

求解双侧障碍问题的自适应投影算法*

程 兰, 张霖森, 张守贵

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:对一类具有双侧障碍的自由边界问题得到求它的数值解的自适应投影迭代算法。采用有限差分法将障碍问题离散为有限维双侧障碍问题,该问题等价于一个新的投影不动点问题,可得到双侧障碍问题的投影算法。并通过迭代数据自动调整投影算法的参数,加快其收敛速度。从而提出求解双侧障碍问题的自适应投影算法,给出算法过程和收敛性分析。理论分析和数值算例结果都表明该算法的有效性。

关键词:双侧障碍问题;有限差分;投影算法;自适应法则

中图分类号:O241.82

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2023)04-0023-09

障碍问题不同于其他的微分边值问题,它具有很强的非线性。这类问题通常很难得到精确解,需要通过数值解法得到问题的近似解。目前研究障碍问题的重要工具是变分不等式。理论基础是利用 Green 公式将障碍问题转化为区域上的变分不等式问题,并利用 Lax-Milgram 定理以及 Sobolev 空间理论,讨论问题解的存在唯一性^[1]。障碍问题一般分为单侧障碍问题和双侧障碍问题,其中双侧障碍问题比单侧障碍问题更复杂。单侧障碍问题满足用一个障碍函数表示的不等式约束条件,而双侧障碍问题满足由两个障碍函数表示的不等式组约束条件。本文用有限差分法把双侧障碍问题离散为有限维双侧障碍问题,提出了一种简便的投影算法^[2-7]。为了加快算法的收敛速度,对算法的参数提出了基于迭代数据的自适应法则,该方法通过上一步迭代数据自动调整参数,达到提高算法效率的目的^[8-16]。

1 双侧障碍问题及等价投影格式

考虑经典的双侧障碍问题,数学模型的一般形式为:

$$\begin{cases} -Lv(x) \geq f(x), v(x) = \varphi_1(x), x \in \Omega, \\ -Lv(x) = f(x), \varphi_1(x) \leq v(x) \leq \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ -Lv(x) \leq f(x), v(x) = \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ v(x) = \psi(x), x \in \Gamma. \end{cases} \quad (1)$$

式中: Ω 是 \mathbf{R}^n ($n=1,2$) 中的有界区域,边界 $\Gamma=\partial\Omega$, $f(x)$ 为已知右端函数, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ 为已知障碍函数, $\psi(x)$ 为边界上已知函数。当 $n=1$ 时,令 $\Omega=[a,b]$,则边界 Γ 为 a, b 两端点, $L=\partial^2/\partial x^2$ 。当 $n=2$ 时, Ω 为平面有界区域, $x=(x_1, x_2)$, $L=\partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$ 。定义非空有界闭凸集 $K = \{v \in H_0^1(\Omega), \varphi_1 \leq v \leq \varphi_2, \text{a. e. 在 } \Omega \text{ 上}\}$ 。

问题(1)等价于变分不等式问题: $\forall v \in K$ 都能找到 $u \in K$ 使其满足: $\int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla(u-v) dx \geq \int_{\Omega} f(u-v) dx$ 。由文献[1]知该变分不等式有唯一解,即问题(1)有唯一解。

将双侧障碍问题离散为有限维线性互补问题,利用有限差分法得到:

$$\begin{cases} -L_h u(x) \geq f(x), u(x) = \varphi_1(x), x \in \Omega, \\ -L_h u(x) = f(x), \varphi_1(x) \leq u(x) \leq \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ -L_h u(x) \leq f(x), u(x) = \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ u(x) = \psi(x), x \in \Gamma. \end{cases}$$

* 收稿日期:2021-12-29 修回日期:2023-06-19 网络出版时间:2023-07-05T08:41

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11971085);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2020jcyj-msxmX0066);重庆市研究生教育优质课程项目(No. 201949);重庆市研究生教育教学改革研究项目(No. yjg213071)

第一作者简介:程兰,女,研究方向为微分方程数值解及其优化算法,E-mail:2879421471@qq.com;通信作者:张守贵,男,教授,博士,E-mail:shgzhang@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20230704.1305.006

式中:向量函数 \mathbf{u} 表示未知函数 v 在网格节点上的近似值。对上述问题代入已知区域 Ω 内的函数 $f(\mathbf{x})$ 和边界上的函数 $\psi(\mathbf{x})$, 则上述问题可改写为标准的有限维线性互补问题:

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{q} \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} = \varphi_1, \\ \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{q} = \mathbf{0}, \varphi_1 \leq \mathbf{u} \leq \varphi_2, \\ \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{q} \leq \mathbf{0}, \mathbf{u} = \varphi_2. \end{cases} \quad (2)$$

