R)\text{,都有 } \mathrm{Nil}(R)\subseteq (x)\}\text{。}$$

设 R 是 NP-环,如果 $R\in H$,则称 R 是 Φ-环。更进一步,如果 $Z(R)=\mathrm{Nil}(R)$,则称 Φ-环 R 是强 Φ-环。Φ-环是整环的自然延伸,许多代数学家将整环的相关概念推广到 Φ-环上。本世纪初,Badawi 等人[1-3]研究了 Φ-链环和 Φ-伪赋值环;Badawi[4-6]将经典的 Prüfer 整环、伪赋值整环、Bezout 整环和强 Mori 整环推广到 Φ-环上;Badawi[7]引进和研究了非诣零诺特环。2013 年,Zhao 等人[8]引进了 Φ-平坦模类和 Φ-VN 正则环等相关概念。2016 年,Bacem 等人[3]给出了非诣零凝聚环和 Φ-凝聚环的概念。最近,张晓磊等人[9]利用余挠理论研究了 Φ-平坦模类的盖包性质,证明了对于任意 Φ-环 R,Φ-平坦模类都是盖类;Φ-平坦模类是预包类当且仅当 Φ-环 R 是非诣零凝聚环。

1997 年,王芳贵等人[10]引入并研究了强 Mori 整环(简称为 SM 整环)上的 w-模。直到 2011 年,尹华玉等人[11]将强 Mori 整环推广到一般交换环上,并称之为 w-诺特环。对于整环情形,w-平坦模首先出现在文献[12]中。王芳贵等人[13]将 w-平坦模推广到一般交换环上。2012 年,Kim 等人[14]引入了 Φ-SM 环,并且证明了 R 是 Φ-SM 环当且仅当 R/Nil(R)是 w-诺特整环。从而 Φ-SM 环可以看成 Φ-版本的 w-诺特环。最近,张晓磊等人[15]对 w-平坦模和 Φ-平坦模进行推广得到了 Φ-w-平坦模,并利用 Φ-w-平坦模类刻画了 Φ-VN 正则环和 Φ-PvMR。本文首先利用 Φ-w-平坦模类构成的余挠证明 Φ-w-平坦模类是盖类。此外,Φ-w-平坦模类是预包类当且仅当 Φ-w-平坦模类关于直积封闭。还引入了非诣零 w-凝聚环并通过理想角度给出非诣零 w-凝聚环的等价刻画。对于强 Φ-环,R 是非诣零 w-凝聚环当且仅当 R/Nil(R)是 w-凝聚整环。最后,给出了非诣零 w-凝聚环版本的 Chase 定理。

1 Φ-w-平坦模

根据文献[8,16],交换环 R 的理想 I 称为非诣零理想,如果存在非幂零元素 $s\in I$。记 NN(R)是 R 的所有非诣零理想构成的集合。容易证明若 R 是 NP-环,则 NN(R)是理想乘法系统,即 $R\in \mathrm{NN}(R)$ 且对任意 $I\in \mathrm{NN}(R)$,$J\in \mathrm{NN}(R)$,都有 $IJ\in \mathrm{NN}(R)$。设 M 是 R-模,记:

$$\Phi-\mathrm{tor}(M)=\{x\in M \mid \text{存在 } I\in \mathrm{NN}(R)\text{ 满足 } Ix=0\}\text{。}$$

如果 $\Phi-\mathrm{tor}(M)=M$,则称 M 为 Φ-挠模,如果 $\Phi-\mathrm{tor}(M)=0$,则称 M 为 Φ-无挠模。Φ-挠模类和 Φ-无挠模类构成有限型的遗传挠理论。

* **收稿日期:**2021-12-27 **修回日期:**2022-12-10 **网络出版时间:**2023-06-16T13:11
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 12061001)
第一作者简介:张晓磊,男,讲师,博士,研究方向为代数学,E-mail:zxlrghj@163.com
网络出版地址:https://kns.cnki.net/kcms2/detail/50.1165.N.20230615.1855.014.html

根据文献[17],如果对于有限生成理想 J,自然映射 $\varphi:R\to J^{*}=\mathrm{Hom}_R(J,R)$是同构,则称 J 是 GV-理想。R 的所有 GV-理想构成的集合记为 $\mathrm{GV}(R)$。设 M 是 R-模,定义:

$$\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)=\{x\in M\mid 存在\ J\in \mathrm{GV}(R)满足\ Jx=0\}。$$

