DOI:10.11721/cqnuj20230510

图的全局 2-彩虹控制的一个注记*

郝国亮[1,2]，曾淑婷[2]，庄　蔚[3]

(1. 菏泽学院 数学与统计学院，山东 菏泽 274015；2. 东华理工大学 理学院，南昌 330013；
3. 厦门理工学院 数学与统计学院，福建 厦门 361024)

摘要：为了研究树 T 的全局 2-彩虹控制数 $\gamma_{gr2}(T)$ 与 2-彩虹控制数 $\gamma_{r2}(T)$ 间的关系，分析了图的结构，采用分类讨论法和反证法，完全刻画了 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 成立的直径等于 5 的所有树 T，解决了 Amjadi 等人 2017 年未解决的问题。

关键词：全局 2-彩虹控制；2-彩虹控制；补图；刻画

中图分类号：O157.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：1672-6693(2023)05-0103-05

1 预备知识与主要结果

在本文中，用 $G=(V(G),E(G))$ 表示一个无向简单图，其中 $V(G)$ 为顶点集，$E(G)$ 为边集。顶点 v 的邻域 $N(v)$ 是指与 v 相邻的顶点构成的集合。顶点 v 的度 $d(v)=|N(v)|$。顶点 u 与 v 间最短路的长称为 u 与 v 的距离。图的直径是指任意 2 点间距离的最大值。对边 uv 剖分是指在边 uv 上添加 1 个新顶点 w，使得边 uw 和 wv 代替边 uv。图 G 的补图 $\overline{G}$ 是指和 G 有相同顶点集的图，并满足 $\overline{G}$ 中 2 个顶点相邻当且仅当它们在 G 中不相邻。

1 个无圈连通图称为树。在树中，度为 1 的顶点称为叶子点，只与 1 个叶子点相邻的顶点称为弱支撑点，至少与 2 个叶子点相邻的顶点称为强支撑点。称 $r+1$ 阶完全二部图 $K_{1,r}(r\geqslant 2)$ 为星形图，并称度为 r 的顶点为它的中心。剖分星形图 $K_{1,r}$ 的每条边所得到的图称为健康蜘蛛树 $S(K_{1,r})$，并称星形图 $K_{1,r}$ 的中心为健康蜘蛛树的头，与头距离为 2 的顶点称为脚。用 P_n 表示含有 n 个顶点的路。

用 $2^{\{1,2\}}$ 表示集合 $\{1,2\}$ 的幂集。图 G 的 2-彩虹控制函数 f 是指映射 $f:V(G)\to 2^{\{1,2\}}$ 使得如果顶点 v 满足 $f(v)=\varnothing$，则 $\bigcup\limits_{u\in N(v)} f(u)=\{1,2\}$。图 G 的 2-彩虹控制函数 f 的权为 $\omega(f)=\sum\limits_{u\in V(G)}|f(u)|$。图 G 的 2-彩虹控制数 $\gamma_{r2}(G)$ 是指图 G 的所有 2-彩虹控制函数的最小权。称权为 $\gamma_{r2}(G)$ 的 2-彩虹控制函数为 $\gamma_{r2}(G)$-函数。如果函数 f 既是图 G 又是它补图 $\overline{G}$ 的 2-彩虹控制函数，那么称 f 为 G 的全局 2-彩虹控制函数。图 G 的全局 2-彩虹控制数 $\gamma_{gr2}(G)$ 是指图 G 的所有全局 2-彩虹控制函数的最小权。

图的彩虹控制问题最早于 2005 年[1]被提出，随后众多学者陆续给出了有关图的彩虹控制的相关结果[2-6]。Alqesmah 等人[7]和 Amjadi 等人[8]独立引入了图的 2-彩虹控制数的一个衍生变量，即图的全局 2-彩虹控制数。Alqesmah 等人[7]给出了一些特殊图类的全局 2-彩虹控制数的精确值，并刻画了全局 2-彩虹控制数等于顶点数的连通图。2017 年，Amjadi 等人[8]证明了：如果 T 是直径不小于 6 的树，则 $\gamma_{gr2}(T)<\gamma_{r2}(T)+1$，并且在此基础上刻画了 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 成立的直径不等于 5 的所有树 T。受 Amjadi 等人[8]研究工作的启发，本文继续研究 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 成立的树 T 的刻画问题，得到了如下结论。