定义非空有界闭凸集: $\mathbf{R}_+^N = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N \mid u_i - \varphi_1 \geq 0\} (i=1, 2, \dots, N)$, $\mathbf{R}^N = \{\mathbf{u} \in \mathbf{R}^N \mid u_i - \varphi_2 \leq 0\} (i=1, 2, \dots, N)$ 。由文献[1]知问题(2)等价于向量变分不等式: $\langle \mathbf{u} - \mathbf{u}^*, \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{q} \rangle \geq 0, \forall \mathbf{u} \in \mathbf{R}^N$, 或极小值问题: 寻找 N 维列向量 \mathbf{u} , 满足: $\min\left(\frac{1}{2}\mathbf{u}^\top \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{q}^\top \mathbf{u}\right), \varphi_1 \leq \mathbf{u} \leq \varphi_2$ 。由于该极小值问题存在唯一解 \mathbf{u}^* , 因此有限维线性互补问题(2)存在唯一解 \mathbf{u}^* , 从而双侧障碍问题(1)也存在唯一解 \mathbf{u}^* 。

当 $n=1$ 时, 即一维情形时, 将区间 $[a, b]$ 进行 $N+1$ 等分, 则内节点数目为 N 。 \mathbf{u} 为函数 v 在区域 Ω 内网格节点待求函数值构成的 N 维列向量, $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{N \times N}$ 为三对角矩阵, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^N$ 为依赖于 $f(\mathbf{x})$ 和 $\psi(\mathbf{x})$ 的已知 N 维列向量, 具体如下:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & \\ & -1 & 2 & -1 & & \\ & & -1 & 2 & -1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}。$$

当 $n=2$, 即二维情形时, 记网格剖分的内节点数目为 N^2 , 则 $\mathbf{M} \in \mathbf{R}^{N^2 \times N^2}$ 为三对角分块矩阵。具体如下:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} \mathbf{B} & -\mathbf{I} & & & & \\ -\mathbf{I} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} & & & \\ & & -\mathbf{I} & \mathbf{B} & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -\mathbf{I} & \\ & & & -\mathbf{I} & \mathbf{B} & -\mathbf{I} \\ & & & & -\mathbf{I} & \mathbf{B} \end{bmatrix}, \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & & & \\ & -1 & 4 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & -1 & \\ & & & -1 & 4 & -1 \\ & & & & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

式中: \mathbf{I} 为 N 阶单位矩阵, $\mathbf{B} \in \mathbf{R}^{N \times N}$, $\mathbf{q} \in \mathbf{R}^{N^2}$ 为依赖于 $f(\mathbf{x})$ 和 $\psi(\mathbf{x})$ 的已知 N^2 维列向量, \mathbf{u} 为函数在区域 Ω 内网格节点待求函数值构成的 N^2 维列向量。

引入拉格朗日乘子 λ , 令 $\lambda = \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{q}$, 则问题(2)就等价于:

$$\begin{cases} \lambda \geq \mathbf{0}, \mathbf{u} = \varphi_1, \\ \lambda = \mathbf{0}, \varphi_1 \leq \mathbf{u} \leq \varphi_2, \\ \lambda \leq \mathbf{0}, \mathbf{u} = \varphi_2. \end{cases} \quad (3)$$

引入投影算子 $[Z]_g = \begin{cases} Z, |Z| \leq g \\ \frac{Z}{|Z|}g, |Z| > g \end{cases}$, 其中 $g > 0, Z \in \mathbf{R}^N$ (一维) 或 $Z \in \mathbf{R}^{N \times N}$ (二维)。下面证明问题(3)等价于一个投影方程。

定理 1 双侧障碍问题(3)等价于投影方程:

$$\mathbf{u} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \left[\mathbf{u} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}, \rho > 0. \quad (4)$$

证明 由问题(3)证式(4)。当 $\mathbf{u} = \varphi_1, \lambda \geq \mathbf{0}$, 由于 $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - \rho\lambda < -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} < \mathbf{0}$, 则:

$$\left[\mathbf{u} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \left[\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} = \mathbf{u} - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}。$$

当 $\mathbf{u} = \varphi_2, \lambda \leq \mathbf{0}$, 由于 $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \rho\lambda > \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} > \mathbf{0}$, 则:

$$\left[u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \left[\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

当 $\varphi_1 < u < \varphi_2, \lambda = 0$, 由于 $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} > u - \frac{\varphi_2 + \varphi_1}{2} > -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, 则:

$$\left[u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \left[u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}.$$

从而,由问题(3)可推得式(4)。

由式(4)证问题(3)。当 $\left| u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right| \leq \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, 则:

$$u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda,$$

得 $\lambda = 0$, 且 $\left| u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right| \leq \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, 即 $\varphi_1 \leq u \leq \varphi_2$ 。