如果 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)=M$,则称 M 为 GV-挠模;如果 $\mathrm{tor}_{\mathrm{GV}}(M)=0$,则称 M 为 GV-无挠模。

一个 GV-无挠模称为 w-模,如果对任意 $J\in\mathrm{GV}(R)$,$\mathrm{Ext}_R^1(R/J,M)=0$。任意 R-模都是 w-模的环称为 DW-环。

若理想 I 是 w-模,则称 I 为 w-理想。如果 m 是一个极大的 w-理想,则记 $m\in w-\max(R)$。

设 M 是一个 GV-无挠模,定义 $M_w=\{x\in E(M)\mid 存在\ J\in\mathrm{GV}(R),使得\ Jx\subseteq M\}$,并称之为 M 的 w-包络。R-同态 $f:A\to B$ 称为 w-单同态(w-满同态、w-同构),如果对任意 $m\in w-\max(R)$,都有 $f_m:A_m\to B_m$ 是单同态(满同态、同构)。序列 $A\to B\to C$ 称为 w-正合列,如果对任意 $m\in w-\max(R)$,$A_m\to B_m\to C_m$ 是正合列。

根据文献[13],如果对任意单同态 $f:A\to B$,$f\otimes_R 1_M:A\otimes_R M\to B\otimes_R M$ 也是 w-单同态,则称 R-模 M 为 w-平坦模。根据文献[7],R-模 M 被称为 Φ-平坦模,如果单同态 $f:A\to B$,其中 $\mathrm{Coker}(f)$是 Φ-挠模,$f\otimes_R 1_M:A\otimes_R M\to B\otimes_R M$ 也是单同态。最近,张晓磊等人[18]对 w-平坦模和 Φ-平坦模进行了如下推广。

定义 1[18]　设 R 是环。R-模 M 被称为 Φ-w-平坦模,指的是如果对于任意单同态 $f:A\to B$,其中 $\mathrm{Coker}(f)$是 Φ-挠模,都有 $f\otimes_R 1_M:A\otimes_R M\to B\otimes_R M$ 是 w-单同态。所有的 Φ-w-平坦 R-模记为 F_Φ^w。

显然,w-平坦模和 Φ-平坦模都是 Φ-w-平坦模。若基环 R 是整环,则 Φ-w-平坦模是 w-平坦模;若基环 R 是 DW 环,则 Φ-w-平坦模是 Φ-平坦模。下面引理给出了 Φ-w-平坦模的等价刻画。

引理 1[15]　对于 R-模 M,下面各结论等价:

1) M 是 Φ-w-平坦模。

2) 对任意非诣零 R-理想 I,$f\otimes_R 1_M:I\otimes_R M\to R\otimes_R M$ 是 w 单同态。

3) 对任意非诣零 R-理想 I,$\mathrm{tor}_1^R(R/I,M)$是 GV-挠模。

4) 对任意非诣零 R-理想 I,乘法同态 $i_I:I\otimes_R M\to IM$ 是 w-同构。

5) 对任意有限生成非诣零 R-理想 I,乘法同态 $i_I:I\otimes_R M\to IM$ 是 w-同构。

6) 对任意有限生成非诣零 R-理想 I,$\mathrm{tor}_1^R(R/I,M)$是 GV-挠模。

7) 对任意有限生成非诣零 R-理想 I,$f\otimes_R 1_M:I\otimes_R M\to R\otimes_R M$ 是 w-单同态。

从而易得到如下结论。

引理 2　设 R 是环,则下面各结论成立:

1) 若 M 是 w-平坦模或 Φ-平坦模,则 M 是 Φ-w-平坦模。

2) Φ-w-平坦模的直和还是 Φ-w-平坦模。

3) Φ-w-平坦模的纯子模和纯商模都是 Φ-w-平坦模。

4) Φ-w-平坦模的直向极限还是 Φ-w-平坦模。

证明　1) 根据定义,若 M 是 w-平坦模或 Φ-平坦模,则 M 显然是 Φ-w-平坦模。

2) 假设 M_i 是 Φ-w-平坦模,其中 $i\in I$,则对任意 $i\in I$,任意 $f:A\to B$,其中 $\mathrm{Coker}(f)$是 Φ-挠,都有 $f\otimes_R 1_{M_i}:A\otimes_R M_i\to B\otimes_R M_i$ 是 w-单同态,故 $f\otimes_R\oplus_{i\in I}1_{M_i}:A\otimes_R(\oplus_{i\in I}M_i)\to B\otimes_R(\oplus_{i\in I}M_i)$是 w-单同态。所以$\oplus_{i\in I}M_i$ 是 Φ-w-平坦模。