定理 1　对任意直径是 5 的树 T，$\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 当且仅当 $T\in\bigcup\limits_{i=1}^{5}F_i$，其中树 T 的集合 $F_i(1\leqslant i\leqslant 5)$ 是按以下方式得到的：

F_1：树 T 是由 1 个以 y_1 为中心的星形图 $K_{1,2}$ 和 1 个以 y_0 为头的健康蜘蛛树 $S(K_{1,r})$，其中 $r\geqslant 2$，通过添

* **收稿日期**：2022-05-13　　**网络出版时间**：2023-06-26T10:32

资助项目：国家自然科学基金地区科学基金项目(No. 12061007)

第一作者简介：郝国亮，男，副教授，博士，研究方向为图论及图论应用，E-mail：guoliang-hao@163.com

网络出版地址：https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230625.0952.004

加 1 个新顶点 x 与 2 条新边 xy_0 和 xy_1 所得到的图。

F_2:树 T 是由 $m\geqslant 1$ 个分别以 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为中心的星形图 $K_{1,r_1},K_{1,r_2},\cdots,K_{1,r_m}$ 和 1 个以 y_0 为头的健康蜘蛛树 $S(K_{1,r})$,其中对任意 $1\leqslant i\leqslant m$,$r_i\geqslant 3$ 且 $r\geqslant 2$,通过添加 1 个新顶点 x 与 $m+1$ 条新边 $xy_i(0\leqslant i\leqslant m)$ 所得到的图。

F_3:树 T 是由 F_2 中的一棵树通过添加 1 个新顶点 y 与 1 条新边 xy 所得到的图。

F_4:树 T 是由 $m\geqslant 2$ 个分别以 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 为中心的星形图 $K_{1,r_1},K_{1,r_2},\cdots,K_{1,r_m}$,其中对任意 $1\leqslant i\leqslant m-1$,$r_i\geqslant 3$ 且 $r_m\geqslant 2$,通过添加 3 个新顶点 x、x_1 和 x_2 与 $m+2$ 条新边 $xy_i(1\leqslant i\leqslant m)$、$y_mx_1$ 和 x_1x_2 所得到的图。

F_5:树 T 是由 F_4 中的一棵树通过添加 1 个新顶点 y 与 1 条新边 xy 所得到的图。

2 定理 1 的证明

为证明定理 1,首先给出一些引理和命题。

引理 1[8] 设 G 是含有路 $P_3=u_1u_2u_3$ 的连通图且 $d(u_1)=1,d(u_2)=2$。则一定存在一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数 f 使得 $|f(u_1)|=1,f(u_2)=\varnothing$ 且 $\{1,2\}\setminus f(u_1)\subseteq f(u_3)$。

引理 2 如果树 T 中含有强支撑点 u,则一定存在一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数 f 使得 $f(u)=\{1,2\}$ 且对任意与 u 相邻的叶子点 x,$f(x)=\varnothing$。

证明 设 X 是与强支撑点 u 相邻的叶子点构成的集合且设 g 是一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数。则显然有 $|g(u)|+\sum\limits_{x\in X}|g(x)|\geqslant 2$。定义 T 的一个 2-彩虹控制函数 $f:V(T)\rightarrow 2^{\{1,2\}}$ 使得 $f(u)=\{1,2\}$;当 $x\in X$ 时,$f(x)=\varnothing$ 且当 $x\notin\{u\}\cup X$ 时,$f(x)=g(x)$。于是有:

$$\gamma_{r2}(T)\leqslant\omega(f)=\omega(g)-\Big(|g(u)|+\sum_{x\in X}|g(x)|\Big)+\Big(|f(u)|+\sum_{x\in X}|f(x)|\Big)\leqslant\omega(g)-2+2=\omega(g)=\gamma_{r2}(T),$$

因此 $\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$。这意味着 f 也是一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数。故 f 就是所求的 $\gamma_{r2}(T)$-函数。 证毕

命题 1 若 $T\in F_1\cup F_2$,则 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。

