DOI:10.11721/cqnuj20230415

单位圆周 Lebesgue 空间的 3 阶斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间*

赵彩竹，许安见
(重庆理工大学 理学院，重庆 400054)

摘要:Toeplitz 算子的约化子空间与不变子空间是近些年算子理论研究的热点,斜 Toeplitz 算子是 Toeplitz 算子的自然推广,本文对单位圆周上 Lebesgue 空间 3 阶斜 Toeplitz 算子的约化子空间问题进行研究。通过计算以 z^N 为符号的 3 阶斜 Toeplitz 算子在单位圆周上 Lebesgue 空间的典则基上的作用,对 N 为模 3 余 1、模 3 余 2 及模 3 余 0 的 3 类情形定义了 S_N,由此得到 N 的划分,对应给出了 Lebesgue 空间的一组分解 $H_j^{(N)}$。证明对 $\forall j\in S_N$,$H_j^{(N)}$ 均为以 z^N 为符号的 3 阶斜 Toeplitz 算子的全部极小约化子空间。推广了关于 2 阶斜 Toeplitz 算子约化子空间的相关结果,丰富了 Lebesgue 空间上斜 Toeplitz 算子的约化子空间研究,对研究斜 Toeplitz 算子的结构具有重要意义。

关键词:Lebesgue 空间;3 阶斜 Toeplitz 算子;极小约化子空间

中图分类号:O177.1　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)04-0117-05

1 预备知识

自算子理论的诞生,算子的不变子空间问题和约化子空间问题一直是算子理论研究的核心问题,对研究算子结构和分类具有非常重要的意义。函数空间上的算子理论是联系着函数论与算子理论的桥梁。目前函数空间上的某些具有代表性的线性算子的结构是算子理论中研究的热点,其中算子的不变子空间问题一直以来都是最基本的研究问题之一。迄今为止,可分 Hilbert 空间上的不变子空间问题仍是算子理论中的一个著名的公开问题,即在可分 Hilbert 空间上是否对每个有界线性算子都有非平凡的不变子空间? 一个著名的结果是位移算子的 Beurling 定理,将位移算子酉等价于 Hardy 空间上的乘法算子,再用 Hardy 空间中的内函数完整地刻画了位移算子的不变子空间。Bercovici 等人[1] 证明了每一个无穷维可分 Hilbert 空间上的不变子空间问题和 Bergman 空间上以 z 为符号的乘法算子的不变子空间的万有性问题是等价的,由此引发了众多学者对 Bergman 空间上乘法算子的不变子空间问题的关注。

1996 年 Hedenmalm 等人[2] 证明了 Bergman 空间上的 Beurling 型定理。作为一类特殊的不变子空间,Bergman 空间上乘法算子的约化子空间也具有重要的理论意义。1998 年,孙善利等人[3] 开始研究单位圆盘 Bergman 空间,完全刻画了符号为两个 Blaschke 乘积的解析 Toeplitz 算子的约化子空间。2000 年朱克等人[4] 也研究了以二阶 Blaschke 乘积 φ 为符号的乘积算子 M_φ 有且仅有两个非平凡极小约化子空间,并由此猜测以有限阶 Blaschke 乘积为符号的 Toeplitz 算子的极小约化子空间的个数等于该 Blaschke 乘积的阶数。文献[5-11] 也做出了重要工作。

1995 年 Ho 引入并研究了 Lebesgue 空间的斜 Toeplitz 算子,近些年来斜 Toeplitz 算子已被推广到 Hardy、Bergman 空间,众多学者对 Hardy 空间上的 Toeplitz 算子的有界性、谱和紧性等都有很多研究[12-17],但主要是研究的 2 阶斜 Toeplitz 算子,即 $A_\varphi=WM_\varphi$,其中的 W 算子定义为:$\forall n\in\mathbf{Z}$,$W(e_{2n})=e_n$,$W(e_{2n-1})=0$。Munmun 等人[18] 研究了单位圆周 Lebesgue 空间上斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间,给出了 2 阶斜 Toeplitz 算子的约化子空间的具体形式。杜巧玲等人[19] 研究了单位圆周 Hardy 空间上斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间,他们