当 $\left| u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right| \geq \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} > 0$ 时, $u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda > \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, 所以 $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \theta \left(u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right)$, 其中 $0 < \theta < 1$ 。则有 $\left[u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}} = \theta \left(u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right)$, 得 $u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\rho\theta\lambda}{\theta - 1}$, 且 $\left| u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right| = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, 从而有 $\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} = \frac{\rho\theta}{1 - \theta} |\lambda|$, 得 $\lambda \neq 0$ 。如果 $\lambda > 0$ 时, 则 $u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = -\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, $u = \varphi_1$; 如果 $\lambda < 0$ 时, 则 $u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}$, $u = \varphi_2$ 。

从而,由式(4)可推得问题(3)。

综上,双侧障碍问题(3)等价于(4)。

证毕

2 自适应投影算法和收敛性分析

现在考虑关于投影方程问题(4)的改进投影算法,结合文献[6-7]求解上述问题(3)的数值解。引入残量函数 $e_\rho(u, \lambda) = u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \left[u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} - \rho\lambda \right]_{\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2}}$, 问题(4)的解就是 $e_\rho(u, \lambda)$ 的零点,即 $e_\rho(u, \lambda) = 0$ 。非线性方程 $e_\rho(u, \lambda) = 0$ 等价于非线性问题:

$$u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \rho\lambda = u - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} + \rho\lambda - \eta e_\rho(u, \lambda).$$

考虑参数 $\eta \in (0, 2)$, 从而构造求解问题(4)在迭代过程中的改进投影算法:

$$u^{(k+1)} + \rho\lambda^{(k+1)} = u^{(k)} + \rho\lambda^{(k)} - \eta e_{\rho_k}(u^{(k)}, \lambda^{(k)}). \quad (5)$$

这种算法的收敛速度很大程度上会受到参数 ρ 的影响。为了改进这种方法,达到提高算法效率的目的,本文提出了自适应投影算法。该算法通过在迭代过程中自动调整参数,用变参数 ρ_k 代替常量参数 ρ , 得到变量序列 $\{\rho_k\}$ 。下面考虑如何得到变量序列 $\{\rho_k\}$ 。

考虑上述问题(5), 则 $u^{(k+1)} - u^{(k)} = -\rho(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)}) - \eta e_\rho$ 。结合文献[4], 根据平衡原理:

$$\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| \approx \|\rho(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)})\|,$$

采用如下方法去选择变参数 ρ_k 。给定一个常数 $\mu > 0$, 如果 $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| > (1 + \mu) \|\rho_k(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)})\|$, 那么在下一次迭代时 ρ_k 要增加; 如果 $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\| < \frac{1}{1 + \mu} \|\rho_k(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)})\|$, 那么在下一次迭代时 ρ_k 要减少。令 $\omega_k =$

$\frac{\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|}{\|\rho_k(\lambda^{(k+1)} - \lambda^{(k)})\|}$, 然后让

$$\rho_{k+1} = \begin{cases} (1 + \tau_k) \rho_k, & \omega_k > 1 + \mu, \\ \frac{1}{1 + \tau_k} \rho_k, & \omega_k < \frac{1}{1 + \mu}, \\ \rho_k, & \text{其他。} \end{cases}$$

为了分析算法收敛,构造一个非负序列 $\{\tau_k\}$,使它满足 $\sum_{k=0}^{\infty} \tau_k < +\infty$ 。下面给出了构造序列 $\{\tau_k\}$ 的具体过程。令

$$c_0 = 0, \text{ 则 } c_{k+1} = \begin{cases} c_k, \frac{1}{1+\mu} \leq \omega_k \leq 1+\mu \\ c_{k+1}, \text{其他} \end{cases}, \text{ 用 } c_k \text{ 计算 } \tau_k \text{ 改变的次数。采用如下方法得到非负序列 } \{\tau_k\}, \tau_k = \begin{cases} \mu, c_k < c_{k+1} \text{ 和 } c_{k+1} < c_{\max} \\ \frac{1}{(c_{k+1} - c_{\max})}, c_k < c_{k+1} \text{ 和 } c_{k+1} > c_{\max} \\ 0, \text{其他} \end{cases}。 \text{ 对于给定的整数 } c_{\max} > 0, \text{ 由以上方法得到的非负序列 } \{\tau_k\} \text{ 满足 } \sum_{k=0}^{\infty} \tau_k < +\infty。$$

综上,给出如下自适应投影算法的详细过程。

算法 1 步骤 1,任取初值 $\mathbf{u}^{(0)} \in \mathbf{R}^N, \eta \in (0, 2), \rho > 0, \varepsilon > 0$,并取 $\rho_0 = \rho$,令 $k = 0$;

步骤 2,如果 $\|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|_{\infty} \leq \varepsilon$,则迭代停止;否则进行下一步;

步骤 3,求解方程组 $\mathbf{u}^{(k+1)} + \rho_k \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \rho_k \boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \eta e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$,得 $\mathbf{u}^{(k+1)}$;