3) 假设 $0\to M\to N\to L\to 0$ 是纯正合列,$0\to A\to B\to C\to 0$,其中 C 是 Φ-挠模,则有行列均正合的交换:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & M\otimes_R A & \to & N\otimes_R A & \to & L\otimes_R A & \to & 0\\
 & & \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \\
0 & \to & M\otimes_R B & \to & N\otimes_R B & \to & L\otimes_R B & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & M\otimes_R C & \to & N\otimes_R C & \to & L\otimes_R C & \to & 0\\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & 0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$
。

设 N 是 Φ-w-平坦模,故 f 是 w-单同态,所以 g 和 h 也是 w-单同态,从而 M 和 N 都是 Φ-w-平坦模。

4) 假设 I 是直向集,M_i 是 Φ-w-平坦模,其中 $i\in I$。考虑纯短正合列 $0\to K\to\bigoplus_{i\in I}M_i\to\varinjlim_{i\in I} M_i\to 0$。由结论 2)得,$\bigoplus_{i\in I}M_i$ 是 Φ-w-平坦模,从而由结论 3)得 $\varinjlim_{i\in I} M_i$ 是 Φ-w-平坦模。 证毕

一个模类 Ψ 称为预盖类,如果对任意 R-模 M,存在一个同态 $f:F(M)\to M$,其中 $F(M)\in\Psi$ 使得对任意 $F\in\Psi$,$g:F\to M$ 必然经过 f 分解。此外,如果使分解 $f=fh$ 成立的 h 只有同构,则称 Ψ 为盖类。对偶的,可以定义预包类和包类。一对模类 (Ψ,Ω) 称为余挠对,如果 $\Psi^{\perp}=\Omega$,并且 ${}^{\perp}\Omega=\Psi$,其中 $\Psi^{\perp}=\{M\mid \mathrm{Ext}_R^1(F,M)=0,\forall F\in\Psi\}$,${}^{\perp}\Omega=\{N/\mathrm{Ext}_R^1(N,C)=0,\forall C\in\Omega\}$。余挠对 (Ψ,Ω) 称为完全的,如果 Ψ 是盖类并且 Ω 是包类。Bican 等人[19]证明了平坦余挠对是完全的,从而完全解决了著名的平坦盖猜想:任意结合环上,每个模都有平坦盖。

下面证明 Φ-w-平坦模类也是盖类。

定理 1 记 F_Φ^w 是全体 Φ-w-平坦模构成的模类,则 $(F_\Phi^w,(F_\Phi^w)^{\perp})$ 是完全的余挠理论。从而,F_Φ^w 是盖类。

证明 显然,R 是 Φ-w-平坦模,并且 F_Φ^w 关于扩张和直和项封闭。由引理 2 和文献[20]的定理 3.4 可知,$(F_\Phi^w,(F_\Phi^w)^{\perp})$ 是完全余挠理论。因此,F_Φ^w 是盖类。 证毕

命题 1 记 F_Φ^w 是全体 Φ-w-平坦模构成的模类,则 F_Φ^w 关于直积封闭当且仅当 F_Φ^w 是预包类。

证明 由引理 2,F_Φ^w 关于纯子模封闭。若 F_Φ^w 关于直积封闭,则由文献[21]的引理 5.3.12 和推论 6.2.2 得 F_Φ^w 是预包类。

另一方面,假设 $\{F_i\}_{i\in I}$ 是一些 Φ-w-平坦模构成的集合。如果 $\prod_{i\in I}F_i\to F$ 是 Φ-w-平坦预包,则对每个 $i\in I$,存在分解 $\prod_{i\in I}F_i\to F\to F_i$。从而 $\prod_{i\in I}F_i\to F\to\prod_{i\in I}F_i$ 是恒等同态。因此,$\prod_{i\in I}F_i$ 是 F 的直和项,即 $\prod_{i\in I}F_i$ 是 Φ-w-平坦模。 证毕

2 非诣零 w-凝聚环

假设 M 是 R-模,如果存在有限生成自由 F 和一个 w-满同态 $g:F\to M$,则称 M 为有限型的;如果存在 w-正合序列 $F_1\to F_0\to M\to 0$,其中 F_0 和 F_1 有限生成自由模,则称 M 为有限表现型的[17]。根据文献[22],交换环 R 称为 w-凝聚环,如果任意有限型理想都是有限表现型的。R 称为 w-凝聚环当且仅当任意有限生成理想是有限表现型的[22]。假设 R 是 Φ-环,如果任意有限生成非诣零 R-理想都是有限表现理想,则称 R 是非诣零凝聚环[3]。下面对 w-凝聚环和非诣零凝聚环进行推广。