* **收稿日期**:2022-02-16　**修回日期**:2023-04-25　**网络出版时间**:2023-08-14T16:24
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11871127);重庆市自然科学基金项目(No. cstc2018jcyjAX0215;No. cstc2019jcyj-msxmX0295);重庆市研究生科研创新项目(No. CYS21474)
第一作者简介:赵彩竹,女,研究方向为算子理论,E-mail:1187510199@qq.com;**通信作者**:许安见,男,教授,E-mail:xuaj@cqut.edu.cn
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230814.1142.006

也进一步研究了双圆盘 Hardy 空间上斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间。本文在2阶的基础上，深入研究了3阶的斜 Toeplitz 算子在 Lebesgue 空间上的极小约化子空间的具体形式，扩展了2阶斜 Toeplitz 算子的结构，对研究 k 阶斜 Toeplitz 算子的结构有一定的参考价值。

设 T 表示复平面 $\mathbf{C}$ 上的单位圆周，$L^2(T)$ 为 T 上所有勒贝格平方可积函数的空间，因此：

$$L^2(T)=\left\{f:T\to\mathbf{C}\mid f(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}a_nz^n,a_n\in\mathbf{C},\sum_{n\in\mathbf{Z}}|a_n|^2<\infty\right\}。$$

对于 N，定义 $e_n(z):=z^n,z\in\mathbf{C}$，则 $\{e_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ 是 $L^2(T)$ 的正交正规基，对于一个有界函数 $\varphi\in L^2(T)$，$L^2(T)$ 上的乘法算子 M_φ 定义为 $M_\varphi f=\varphi f$，定义 $W_3(z^n)=\begin{cases}z^{n/3},n\text{ 能被 3 整除}\\0,\text{否则}\end{cases}$，及 $L^2(T)$ 上3阶斜 Toeplitz 算子为 $A_\varphi=W_3M_\varphi$。本文研究的是 A_{z^N} 的极小约化子空间。

2　A_{z^N} 的极小约化子空间

定义 1　对于 $N\in\mathbf{Z}$，定义 S_N 如下：

1) N 为模3余1时，有 $S_N:=\{(N-1)\pm 3m,N\pm 3m\mid m\in\mathbf{N}\}$；

2) N 为模3余2时，有 $S_N:=\{(N-2)\pm 3m,N\pm 3m\mid m\in\mathbf{N}\}$；

3) N 为模3余0时，有 $S_N:=\{N\pm(1+3m),N\pm(2+3m)\mid m\in\mathbf{N}\}$。

$H_N:=\mathrm{span}\{e_N\}$，对于 $\forall j\in S_N$，令 $\Lambda_j^{(N)}=\left\{3^t\cdot j-\dfrac{N\cdot(3^t-1)}{2}\right\}_{t=0}^{\infty}$，$H_j^{(N)}$ 表示 $\{e_k\}_{k\in\Lambda_j^{(N)}}$ 的闭线性扩张。记 $\varepsilon_t^{(j,N)}:=e_{3^t\cdot j-\frac{N\cdot(3^t-1)}{2}}$，则 $H_j^{(N)}$ 就是 $\{\varepsilon_t^{(j,N)}\}_{t\in\mathbf{Z}_+}$ 的闭线性扩张。特别地，对 $\forall j\in S_N$ 有 $\varepsilon_0^{(j,N)}=\{ce_j\mid c\in\mathbf{C}\}$。

注　若 N 为偶数时，对 $\varphi(z)=z^N$ 有 $A_\varphi e_{N/2}=e_{N/2}=A_\varphi^*e_{N/2}$，则 $H_{N/2}$ 是 A_φ 的约化子空间，而 $\dim H_{N/2}=1$，则 $H_{N/2}$ 是 A_φ 的极小约化子空间。