步骤 4,选择下一个参数 ρ_{k+1} ,使得 $\frac{1}{1+\tau_k} \rho_k \leq \rho_{k+1} \leq (1+\tau_k) \rho_k$,令 $k := k+1$ 。返回第二步。

在此算法中,由于 $\tau_k \geq 0$ 并且 $\sum_{k=0}^{\infty} \tau_k < +\infty$,则有 $\prod_{k=0}^{\infty} (1+\tau_k) < +\infty$ 。令 $C_{\tau} = \prod_{k=0}^{\infty} (1+\tau_k)$,则有 $\rho_k \in$

$\left[\frac{1}{C_{\tau}} \rho_0, C_{\tau} \rho_0\right]$ 是有界的。

根据文献[6-7],下面给出定理 2,证明参数 η 的最优范围为 $(1, 2)$ 。

定理 2 设 $\{\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$ 为式(4)的解,自适应投影算法产生的序列 $\{\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}\}$,其中序列 $\{\mathbf{u}^{(k)}\}$ 满足:

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* + \rho_{k+1}(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 \leq (1+\xi_k) \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 - c \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2, \quad (6)$$

式中: $\xi_k = 2\tau_k + \tau_k^2, c = \eta(2-\eta)$ 。

证明 由自适应投影算法 $\mathbf{u}^{(k+1)} + \rho_k \boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \rho_k \boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \eta e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})$,以及文献[7]中引理 2 的结论

$$\{\mathbf{u} - \mathbf{u}^* + \rho(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)\}^T e_{\rho}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \|e_{\rho}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|^2 + \rho(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*),$$

则有 $\{\mathbf{u} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)\}^T e_{\rho_k}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) \geq \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda})\|^2 + \rho_k(\mathbf{u} - \mathbf{u}^*)^T (\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^*)$,从而

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 = \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*) - \eta e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2 =$$

$$\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 - 2\eta \{\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\}^T e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}) + \eta^2 \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2 \leq$$

$$\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 - 2\eta \rho_k (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^*)^T (\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*) - 2\eta \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2 + \eta^2 \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2 =$$

$$\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 - 2\eta \rho_k (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^*)^T (\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*) - \eta(2-\eta) \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2,$$

即:

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 \leq$$

$$\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 - 2\eta \rho_k (\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^*)^T (\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*) - \eta(2-\eta) \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2, \quad (7)$$

因为 $\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{q}, \mathbf{M}$ 是正定的,所以:

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 \leq$$

$$\|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 - \eta(2-\eta) \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2, \quad (8)$$

又因为 $0 < \rho_{k+1} \leq (1+\tau_k) \rho_k$,所以有:

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* + \rho_{k+1}(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 \leq (1+\tau_k)^2 \|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2, \quad (9)$$

由式(8)和式(9)有:

$$\|\mathbf{u}^{(k+1)} - \mathbf{u}^* + \rho_{k+1}(\boldsymbol{\lambda}^{(k+1)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 \leq (1+\tau_k)^2 \|\mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{u}^* + \rho_k(\boldsymbol{\lambda}^{(k)} - \boldsymbol{\lambda}^*)\|^2 - \eta(2-\eta) \|e_{\rho_k}(\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)})\|^2。 \text{证毕}$$

注 1 由于 $\eta \in (0, 2)$,式(7)要满足收敛,式(7)右端第 2 项,当 $\eta = 2$ 时 2η 达到最大值;式(7)右端第 3 项,当 $\eta = 1$ 时 $\eta(2-\eta)$ 达到最大。则参数 η 的最优范围易定为 $[1, 2)$ 。

于是,本文可以得到如下收敛性结果。

定理 3 自适应投影算法产生的序列 $\{\mathbf{u}^{(k)}, \boldsymbol{\lambda}^{(k)}\}$ 收敛于 $\{\mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\}$ 。即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^*, \lim_{k \rightarrow \infty} \boldsymbol{\lambda}^{(k)} = \boldsymbol{\lambda}^*$ 。

证明 因为 $\sum_{k=0}^{\infty} (1 + \xi_k) < +\infty$, 令 $C_s = \sum_{i=k_0}^{\infty} (1 + \xi_i)$, $C_p = \prod_{i=k_0}^{\infty} (1 + \xi_i)$ 。设 $\{\tilde{u}, \tilde{\lambda}\}$ 是问题 (3) 的一个解, 利用式 (6) 可以得到:

$$\begin{aligned} \|u^{(k+1)} - \tilde{u} + \rho_{k+1}(\lambda^{(k+1)} - \tilde{\lambda})\|^2 &\leq \prod_{i=k_0}^k (1 + \xi_i) \|u^{(k_0)} - \tilde{u} + \rho_{k_0}(\lambda^{(k_0)} - \tilde{\lambda})\|^2 \leq \\ &C_p \|u^{(k_0)} - \tilde{u} + \rho_{k_0}(\lambda^{(k_0)} - \tilde{\lambda})\|^2, \end{aligned}$$