定义 2 假设 R 是 Φ-环。如果任意有限型非诣零 R-理想都是有限表现型的,则称 R 是非诣零 w-凝聚环。

显然,w-凝聚环和非诣零凝聚环都是非诣零 w-凝聚环。非诣零 w-凝聚整环显然是 w-凝聚整环,非诣零 w-凝聚 DW 环显然是非诣零凝聚环。由文献[17]的定理 6.4.11 和命题 6.4.12,下面引理成立。

引理 3 设 $0\to M\to N\to L\to 0$ 是短正合列,有下面条件成立:

1) 若 M 是有限表现型,则 L 是有限表现型当且仅当 N 是有限型;

2) 若 N 和 L 是有限表现型,则 M 是有限表现型。

下面通过理想角度给出非诣零 w-凝聚环的等价刻画。

定理 2 设 R 是 Φ-环,则下面各结论等价:

1) R 是非诣零 w-凝聚环。

2) 如果任意有限生成非诣零 R-理想都是有限表现型的。

3) 任意两个有限型非诣零理想的交是有限型且任意非幂零元素的零化子是有限型的。

4) 任意两个有限生成非诣零理想的交是有限型且任意幂零元素的零化子是有限型的。

5) 对任意非幂零元素 $b\in R$ 和任意有限型非诣零理想 I,$(I:_R b)=\{r\in R\mid rb\in I\}$ 是有限型理想。

6) 对任意非幂零元素 $b\in R$ 和任意有限生成非诣零理想 I,$(I:_R b)=\{r\in R\mid rb\in I\}$ 是有限型理想。

证明 1)⇒2)、3)⇒4)、5)⇒6),显然。

1)⇒3)。设 N_1 和 N_2 是有限型非诣零理想,从而是有限表现型,故 $N_1\oplus N_2$ 是有限表现型的。考虑短正合列 $0\to N_1\cap N_2\to N_1\oplus N_2\to N_1+N_2\to 0$。由于 N_1+N_2 是有限型非诣零理想,则根据引理 3 可得 $N_1\cap N_2$ 是有限型理想。假设 $a\notin \mathrm{Nil}(R)$,考虑短正合列 $0\to\mathrm{Ann}(a)\to R\to Ra\to 0$。由于 Ra 是有限表现型,从而

$\mathrm{Ann}(a)$是有限型的 w-理想。

2)$\Rightarrow$1)。假设 I 是有限型非诣零理想，则存在有限生成子理想 K 使得 I/K 是 GV-挠模。因为 I 是非诣零理想，存在非幂零元素 $s\in I$，从而存在 GV-理想 J 使得 $Js\subseteq K$。由于 J 是非诣零理想，R 是 Φ-环，所以 K 是非诣零理想。从而 K 是有限表现型的，故 I 是有限表现型的。

4)$\Rightarrow$2)。假设 N 由至少 n 个元素生成的有限生成理想。下面对 n 进行归纳证明 N 是有限表现型的。

若 $n=1$，则由短正合列 $0\to\mathrm{Ann}(a)\to R\to Ra\to 0$(其中 $a\notin\mathrm{Nil}(R)$)可得。

假设 $n=k\geqslant 1$ 时，结论成立。设 $n=k+1$，则非诣零理想 $N=L+Ra$，其中 $a\notin\mathrm{Nil}(R)$，L 是由至少 k 个元素生成。则有正合列 $0\to L\cap Ra\to L\oplus Ra\to L+Ra\to 0$。假设 L 是非诣零理想，则 $L\cap Ra$ 是有限型的，又因为 $L\oplus Ra$ 是有限表现型，从而根据引理 3 可得 $N=L+Ra$ 是有限表现型的。假设 L 是诣零理想，则 $L\subseteq Ra$，从而 $N=L+Ra=Ra$，矛盾。

1)$\Rightarrow$5)。假设 b 是非幂零元素，I 是有限型非诣零理想。考虑行正合交换：

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & (I:_R b) & \to & R & \to & (Rb+I)/I & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \| & & \\ 0 & \to & I & \to & Rb+I & \to & (Rb+I)/I & \to & 0 \end{array}\text{。}$$