引理 1　对于 $\forall j,k\in S_N(j\neq k)$ 有 $\Lambda_j^{(N)}\cap\Lambda_k^{(N)}=\varnothing$。

证明　设 $x\in\Lambda_j^{(N)}\cap\Lambda_k^{(N)}$，$\exists t_1,t_2>0$，使得：

$$x=3^{t_1}\cdot j-\frac{N\cdot(3^{t_1}-1)}{2}\in\Lambda_j^{(N)};x=3^{t_2}\cdot k-\frac{N\cdot(3^{t_2}-1)}{2}\in\Lambda_k^{(N)}。$$

有 $3^{t_1}\cdot j-3^{t_2}\cdot k=\dfrac{N\cdot(3^{t_1}-3^{t_2})}{2}$，即 $3^{t_1}\left(j-\dfrac{N}{2}\right)=3^{t_2}\left(k-\dfrac{N}{2}\right)$。

因为 $j\neq k$，所以 $t_1\neq t_2$，设 $t_1>t_2$，得：

$$2k-N=(2j-N)3^{t_1-t_2},\tag{1}$$

等式右边必含3的因子。

下面将 N 分为3种情况分别讨论等式左边的情况：

1) $N=3l+1$ 时，有 $S_N=\{(N-1)\pm 3m,N\pm 3m\mid m\in\mathbf{N}\}$，则：

当 $k=N\pm 3m$ 时，有：

$$2k-N=3l+1\pm 6m。\tag{2}$$

当 $k=(N-1)\pm 3m$ 时，有：

$$2k-N=(3l-1)\pm 6m。\tag{3}$$

2) $N=3l+2$ 时，有 $S_N=\{(N-2)\pm 3m,N\pm 3m\mid m\in\mathbf{N}\}$，则：

当 $k=N\pm 3m$ 时，有：

$$2k-N=3l+2\pm 6m。\tag{4}$$

当 $k=(N-2)\pm 3m$ 时，有：

$$2k-N=(3l-2)\pm 6m。\tag{5}$$

3) $N=3l$ 时，有 $S_N=\{N\pm(1+3m),N\pm(2+3m)\mid m\in\mathbf{N}\}$，则：

当 $k=N\pm(1+3m)$ 时，有：

$$2k-N=3l\pm(2+6m)。\tag{6}$$

当 $k=N\pm(2+3m)$ 时，有：

$$2k-N=3l\pm(4+6m)。\tag{7}$$

式(2)～(7)表明式(1)的左边不含 3 的因子，矛盾。因此 $\Lambda_j^{(N)}\cap\Lambda_k^{(N)}=\varnothing$，得证。　　证毕

由引理 1 可得下面结论。

推论 1　对于 $\forall j,k\in S_N(j\neq k)$ 有 $H_j^{(N)}\cap H_k^{(N)}=\{0\}$。

引理 2　对 $\forall n\in\mathbf{Z}$，当 N 为偶数时，$n\neq\dfrac{N}{2}$，存在一个唯一的 $j\in S_N$ 使得 $n\in\Lambda_j^{(N)}$。

证明　当 $N=3k$ 时，有 $S_N=\{N\pm(1+3m),N\pm(2+3m)\mid m\in\mathbf{N}\}$。

(i) 当 $n=3m+1$ 时，令 $j=n$，则 $j\in S_N$，令 $t=0$，有 $n=3^0\left(n-\dfrac{N}{2}\right)+\dfrac{N}{2}\in\Lambda_j^{(N)}$。

(ii) 当 $n=3m+2$ 时，令 $j=n$，则 $j\in S_N$，令 $t=0$，有 $n=3^0\left(n-\dfrac{N}{2}\right)+\dfrac{N}{2}\in\Lambda_j^{(N)}$。