证明 设 $T\in F_1\cup F_2$。令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 是 $S(K_{1,r})$ 的 r 个脚构成的集合且 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$,其中当 $T\in F_1$ 时,$m=1$。对任意 $T\in F_1\cup F_2$ 和任意 $i\in\{1,2\}$,定义函数 $f_i:V(T)\rightarrow 2^{\{1,2\}}$ 使得 $f_i(y_0)=\{i\}$;当 $x_k\in X$ 时,$f_i(x_k)=\{3-i\}$;当 $y_k\in Y$ 时,$f_i(y_k)=\{1,2\}$;且当 $v\notin X\cup Y\cup\{y_0\}$ 时,$f_i(v)=\varnothing$。不难验证:对任意 $T\in F_1\cup F_2$,f_1 和 f_2 都是 $\gamma_{r2}(T)$-函数且 T 恰好只有这 2 个 $\gamma_{r2}(T)$-函数。此外,易见 f_1 和 f_2 都不是 T 的全局 2-彩虹控制函数,故 $\gamma_{gr2}(T)\geqslant\gamma_{r2}(T)+1$。另一方面,定义 T 的一个全局 2-彩虹控制函数 $g:V(T)\rightarrow 2^{\{1,2\}}$ 使得 $g(x)=\{1\}$ 且当 $v\in V(T)\setminus\{x\}$ 时,$g(v)=f_1(v)$。于是 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f_1)+1=\gamma_{r2}(T)+1$。因此 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。 证毕

命题 2 若 $T\in F_3$,则 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。

证明 设 $T\in F_3$。令 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_r\}$ 是 $S(K_{1,r})$ 的 r 个脚构成的集合且 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$。对任意 $i,j\in\{1,2\}$,定义函数 $f_{ij}:V(T)\rightarrow 2^{\{1,2\}}$ 使得 $f_{ij}(y)=\{i\}$;$f_{ij}(y_0)=\{j\}$;当 $x_k\in X$ 时,$f_{ij}(x_k)=\{3-j\}$;当 $y_k\in Y$ 时,$f_{ij}(y_k)=\{1,2\}$ 且当 $v\notin X\cup Y\cup\{y_0,y\}$ 时,$f_{ij}(v)=\varnothing$。不难验证:f_{11}、f_{12}、f_{21} 和 f_{22} 都是 $\gamma_{r2}(T)$-函数且 T 恰好只有这 4 个 $\gamma_{r2}(T)$-函数。此外,易见 f_{11}、f_{12}、f_{21} 和 f_{22} 都不是 T 的全局 2-彩虹控制函数,故 $\gamma_{gr2}(T)\geqslant\gamma_{r2}(T)+1$。另一方面,定义 T 的一个全局 2-彩虹控制函数 $g:V(T)\rightarrow 2^{\{1,2\}}$ 使得 $g(x)=\{1\}$ 且当 $v\in V(T)\setminus\{x\}$ 时,$g(v)=f_{11}(v)$。于是 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f_{11})+1=\gamma_{r2}(T)+1$。因此 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。

证毕

命题 3 若 $T\in F_4$,则 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。

证明 设 $T\in F_4$ 且 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$。对任意 $i\in\{1,2\}$,定义函数 $f_i:V(T)\rightarrow 2^{\{1,2\}}$ 使得 $f_i(x_2)=\{i\}$;当 $y_k\in Y$ 时,$f_i(y_k)=\{1,2\}$ 且当 $v\notin Y\cup\{x_2\}$ 时,$f_i(v)=\varnothing$。则不难验证:f_1 和 f_2 都是 $\gamma_{r2}(T)$-函数且 T 恰好只有这 2 个 $\gamma_{r2}(T)$-函数。此外,易见 f_1 和 f_2 都不是 T 的全局 2-彩虹控制函数,故 $\gamma_{gr2}(T)\geqslant\gamma_{r2}(T)+1$。另一方面,定义 T 的一个全局 2-彩虹控制函数 $g:V(T)\rightarrow 2^{\{1,2\}}$ 使得 $g(x)=\{1\}$ 且当 $v\in V(T)\setminus\{x\}$ 时,$g(v)=f_1(v)$。于是 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f_1)+1=\gamma_{r2}(T)+1$。因此 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。 证毕