因此, 存在常数 $C > 0$, 有:

$$\|u^{(k)} - \tilde{u} + \rho_k(\lambda^{(k)} - \tilde{\lambda})\|^2 \leq C, \forall k \geq 0,$$

显然 $\{u^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ 是有界的, 利用式 (6) 和式 (8), 则:

$$\begin{aligned} c \sum_{k=k_0}^{\infty} \|e_{\rho_k}(u^{(k)}, \lambda^{(k)})\|^2 &\leq \|u^{(k_0)} - \tilde{u} + \rho_{k_0}(\lambda^{(k_0)} - \tilde{\lambda})\|^2 + \sum_{k=k_0}^{\infty} \xi_k \|u^{(k)} - \tilde{u} + \rho_k(\lambda^{(k)} - \tilde{\lambda})\|^2 \leq \\ &C + C \sum_{k=k_0}^{\infty} \xi_k \leq (1 + C_s)C. \end{aligned}$$

其中 $c > 0$ 是一个常数, 由上式可知 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_{\rho_k}(u^{(k)}, \lambda^{(k)}) = 0$ 。

设 $\{u^*, \lambda^*\}$ 是 $\{u^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ 的一个聚点且子序列 $\{u^{(k_j)}, \lambda^{(k_j)}\}$ 收敛于 $\{u^*, \lambda^*\}$, 因为 $e_{\rho_k}(u^{(k)}, \lambda^{(k)})$ 是连续的, 则有 $e_{\rho_k}(u^*, \lambda^*) = \lim_{j \rightarrow \infty} e_{\rho_k}(u^{(k_j)}, \lambda^{(k_j)}) = 0$, 所以 $\{u^*, \lambda^*\}$ 是序列 $\{u^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ 的一个解。

假设 $\{u^{**} \neq u^*, \lambda^{**} \neq \lambda^*\}$ 是 $\{u^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ 的另一个聚点, 因为 $\{u^*, \lambda^*\}$ 是 $\{u^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ 的一个聚点, 所以存在 $k_1 > k_0$, 使得:

$$\|u^{(k_1)} - u^* + \rho_{k_1}(\lambda^{(k_1)} - \lambda^*)\| \leq \frac{1}{2\sqrt{C_p}} \|u^{**} - u^*\|,$$

由式 (6) 可知, 对任意 $k > k_1$, 有:

$$\begin{aligned} \|u^{(k)} - u^*\| &\leq \|u^{(k)} - u^* + \rho_k(\lambda^{(k)} - \lambda^*)\| \leq \left(\prod_{i=k_1}^{k-1} (1 + \xi_i)\right)^{\frac{1}{2}} \|u^{(k_1)} - u^* + \rho_{k_1}(\lambda^{(k_1)} - \lambda^*)\| \leq \\ &\sqrt{C_p} \|u^{(k_1)} - u^* + \rho_{k_1}(\lambda^{(k_1)} - \lambda^*)\| \leq \frac{1}{2} \|u^{**} - u^*\|. \end{aligned}$$

因此, 有 $\|u^{(k)} - u^{**}\| > \|u^{**} - u^*\| - \|u^{(k)} - u^*\| \geq \frac{1}{2} \|u^{**} - u^*\| \geq 0, \forall k \geq k_1$ 。显然与假设矛盾, 因此 u^{**} 不是 $\{u^{(k)}\}$ 的聚点, 即 $\{u^{(k)}\}$ 收敛于 u^* 。

由于 $\lambda = Mu + q$, 则 $\lambda^{(k)} = Mu^{(k)} + q, \lambda^* = Mu^* + q$ 。因为 $\{u^{(k)}\}$ 收敛于 u^* , 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} = u^*$, 有:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)} = \lim_{k \rightarrow \infty} (Mu^{(k)} + q) = M \lim_{k \rightarrow \infty} u^{(k)} + q = Mu^* + q = \lambda^*。$$

因此 $\lim_{k \rightarrow \infty} \lambda^{(k)} = \lambda^*$, 即 $\{\lambda^{(k)}\}$ 收敛于 λ^* 。

综上, 序列 $\{u^{(k)}, \lambda^{(k)}\}$ 收敛于 $\{u^*, \lambda^*\}$ 。

证毕

3 算例分析

下面用一维和二维双侧障碍问题的数值算例来验证自适应投影算法的有效性, 并与 Uzawa 算法进行比较。在所有数值计算中, 取 $\eta = 1$ 。

算例 1^[11] 考虑一维双侧障碍问题 $\Omega = [0, 8]$:

$$\begin{cases} -Lv(x) \geq f(x), v(x) = \varphi_1(x), x \in \Omega, \\ -Lv(x) = f(x), \varphi_1(x) \leq v(x) \leq \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ -Lv(x) \leq f(x), v(x) = \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ v(x) = \psi(x), x \in \Gamma. \end{cases}$$