(iii) 当 $n=3m$ 时，若 $n+N$ 为 3 的倍数时，令 $\dfrac{n+N}{3}=k_1$；若 k_1+N 仍为 3 的倍数时，令 $\dfrac{(k_1+N)}{3}=k_2$；……继续向下作用，使得 $k_{m-1}+N$ 仍是 3 的倍数，但 k_m+N 不为 3 的倍数，此时有：

$$\frac{k_{m-1}+N}{3}=k_m;k_m+N\neq 3l;k_m+N=3l+1\text{ 或 }k_m+N=3l+2。$$

由此可得 $n=3^m\left(k_m-\dfrac{N}{2}\right)+\dfrac{N}{2}$。

令 $j=k_m$，则 $j\in S_N$，令 $t=m$，$n=3^m\left(k_m-\dfrac{N}{2}\right)+\dfrac{N}{2}\in\Lambda_j^{(N)}$，当 $N=3k$ 时，得证；当 $N=3k+1$，$N=3k+2$ 时的情形可类似证明。　　证毕

引理 3　对 $N\in\mathbf{Z}$，令 $\varphi(z)=z^N$，则对 $\forall j\in S_N$，$H_j^{(N)}$ 是 A_φ 的约化子空间且 A_φ 在 $H_j^{(N)}$ 上的限制是向后单侧移位。

证明　对 $\forall j\in S_N$，$\{\varepsilon_t^{(j,N)}\}_{t\in\mathbf{Z}_+}$ 是 $H_j^{(N)}$ 的标准正交基，对 $t\in\mathbf{Z}_+$，有：

$$A_\varphi\varepsilon_t^{(j,N)}(z)=W_3M_\varphi z^{3^t\cdot j-\frac{N\cdot(3^t-1)}{2}}=W_3z^{3^t\cdot j-\frac{3N\cdot(3^{t-1}-1)}{2}}。$$

如果 $t=0$，$j\in S_N$ 得 $3^t\cdot j-\dfrac{3N\cdot(3^{t-1}-1)}{2}=j+N$。

下面分 3 种情况对 $j+N$ 进行讨论：

(i) $N=3l+1$ 时，有 $S_N=\{(N-1)\pm 3m,N\pm 3m\mid m\in\mathbf{N}\}$，则：若 $j=N\pm 3m$，则 $j+N=6l+2\pm 3m$；若 $j=(N-1)\pm 3m$，则 $j+N=(6l+1)\pm 3m$。

(ii) $N=3l+2$ 时，有 $S_N=\{(N-2)\pm 3m,N\pm 3m\mid m\in\mathbf{N}\}$，则：若 $j=N\pm 3m$，则 $j+N=6l+4\pm 3m$；若 $j=(N-2)\pm 3m$，则 $j+N=(6l+2)\pm 3m$。

(iii) $N=3l$ 时，有 $S_N=\{N\pm(1+3m),N\pm(2+3m)\mid m\in\mathbf{N}\}$，则：若 $j=N\pm(1+3m)$，则 $j+N=6l\pm(1+3m)$；若 $j=N\pm(2+3m)$，则 $j+N=6l\pm(2+3m)$。

由情况(i)、(ii)、(iii)知 $j+N$ 都不被 3 整除，即 $W_3z^{j+N}=0$，故 $A_\varphi\varepsilon_t^{(j,N)}=\begin{cases}0,t=0\\ \varepsilon_{t-1}^{(j,N)},t>0\end{cases}$，所以 $H_j^{(N)}$ 是 A_φ 作用不变的。

接下来考虑对于所有的 $t\in\mathbf{Z}_+$，有 $A_\varphi^*\varepsilon_t^{(j,N)}=M_\varphi^*W_3^*z^{3^t\cdot j-N\cdot\frac{1}{2}(3^t-1)}=\varepsilon_{t+1}^{(j,N)}$。令 $k\in\mathbf{Z}_+$，则：

$$\langle A_\varphi\varepsilon_0^{(j,N)},\varepsilon_k^{(j,N)}\rangle=0=\langle\varepsilon_0^{(j,N)},\varepsilon_{k+1}^{(j,N)}\rangle。$$