命题 4 若 $T\in F_5$,则 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。

证明　设 $T\in F_5$ 且设 $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_m\}$。对任意 $i,j\in\{1,2\}$，定义函数 $f_{ij}:V(T)\to 2^{\{1,2\}}$ 使 $f_{ij}(x_2)=\{i\}$；$f_{ij}(y)=\{j\}$；当 $y_k\in Y$ 时，$f_{ij}(y_k)=\{1,2\}$ 且当 $v\notin Y\cup\{x_2,y\}$ 时，$f_{ij}(v)=\varnothing$。则不难验证：f_{11}、f_{12}、f_{21} 和 f_{22} 都是 $\gamma_{r2}(T)$-函数且 T 恰好只有这 4 个 $\gamma_{r2}(T)$-函数。此外，易见 f_{11}、f_{12}、f_{21} 和 f_{22} 都不是 T 的全局 2-彩虹控制函数，故 $\gamma_{gr2}(T)\geqslant\gamma_{r2}(T)+1$。另一方面，定义 T 的一个全局 2-彩虹控制函数 $g:V(T)\to 2^{\{1,2\}}$ 使得 $g(x)=\{1\}$ 且当 $v\in V(T)\setminus\{x\}$ 时，$g(v)=f_{11}(v)$。于是 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f_{11})+1=\gamma_{r2}(T)+1$。因此 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。　证毕

命题 5　设 T 是直径为 5 的树且 $P=v_1v_2\cdots v_6$ 是 T 的一条最长路。如果 v_2 和 v_5 都是强支撑点，则 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)$。

证明　由引理 2，不妨设 f 是一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数使得 $f(v_2)=f(v_5)=\{1,2\}$。因为 T 是树，所以在 T 中，$V(T)\setminus\{v_2,v_5\}$ 中的每个顶点最多与 v_2 和 v_5 中的一个相邻，因此在 $\overline{T}$ 中，$V(T)\setminus\{v_2,v_5\}$ 中的每个顶点至少与 v_2 和 v_5 中的一个相邻。于是 f 也是 T 的全局 2-彩虹控制函数，故 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$。又因为 $\gamma_{gr2}(T)\geqslant\gamma_{r2}(T)$，所以 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)$。　证毕

命题 6　设 T 是直径为 5 的树且 $P=v_1v_2\cdots v_6$ 是 T 的一条最长路。如果 v_2 和 v_5 都是弱支撑点，则 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)$。

证明　因为 v_2 和 v_5 都是弱支撑点，所以 $d(v_2)=d(v_5)=2$。又因为 $d(v_1)=d(v_6)=1$，所以由引理 1 可知，不妨设 f 是一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数使得 $|f(v_1)|=|f(v_6)|=1$，$\{1,2\}\setminus f(v_1)\subseteq f(v_3)$ 且 $\{1,2\}\setminus f(v_6)\subseteq f(v_4)$。于是 $f(v_1)\cup f(v_3)=\{1,2\}$ 且 $f(v_4)\cup f(v_6)=\{1,2\}$。因为 T 是树，所以在 T 中，$V(T)\setminus\{v_1,v_3,v_4,v_6\}$ 中的每个顶点或者与 v_1 和 v_3 都不相邻或者与 v_4 和 v_6 都不相邻，因此在 $\overline{T}$ 中，$V(T)\setminus\{v_1,v_3,v_4,v_6\}$ 中的每个顶点或者与 v_1 和 v_3 都相邻或者与 v_4 和 v_6 都相邻。于是 f 也是 T 的全局 2-彩虹控制函数，故 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$。又因为 $\gamma_{gr2}(T)\geqslant\gamma_{r2}(T)$，所以 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)$。　证毕

命题 7　设 T 是直径为 5 的树且 $P=v_1v_2\cdots v_6$ 是 T 的一条最长路。如果 v_2 和 v_5 中一个是强支撑点，另一个是弱支撑点，则 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 当且仅当 $T\in\bigcup_{i=1}^{5}F_i$。

证明　如果 $T\in\bigcup_{i=1}^{5}F_i$，则由命题 1～4 可知，$\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$，因此充分性成立。下面证明必要性。假设 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$。因为 v_2 和 v_5 中一个是强支撑点而另一个是弱支撑点，所以不妨设 v_2 是强支撑点且 v_5 是弱支撑点。因此 $d(v_2)\geqslant 3$ 且 $d(v_5)=2$。因为 $d(v_6)=1$，$d(v_5)=2$ 且 v_2 是强支撑点，所以由引理 1 和引理 2 可知以下断言成立。