由于 R 是非诣零 w-凝聚环，I 是有限型非诣零理想，有 $Rb+I$ 是有限表现型。由引理 3，$(Rb+I)/I$ 是有限表现型，故$(I:_R b)$是有限型。

6)$\Rightarrow$2)。利用归纳证明至少 n-生成非诣零理想 I 是有限表现型的。

当 $n=1$ 时，同样可由短正合列 $0\to\mathrm{Ann}(a)\to R\to Ra\to 0$ 可得。

假设 $n\leqslant k$(其中 $k\geqslant 1$)时，结论成立。设 $n=k+1$，则 $I=Ra+L$。与 3)$\Rightarrow$1)类似，可以假设 L 是由至少 k-生成非诣零理想，$a\notin\mathrm{Nil}(R)$。考虑短正合列 $0\to(L:_R a)\to R\to(Ra+L)/L\to 0$。根据引理 3，$(Ra+L)/L=I/L$ 是有限表现型的。再考虑短正合列 $0\to L\to I\to I/L\to 0$，由于 L 是有限表现型的，故由引理 3 可得 I 是有限表现型的。　　证毕

推论 1　假设 R 是非诣零 w-凝聚环，S 是非零因子乘法集，则 R_S 是非诣零 w-凝聚环。

证明　设 I_S 是有限生成非诣零 R_S-理想，其中 I 是有限生成 R-理想。显然，I 是非诣零 R-理想，从而 I 是有限表现型 R-理想。由文献[23]的引理 4.3 得 I_S 是有限表现型 R_S-理想。　　证毕

推论 2　设 R 是强 Φ-环，则 R 是非诣零 w-凝聚环当且仅当 $R/\mathrm{Nil}(R)$是 w-凝聚整环。

证明　假设 R 是非诣零 w-凝聚环。若 $I/\mathrm{Nil}(R)$是有限生成非零 $R/\mathrm{Nil}(R)$-理想，则 I 是有限生成非诣零 R-理想。因为 R 是非诣零 w-凝聚环，所以 I 是有限表现型的。从而存在两个短正合列 $0\to T_1\to L\to N\to 0$ 和 $0\to N\to J\to T_2\to 0$，其中 T_1 和 T_2 是 GV-挠模，L 是有限表现模。则有 $R/\mathrm{Nil}(R)$-模短正合列 $0\to N/\mathrm{Nil}(R)\to J/\mathrm{Nil}(R)\to T_2\to 0$。根据文献[14]的引理 2.11 结论(a)可得，T_2 是 GV-挠 $R/\mathrm{Nil}(R)$-模，$N/\mathrm{Nil}(R)$是有限生成 $R/\mathrm{Nil}(R)$-模。考虑正合列：

$$T_1\otimes_R R/\mathrm{Nil}(R)\to L\otimes_R R/\mathrm{Nil}(R)\to N\otimes_R R/\mathrm{Nil}(R)\to 0\text{。}$$

由文献[14]的引理 2.9 结论(a)可得 $N\otimes_R R/\mathrm{Nil}(R)\cong N/N\mathrm{Nil}(R)\cong N/\mathrm{Nil}(R)$。则有短正合列 $0\to T\to L\otimes_R R/\mathrm{Nil}(R)\to N\otimes_R R/\mathrm{Nil}(R)\to 0$。再根据文献[14]的引理 2.11 结论(a)得 T 是 GV-挠 $R/\mathrm{Nil}(R)$-模。因为 $L\otimes_R R/\mathrm{Nil}(R)$是有限表现 $R/\mathrm{Nil}(R)$-模，所以 $J/\mathrm{Nil}(R)$是有限表现型 $R/\mathrm{Nil}(R)$-模。

反之，假设 I 是有限生成非诣零理想，则 $I/\mathrm{Nil}(R)$是有限生成 $R/\mathrm{Nil}(R)$-理想。因为 $R/\mathrm{Nil}(R)$是 w-凝聚整环，所以 $I/\mathrm{Nil}(R)$是有限表现型 $R/\mathrm{Nil}(R)$-理想。假设 $I/\mathrm{Nil}(R)=(\overline{x}_1,\cdots,\overline{x}_n)$，其中 x_i 是 R 中的非幂零元素$(i=1,\cdots,n)$。不妨设 $I=(x_1,\cdots,x_n)$。对 n 进行归纳证明 I 是有限表现型理想。