式中: $f(x) = \begin{cases} 5, \forall x \in [0, 4] \\ 3, \forall x \in [4, 8] \end{cases}$, $\varphi_1(x) = \cos x - 3.5, \varphi_2(x) = \sin x + 1.5$, 边界函数 $\psi(x) = -\frac{x}{8}$ 。

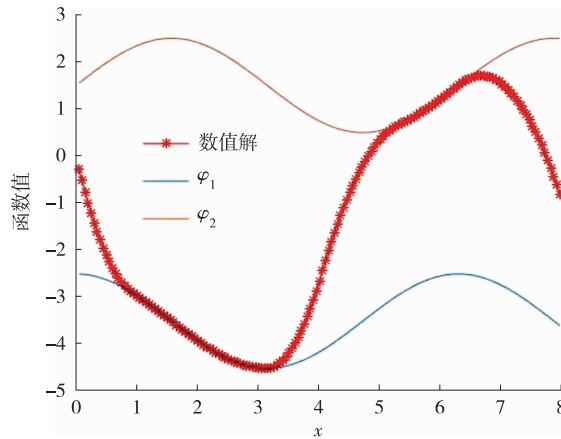


图 1 算例 1 的数值解和障碍函数

Fig. 1 Numerical solution and obstacle function of example 1

本文采用双侧障碍问题的自适应投影算法和迭代终止条件 $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_{\infty} \leq 10^{-5} \|u^{(k+1)}\|_{\infty}$, 由图 1 给出 $h=0.05$ 的数值解, 可以看出本文数值解与文献[11]中的结果吻合。

考察不同参数 ρ 和不同网格剖分对算法收敛性的影响, 表 1 分别对 Uzawa 算法和自适应投影算法所需迭代次数进行了比较, 其中“—”表达迭代次数超过 3 000。结果表明, 对于不同参数 ρ , 自适应投影算法不仅收敛且收敛速度更快, 而 Uzawa 算法参数大于 0.01 就不收敛。

为了考察不同参数 ρ 和不同网格剖分对算法收敛性的影响, 表 2 分别对 Uzawa 算法和自适应投影算法所需 CPU(时间)进行了比较。结果表明, 对于不同参数 ρ , 自适应投影算法仍收敛且迭代时间更少, 而 Uzawa 算法参数大于 0.01 就不收敛。

表 1 处算例 1 中两种算法随步长变化所需迭代次数情况

Tab. 1 The number of iterations required for two algorithms with varying step sizes of example 1

ρ	Uzawa 算法			自适应投影算法		
	$h=0.4$	$h=0.2$	$h=0.1$	$h=0.4$	$h=0.2$	$h=0.1$
10^{-3}	—	2 965	2 965	36	41	49
10^{-2}	443	408	不收敛	33	38	47
10^{-1}	不收敛	不收敛	不收敛	32	40	42
10^0	不收敛	不收敛	不收敛	26	36	46
10^1	不收敛	不收敛	不收敛	29	39	49
10^2	不收敛	不收敛	不收敛	32	41	50
10^3	不收敛	不收敛	不收敛	36	44	52

表 2 算例 1 中两种算法随步长变化所需 CPU 时间情况

Tab. 2 The CPU time required for two algorithms to vary with step sizes of example 1

ρ	Uzawa 算法			自适应投影算法		
	$h=0.4$	$h=0.2$	$h=0.1$	$h=0.4$	$h=0.2$	$h=0.1$
10^{-3}	0.025 835	0.028 751	0.030 928	0.005 879	0.006 837	0.016 380
10^{-2}	0.005 584	0.005 218	0.031 503	0.003 819	0.004 325	0.013 402
10^{-1}	0.025 604	0.028 134	0.030 465	0.003 002	0.004 317	0.011,740
10^0	0.024 004	0.029 141	0.030 990	0.003 080	0.004 782	0.012 859
10^1	0.023 774	0.026 175	0.028 707	0.003 169	0.004 906	0.012 675
10^2	0.023 992	0.028 938	0.029 333	0.003 377	0.004 444	0.013 315
10^3	0.023 590	0.030 079	0.029 682	0.003 817	0.004 703	0.013 805

算例 2^[11] 考虑二维双侧障碍问题 $\Omega = [-1, 1] \times [-1, 1]$:

$$\begin{cases} -Lv(x) \geq f(x), v(x) = \varphi_1(x), x \in \Omega, \\ -Lv(x) = f(x), \varphi_1(x) \leq v(x) \leq \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ -Lv(x) \leq f(x), v(x) = \varphi_2(x), x \in \Omega, \\ v(x) = \psi(x), x \in \Omega. \end{cases}$$

式中: $f(x_1, x_2) = 100\sin(3x_1)$, $\psi(x_1, x_2) = 0$, $\varphi_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 3$, $\varphi_2(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3$, 且边界函数为 $\psi(x_1, x_2) = 0$ 。