对于 $m>0$，有 $\langle A_\varphi\varepsilon_m^{(j,N)},\varepsilon_k^{(j,N)}\rangle=\langle\varepsilon_{m-1}^{(j,N)},\varepsilon_k^{(j,N)}\rangle=\langle\varepsilon_m^{(j,N)},\varepsilon_{k+1}^{(j,N)}\rangle$。因此，对于 $f=\sum_i\alpha_i\varepsilon_i^{(j,N)}\in H_j^{(N)}$ 有：

$$\langle A_\varphi f,\varepsilon_k^{(j,N)}\rangle=\sum_i\alpha_i\langle A_\varphi\varepsilon_i^{(j,N)},\varepsilon_k^{(j,N)}\rangle=\sum_i\alpha_i\langle\varepsilon_i^{(j,N)},\varepsilon_{k+1}^{(j,N)}\rangle=\langle f,\varepsilon_{k+1}^{(j,N)}\rangle。$$

即 $A_\varphi^*\varepsilon_k^{(j,N)}=\varepsilon_{k+1}^{(j,N)}$，$\forall k\in\mathbf{Z}_+$。　　证毕

因此，$H_j^{(N)}$ 是 A_φ 的约化子空间且 A_φ 在 $H_j^{(N)}$ 上是向后单侧移位。

定理 1 对 $N\in\mathbf{Z}$,如果 $\varphi(z)=z^N$,则对 $\forall j\in S_N$,$H_j^{(N)}$ 是 A_φ 的极小约化子空间。

证明 根据引理 3 可知 $H_j^{(N)}$ 是 A_φ 的约化子空间且 A_φ 在 $H_j^{(N)}$ 上的限制是向后单侧移位,A_φ^* 在 $H_j^{(N)}$ 上的限制是向前单侧移位,但由于单侧移位是不可约的,因此 $H_j^{(N)}$ 不会包含任何适当的约化子空间,所以 $H_j^{(N)}$ 是 A_φ 的极小约化子空间。 证毕

3 结束语

Munmun 等人[18]研究了以 N 为符号的 2 阶斜 Toeplitz 算子所有极小约化子空间的具体形式,并证明了每一个极小约化子空间都可由一个 N-transparent 函数生成,本文在此基础上给出了 3 阶斜 Toeplitz 算子在 Lebesgue 空间上的极小约化子空间的具体形式,并将在后续研究中考虑 3 阶斜 Toeplitz 算子是否由一种特殊的函数生成,这个函数在 3 阶情形下又是如何定义。

参考文献:

[1] APOSTOL C,BERCOVICI H,FOIAS C,et al. Invariant subspaces dilation theory and the structure of the predual of a dual algebra I[J]Journal of Functional Analysis,1985,63(3):369-404.

[2] HEDENMALM H,RICHTER S. Interpolating sequences and invariant subspaces of given index in the Bergman spaces[J]. Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik,1996,477:13-30.

[3] 孙善利,王悦建. Bergman 空间上一类解析 Toeplitz 算子的换位子[J]. 吉林大学自然科学学报,1997(2):4-8.
SUN S L,WANG J Y. Commutator of a class of Toeplitz operators on Bergman spaces[J]. Journal of Natural Science of Jilin University,1997(2):4-8.

[4] ZHU K H. Reducing subspaces for a class of multiplication operators[J]. Journal of the London Mathematical Society,2000,62(2):553-568.

[5] HU J Y,SUN S H,XU X M,et al. Reducing subspace of analytic Toeplitz operators on the Bergman space[J]. Integral Equations and Operator Theory,2004,49(3):387-395.

[6] DOUGLAS R G,PUTINAR M,WANG K. Reducing subspaces for analytic multipliers of the Bergman space[J]. Journal of Functional Analysis,2012,263(6):1744-1765.

[7] DOUGLAS R G,SUN S H,ZHENG D C. Multiplication operators on the Bergman space via analytic continuation[J]. Advances in Mathematics,2011,226(1):541-583.