当 $n=1$ 时，由于 R 是强 Φ-环，从而 $I=Rx_1\cong R$ 是有限表现型理想。

对于一般情形，则 $I=(x_1,\cdots,x_{n-1})+Rx_n$。根据归纳，有$(x_1,\cdots,x_{n-1})$和 Rx_n 都是有限表现型理想。由于 $R/\mathrm{Nil}(R)$是 w-凝聚整环，所以$(x_1,\cdots,x_{n-1})/\mathrm{Nil}(R)\cap Rx_n/\mathrm{Nil}(R)=((x_1,\cdots,x_{n-1})\cap Rx_n)/\mathrm{Nil}(R)$是有限型 $R/\mathrm{Nil}(R)$理想。从而根据文献[14]的引理 2.9 可得$(x_1,\cdots,x_{n-1})\cap Rx_n$ 是有限型非诣零理想。考虑短正合列 $0\to(x_1,\cdots,x_{n-1})\cap Rx_n\to(x_1,\cdots,x_{n-1})\oplus Rx_n\to(x_1,\cdots,x_n)\to 0$，则根据引理 3，有 I 是有限表现型理想。

许多非整环的例子是通过理想化 $R(+)M$ 构造的，其中 M 是 R-模[24]。令 $R(+)M$ 作为 R-模同构于 $R\oplus M$，定义：1) $(r,m)+(s,n)=(r+s,m+n)$；2) $(r,m)(s,n)=(rs,sm+rn)$。

在此定义下,$R(+)M$ 成为有单位元$(1,0)$的交换环。

下面通过理想化 $R(+)M$ 构造说明非诣零 w-凝聚环不一定是 w-凝聚环,也不一定是非诣零凝聚环。

例1 假设 D 是非凝聚的 w-凝聚整环[17],K 是 D 的商域,从而 K 不是有限生成 D-模。令 $R=D(+)K$,则 R 是强 Φ-环[2]。诣零根 $\mathrm{Nil}(R)=0(+)K$,所以 $R/\mathrm{Nil}(R)\cong D$ 是 w-凝聚环但不是凝聚环。根据推论2,R 是非诣零 w-凝聚环。再由文献[3]的注2.1,R 不是非诣零凝聚环。

下面说明 R 不是 w-凝聚环。注意到$(0,1)R$ 是有限生成 R-理想。考虑自然短正合列 $0\to L\to R\to(0,1)R\to 0$,则 $L=\mathrm{Nil}(R)=0(+)K$。由于 w-模 K 不是有限生成 D-模,从而不是有限型 D-模。根据文献[7]的引理2.2,可得 w-理想 $\mathrm{Nil}(R)$不是有限型 R-理想,从而$(0,1)R$ 不是有限表现型的。

凝聚环的研究很大程度上得益于 Chase 教授在1960年给出的结论(现称为 Chase 定理):R 是凝聚环当且仅当平坦模的任意直积还是平坦模[25]。证明过程依靠于如下自然同态:

$$\varphi_M: M\otimes_R\prod_{i\in I}F_i\to\prod_{i\in I}(M\otimes_R F_i),\ m\otimes(x_i)_{i\in I}\mapsto(m\otimes x_i)_{i\in I}。$$

式中:M 是 R-模,F_i 是 R-模。同样根据此自然同态可证明如下的非诣零 w-凝聚环版本的 Chase 定理。

定理3 设 R 是 Φ-环,则下面各结论等价:

1) R 是非诣零 w-凝聚环;

2) 任意非诣零平坦模的直积是 Φ-w-平坦模;

3) 任意平坦模的直积是 Φ-w-平坦模;

4) 任意投射模的直积是 Φ-w-平坦模;

5) R 的任意直积是 Φ-w-平坦模。

证明 1)⇒2)。设$\{F_i\mid i\in\Lambda\}$是一族非诣零平坦 R-模及 I 是 R 的有限生成非诣零理想。则根据定理2,I 是有限表现型的。从而根据文献[26]中引理1.2的结论(2),可得存在正合列 $K\to I\to T\to 0$,其中 K 是有限表现 R-模及 T 是 GV-挠模。考虑如下行正合交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & K\otimes_R\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i & \to & I\otimes_R\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i & \to & T\otimes_R\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i & \to & 0\\ & & \downarrow & & \downarrow\theta & & \| & & \\ 0 & \to & \prod\limits_{i\in\Lambda}(K\otimes_R F)_i & \to & \prod\limits_{i\in\Lambda}(I\otimes_R F)_i & \to & \prod\limits_{i\in\Lambda}(T\otimes_R F)_i & \to & 0\end{array}。$$