本文采用自适应投影算法和迭代终止条件 $\|u^{(k+1)} - u^{(k)}\|_\infty \leq 10^{-5} \|u^{(k+1)}\|_\infty$, 图 2 给出了步长 $h = 0.05$ 的数值解, 可以看出本文数值解与文献[11]中的结果吻合。

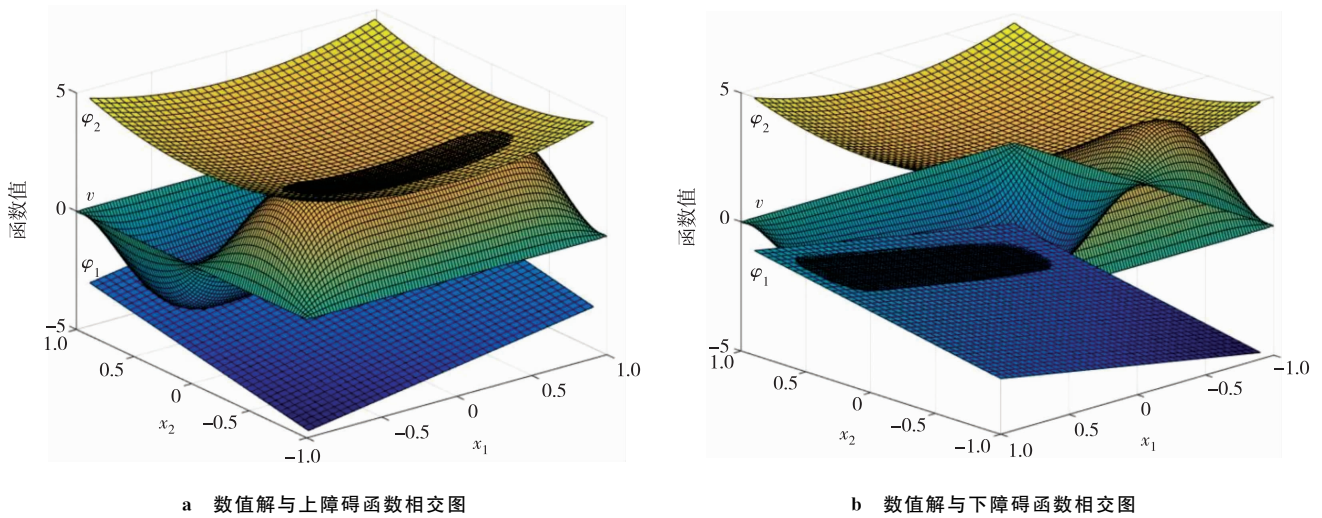


图 2 算例 2 的数值解与障碍函数

Fig. 2 Numerical solution and obstacle function of example 2

类似于算例 1, 表 3 分别对 Uzawa 算法和投影算法所需的迭代次数进行了比较。结果同样表明, 对于不同参数 ρ , 自适应投影算法不仅收敛且收敛速度更快, 而 Uzawa 算法参数大于 0.1 就不收敛。

表 3 算例 2 中两种算法随步长变化所需迭代次数情况

Tab. 3 The number of iterations required for two algorithms with varying step sizes of example 2

ρ	Uzawa 算法			自适应投影算法		
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$
10^{-3}	—	—	—	41	61	61
10^{-2}	1 733	—	—	36	54	59
10^{-1}	249	824	2 575	36	48	58
10^0	不收敛	不收敛	不收敛	35	43	56
10^1	不收敛	不收敛	不收敛	39	42	55
10^2	不收敛	不收敛	不收敛	38	46	55
10^3	不收敛	不收敛	不收敛	39	48	58

同样, 表 4 分别对 Uzawa 算法和自适应投影算法所需的 CPU(时间)进行了比较。结果也表明, 对于不同参数 ρ , 自适应投影算法仍收敛且迭代时间更少, 而 Uzawa 算法参数大于 0.1 就不收敛。

表 4 算例 2 中两种算法随步长变化所需 CPU 时间情况

Tab. 4 The number of iterations required for two algorithms with varying step sizes of example 2

ρ	Uzawa 算法			自适应投影算法		
	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$	$h=0.1$	$h=0.05$	$h=0.025$
10^{-3}	0.160 107	0.208 802	0.644 196	0.065 741	0.123 912	0.763 025
10^{-2}	0.076 963	0.211 075	0.585 762	0.012 564	0.068 083	0.688 904
10^{-1}	0.013 168	0.056 177	0.522 419	0.012 508	0.060 824	0.681 052
10^0	0.131 304	0.199 433	0.613 150	0.012 092	0.057 235	0.671 063
10^1	0.132 272	0.183 740	0.590 659	0.013 654	0.051 203	0.647 851
10^2	0.130 505	0.181 368	0.572 627	0.012 948	0.057 780	0.615 569
10^3	0.128 255	0.189 225	0.580 095	0.013 401	0.060 788	0.657 863