[8] GUO K Y,HUANG H S. On multiplication operators on the Bergman space: similarity, unitary equivalence and reducing subspaces[J]. Journal of Operator Theory,2011,65(2):355-378.

[9] GUO K Y,SUN S H,ZHENG D C,et al. Multiplication operators on the Bergman space via the Hardy space of the bidisk[J]. Journal Für Die Rne Und Angewandte Mathematik,2009(628):129-168.

[10] STEPHENSON K. Analytic functions and Hypergroups of function pairs[J]. Indiana University Mathematics Journal,1982,31(6):843-884.

[11] THOMSON J E. The commutants of certain analytic Toeplitz operators[J]. Proceeding of American Mathematical Society,1974,54(1):165-169.

[12] VIRTANEN J A. Fredholm Theory of Toeplitz Operators on the Hardy Space H_1[J]. Bulletin of the London Mathematical Society,2006,38(1):143-155.

[13] 肖辉. Toeplitz 算子的可逆性[D]. 成都:四川大学,2005.
XIAO H. Invertibility of Toeplitz operator[D]. Chengdu:Sichuan University,2005.

[14] HALMOS P R, BROWN A. Algebraic Properties of Toeplitz Operators[J]. Journal Für Die Rne Und Angewandte Mathematik,1964,1964(213):89-102.

[15] DOUGLAS R G. Banach algebra techniques in operator theory[M]. 2nd Edition. New York:Springer Verlag,2008.

[16] WIDOM H. Toeplitz operators on H_p[J]. Pacific Journal of Mathematics,1966,19(3):573-582.

[17] 曹广福,孙顺华. H^p 空间上 Toeplitz 算子的本质谱[J]. 科学通报,1997,42(5):475-477.
CAO G F,SUN S H. Essential spectrum of Toeplitz operators on H^p space[J]. Chinese Science Bulletin,1997,42(5):475-477.

[18] HAZARIKA M,MARIK S. Reducing and minimal reducing subspaces of slant Toeplitz operators[J]. Advances in Operator Theory,2020(5):336-346.

[19] 杜巧玲,许安见. Hardy 空间上的斜 Toeplitz 算子的极小约化子空间[J]. 重庆理工大学学报(自然科学版),2021,35(8):224-229.

DU Q L, XU A J. Minimal reduction subspaces of slant Toeplitz operators on Hardy spaces[J]. Journal of Chongqing University of Technology (Natural Science Edition),2021,35(8):224-229.

Minimal Reduced Subspaces of Third-Order Slant Toeplitz Operators on Lebesgue Spaces Over the Unit Circumference

ZHAO Caizhu, XU Anjian

(College of Science, Chongqing University of Technology, Chongqing 400054, China)

Abstract: The reduced subspaces and invariant subspaces of Toeplitz operators are the hot spots of operator theory in recent years. The slant Toeplitz operator is a natural extension of Toeplitz operator. The reduced subspaces of the third order slant Toeplitz operators on unit circle are studied here. By calculating the action of the 3rd order slant Toeplitz operator with z^N as the symbol on the canonical basis of Lebesgue Spaces on the unit circle, S_N is defined for three kinds of cases where N is mod 3 residue 1, mod 3 residue 2 and mod 3 residue 0, and the division of N is obtained, corresponding to a group of decomposition $H_j^{(N)}$ of Lebesgue Spaces. It is proved that for $\forall j \in S_N$, $H_j^{(N)}$ are all the minimal subspaces of the 3rd order slant Toeplitz operators with z^N sign. The results of reduced subspaces of order 2 slant Toeplitz operators are extended here, which enriches the study of reduced subspaces of slant Toeplitz operators on Lebesgue Spaces, and is of great significance to the study of the structure of slant Toeplitz operators.

Keywords: Lebesgue spaces; third-order slant Toeplitz operators; minimal reducing subspace

(责任编辑 黄 颖)