因为 $T\otimes_R\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i$ 是 GV-挠模,所以 $\mathrm{Ker}(\theta)$也是 GV-挠模。

现在考虑如下行正合交换:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{tor}_1^R(R/I,\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i) & \to & I\otimes_R\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i & \to & R\otimes_R\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i & \to & 0\\ & & \downarrow & & \downarrow\theta & & \| & & \\ 0 & \to & \prod\limits_{i\in\Lambda}\mathrm{tor}_1^R(R/I,F_i) & \to & \prod\limits_{i\in\Lambda}(I\otimes_R F)_i & \to & \prod\limits_{i\in\Lambda}(R\otimes_R F)_i & \to & 0\end{array}。$$

注意到 $\mathrm{tor}_1^R(R/I,\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i)\subseteq\mathrm{Ker}(\theta)$,所以 $\mathrm{tor}_1^R(R/I,\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i)$ 是 GV-挠模。因此,根据引理1可得 $\prod\limits_{i\in\Lambda}F_i$ 是 Φ-w-平坦模。

2)⇒3)⇒4)⇒5),显然成立。

5)⇒1)。只须证明任意有限生成非诣零理想 J 是有限表现型的。考虑如下自然同态交换:

$$\begin{array}{ccc} J\otimes_R\prod\limits_{i\in I}R & \xrightarrow{\alpha} & R\otimes_R\prod\limits_{i\in I}R\\ \downarrow i_J & & \|\\ \prod\limits_{i\in I}J & \to & \prod\limits_{i\in I}R\end{array}。$$

由于 $\prod\limits_{i\in I}R$ 是 Φ-w-平坦模,从而 α 是 w-单同态。从而 i_J 是 w-单同态。根据文献[26]的命题2.10,J 是有限表现型。

下面可以给出既不是 w-平坦模又不是 Φ-平坦模的 Φ-w-平坦模的例子。

例 2　令 R 是既不是 w-凝聚环又不是非诣零凝聚环的非诣零 w-凝聚环(见例 1)，则根据各种版本的 Chase 定理，例如定理 3、文献[3]的定理 2.4 以及文献[26]的定理 2.2，可得存在平坦模的直积 $F=\prod_{i\in\Lambda}F_i$ 既不是 w-平坦模又不是 Φ-平坦模，但 F 是 Φ-w-平坦模。

下面例子说明对于非诣零 w-凝聚环，任意 Φ-w-平坦模的直积不一定是 Φ-w-平坦模。

例 3[26]　设 Z 是整数环，P 是所有的素数构成的集合。

考虑整系数多项式环 $R=Z[x]$。显然，R 是诺特环，从而是非诣零 w-凝聚环。令 $J_p=(p,x)$，其中 $p\in P$，则 J_p 是 GV-理想。考虑 R 的理想集合 $\{J_p\mid p\in P\}$，则有 GV-挠模集合 $\{M_p=R/J_p\mid p\in P\}$，从而是 Φ-w-平坦模。然而，直 $M=\prod_{p\in P}M_p=\prod_{p\in P}R/J_p$ 不是 w-平坦模。由于 R 是整环，所以 M 不是 Φ-w-平坦模。

推论 3　设 R 是环，则以下各结论等价：

1) R 是非诣零 w-凝聚环；

2) 对任意投射 R-模 P，对偶模 $P^*=\mathrm{Hom}_R(P,R)$是 Φ-w-平坦模；

3) 对任意自由 R-模 F，对偶模 $P^*=\mathrm{Hom}_R(P,R)$是 Φ-w-平坦模。

证明　1) $\Rightarrow$2)。对任意投射 R-模 P，存在可裂短正合列 $0\to Q\to R^{(I)}\to P\to 0$，从而诱导出如下可裂正合列 $0\to P^*\to R^I\to Q^*\to 0$

根据定理 3，R^I 是 Φ-w-平坦模，故 $P^*=\mathrm{Hom}_R(P,R)$是 Φ-w-平坦模。

2) $\Rightarrow$3)，显然。

3) $\Rightarrow$1)。根据结论 3)，$R^I\cong(R^{(I)})^*$ 是 Φ-w-平坦模。根据定理 3，R 是非诣零 w-凝聚环。　　证毕

参考文献：

[1] ANDERSON D F, BADAWI A. On Φ-Prüfer rings and Φ-Bézout rings[J]. Houston Journal of Mathematics, 2004, 30: 331-343.

[2] ANDERSON D F, BADAWI A. On Φ-Dedekind rings and Φ-Krull rings[J]. Houston Journal of Mathematics, 2005, 31: 1007-1022.