4 结论

本文提出求解双侧障碍问题的自适应投影算法。该方法先采用中心差分格式将问题离散为一个有限维双侧障碍问题,然后再利用选取参数的自适应法则,得到求解双侧障碍问题的自适应投影算法,再进行收敛性分析。并用数值算例和其他的方法进行比较,结果表明算法不仅收敛较快,而且不同初始参数 ρ 对自适应投影影响较小。

参考文献:

- [1] 韩渭敏,程晓良. 变分不等式简介[M]. 北京:高等教育出版社,2007:3-47.
HAN W M, CHENG X N. Introduction to variational inequalities[M]. Beijing: Higher Education Press, 2007: 3-47.
- [2] 韩继业,修乃华,戚厚铎. 非线性互补理论与算法[M]. 上海:科学技术出版社,2006:17-141.
HAN J Y, XIU N H, QI H D. Nonlinear complementary theory and algorithms[M]. Shanghai: Science and Technology Press, 2006: 17-141.
- [3] 张守贵. 求解自由边界问题的投影收缩算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(2):50-52.
ZHANG S G. Projection contraction algorithm for solving free boundary problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2015, 32(2): 50-52.
- [4] 张守贵. 自由边界问题的线性互补投影迭代算法[J]. 西南师范大学学报(自然科学版),2013,38(7):15-19.
ZHANG S G. Linear projection iterative algorithm for free boundary problems[J]. Journal of Southwest Normal University (Natural Science Edition), 2013, 38(7): 15-19.
- [5] 郭楠馨,张守贵. 自由边界问题的自适应 Uzawa 块松弛算法[J]. 应用数学和力学,2019,40(6):682-693.
GUO N X, ZHANG S G. Adaptive Uzawa block relaxation algorithm for free boundary problems[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2019, 40(6): 682-693.
- [6] 钟艳丽,严月月,张守贵. 求解单侧障碍问题的自适应投影方法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2018,35(1):76-82.
ZHONG Y L, YAN Y Y, ZHANG S G. Adaptive projection method for solving unilateral obstacle problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2018, 35(1): 76-82.
- [7] 严月月,钟艳丽,张守贵. 自由边界问题的改进投影算法[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2017,34(1):70-73.
YAN Y Y, ZHONG Y L, ZHANG S G. An improved projection algorithm for free boundary problems[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(1): 70-73.
- [8] MUERA C M, TIBA D. A direct algorithm in some free boundary problems[J]. Journal of Numerical Mathematics, 2016, 24: 253-271.
- [9] YUAN D M, Xi L, LEI C F. A fast numerical method for solving a regularized problem associated with obstacle problems[J]. Journal of the Korean Mathematical Society, 2012, 49: 893-905.
- [10] ADDOU A, IDOUH A, SEDDOUG B. A projection algorithm for bilateral obstacle problem[J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2008, 77: 142-150.

- [11] BOUCHLAGHEM M, MERMRI E B. A Uzawa algorithm with multigrid solver for a bilateral obstacle problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2021, 389: 1255-53.
- [12] LEE P, KIM T W, KIM S. Accurate and efficient numerical solutions for elliptic obstacle problems[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2017(1): 34-58.
- [13] WANG F, CHENG X L. An algorithm for solving the double obstacle problems[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 201: 221-228.
- [14] YUAN D M, CHENG X L. An iterative algorithm based on the piecewise linear system for solving bilateral obstacle problems [J]. International Journal of Computer Mathematics, 2012, 89: 2374-2384.
- [15] BOUCHLAGHEM M, MERMRI E B. Analysis of a mixed formulation of a bilateral obstacle problem[J]. Applied Mathematics and Computation, 2018, 320: 45-55.
- [16] LUCA C, MARTA L, JUAN M. Discrete approximations to the double-obstacle problem and optimal stopping of tug-of-war games[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 2017, 369: 7387-7403.

Operations Research and Cybernetics

A Self-Adaptive Projection Algorithm for the Bilateral Obstacle Problem

CHENG Lan, ZHANG Linsen, ZHANG Shougui

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: An adaptive projection iterative algorithm for solving a class of free boundary problems with bilateral obstacles was developed. The finite difference method was used to discretize the obstacle problem into a finite dimensional two-sided obstacle problem, which was equivalent to a new projection fixed point problem, and the projection algorithm for the two-sided obstacle problem was obtained. The parameters are automatically adjusted by iterating data to accelerate convergence. An adaptive projection algorithm for solving bilateral obstacle problem was proposed, and the algorithm process and convergence analysis were given. Both theoretical analysis and numerical examples demonstrate the effectiveness of the proposed algorithm.

Keywords: bilateral disorder; finite difference; projection algorithm; self-adaptive rule

(责任编辑 陈 乔)