[3] BACEM K, ALI B. Nonnil-coherent rings[J]. Beitrage zur Algebra und Geometrie, 2016, 57: 297-305.

[4] BADAWI A. On Φ-pseudo-valuation rings II[J]. Houston Journal of Mathematics, 2000, 26: 473-480.

[5] BADAWI A. On Φ-chained rings and Φ-pseudo-valuation rings[J]. Houston Journal of Mathematics, 2001, 27: 725-736.

[6] BADAWI A. On divided rings and Φ-pseudo-valuation rings[J]. International Journal of Commutative Rings, 2002, 1(2): 51-60.

[7] BADAWI A. On nonnil-Noetherian rings[J]. Communications in Algebra, 2003, 31: 1669-1677.

[8] ZHAO W, WANG F G, TANG G H. On Φ-von Neumann regular rings[J], Journal of the Korean Mathematical Society, 2013, 50: 219-229.

[9] 张晓磊，赵伟，王芳贵. Φ-平坦余挠理论[J]. 广西师范大学学报(自然科学版)，2021，39(2)：119-124.
ZHANG X L, ZHAO W, WANG F G. On Φ-flat Cotorsion theory[J]. Journal of Guangxi Normal University (Natural Science), 2021, 39(2): 119-124.

[10] WANG F G, MCCALAND R L. On w-modules over strong Mori domains[J]. Communications in Algebra, 1997, 25(4): 1285-1306.

[11] YIN H Y, WANG F G, ZHU X S, et al. w-modules over commutative rings[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2011, 48(1): 207-222.

[12] WANG F G. On w-projective modules and w-flat modules[J]. Algebra Colloquium, 1997, 4(1): 111-120.

[13] WANG F G, KIM H. Two generalizations of projective modules and their applications[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2015, 219(6): 2099-2123.

[14] KIM H, WANG F G. On Φ-stong mori rings[J]. Houston Journal of Mathematics, 2012, 38: 359-371.

[15] ZHANG X L, ZHAO W. On Φ-w-flat modules and their homological dimensions[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2021, 58(4): 1039-1052.

[16] 赵伟，张晓磊. 非诣零内射模[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2019，42(6)：808-815.
ZHAO W, ZHANG X L. On nonnil-injective modules[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2019, 42(6): 808-815.

[17] WANG F G, KIM H. Foundations of commutative rings and their modules[M]. Singapore: Springer, 2016.

[18] 张晓磊. w-算子的盖包[J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2019, 42(3): 382-386.
ZHANG X L. Covering and Enveloping on w-operation[J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2019, 42(3): 382-386.

[19] BICAN L, BASHIR R E, ENOCHS E. All modules have flat covers[J]. Bulletin of the London Mathematical Society, 2001, 33(4): 385-390.

[20] HOLM H, JORGENSEN P. Covers, preenvelopes, and purity[J]. Illinois Journal of Mathematics, 2008, 52(2): 691-703.

[21] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological algebra[M]. Berlin: Walter de Gruyter, 2000.

[22] WANG F G. Finitely presented type modules and w-coherent rings[J]. Journal of Sichuan Normal University, 2010, 33: 1-9.

[23] WANG F G, QIAO L. The w-weak global dimension of commutative rings[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(4): 1327-1338.

[24] HUCKABA J A. Commutative rings with zero divisors[M]. New York: Marcel Dekker, Inc, 1998: 117.

[25] CHASE S U. Direct products of modules[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1960, 97: 457-473.

[26] ZHANG X L, WANG F G, QI W. On characterizations of w-coherent rings[J]. Communications in Algebra, 2020, 48(11): 4681-4697.

Φ-w-Flat Modules and Nonnil w-Coherent Rings

ZHANG Xiaolei

(School of Mathematics and Statistics, Shandong University of Technology, Zibo Shandong 255000, China)

Abstract: [**Purposes**] The aim is to study the nonnil-w-coherent rings in terms of ideal-theory and module-theory. [**Methods**] It introduces and studies the notion of Φ-w-flat modules, and proves that the class of all Φ-w-flat modules is covering. [**Results**] The nonnil-w-coherent rings are characterized in terms of ideal-theory and module-theory. [**Conclusions**] The notion of nonnil w-coherent rings is worth exploring in both Φ-rings and w-operations.

Keywords: cotorsion theory; Φ-w-flat module; nonnil w-coherent ring

(责任编辑 黄 颖)