断言 1　存在一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数 f 使得 $2\in f(v_4)$，$f(v_5)=\varnothing$，$f(v_6)=\{1\}$，$f(v_2)=\{1,2\}$ 且对任意 $u\in N(v_2)\setminus\{v_3\}$，$f(u)=\varnothing$。

下面设 f 是满足断言 1 的一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数。

断言 2　顶点 v_3 满足下列性质之一：1) $d(v_3)=2$；2) $d(v_3)\geqslant 3$ 且 $N(v_3)\setminus\{v_2,v_4\}$ 中只含叶子点或度至少是 4 的强支撑点。

证明　采用反证法。假设顶点 v_3 不满足性质 1)和 2)，即 $N(v_3)\setminus\{v_2,v_4\}$ 中存在度是 2 的弱支撑点或度是 3 的强支撑点。首先假设 $N(v_3)\setminus\{v_2,v_4\}$ 中存在度是 2 的弱支撑点，不妨设为 u_1。令 $N(u_1)\setminus\{v_3\}=\{u_2\}$。则 $P'=u_2u_1v_3v_4v_5v_6$ 也是 T 的一条最长路且 u_1 与 v_5 都是 T 的弱支撑点。于是类似于命题 6 的证明，可得 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)$，与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾。下面假设 $N(v_3)\setminus\{v_2,v_4\}$ 中存在度是 3 的强支撑点，不妨设为 u_1。令 $N(u_1)\setminus\{v_3\}=\{u_2,u_3\}$。由引理 2 可知，不妨设 $f(u_1)=\{1,2\}$ 且 $f(u_2)=f(u_3)=\varnothing$。此外由断言 1 可知，$f(v_2)=\{1,2\}$。于是不难验证函数 $g:V(T)\to 2^{\{1,2\}}$ 使得 $g(u_1)=\varnothing$，$g(u_2)=\{1\}$，$g(u_3)=\{2\}$ 且当 $u\in V(T)\setminus\{u_1,u_2,u_3\}$ 时，$g(u)=f(u)$ 是 T 的全局 2-彩虹控制函数，因此 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$，这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾，故断言 2 成立。　证毕

断言 3　$N(v_3)\setminus\{v_2,v_4\}$ 中至多含有 1 个叶子点。

证明　采用反证法。假设 $N(v_3)\setminus\{v_2,v_4\}$ 中至少含有 2 个叶子点，则 v_3 是强支撑点。于是由引理 2 可知，不妨设 $f(v_3)=\{1,2\}$。又由断言 1 可知，$f(v_2)=\{1,2\}$，所以易见 f 也是 T 的全局 2-彩虹控制函数。因此 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$，这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾，故断言 3 成立。　证毕

断言4 如果 $d(v_3)\geqslant 3$,则 $d(v_2)\geqslant 4$。

证明 因为 $d(v_2)\geqslant 3$,所以只需要证明 $d(v_2)\neq 3$。采用反证法,假设 $d(v_2)=3$。由断言1可知,$f(v_2)=\{1,2\}$,$2\in f(v_4)$且 $f(v_6)=\{1\}$。因此如果 $f(v_3)\neq\varnothing$,则不难验证 f 是 T 的全局2-彩虹控制函数,于是 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$,这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾,故 $f(v_3)=\varnothing$。

因为 $d(v_2)=3$,所以不妨设 $N(v_2)\backslash\{v_1,v_3\}=\{u_1\}$。因为 $d(v_3)\geqslant 3$,所以 $N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}\neq\varnothing$。首先假设 $N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}$中含有叶子点。由断言3可知,$N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}$中只含1个叶子点,不妨设为 u_2。因为 f 是一个 $\gamma_{r2}(T)$-函数且 $f(v_3)=\varnothing$,所以 $|f(u_2)|=1$。又由断言1可知,$f(v_2)=\{1,2\}$,$f(v_1)=f(u_1)=\varnothing$且 $2\in f(v_4)$,所以不难看出函数 g 使得 $g(v_1)=g(u_2)=\{1\}$,$g(v_2)=\varnothing$,$g(u_1)=\{2\}$且当 $x\in V(T)\backslash\{v_1,v_2,u_1,u_2\}$ 时,$g(x)=f(x)$是 T 的全局2-彩虹控制函数。于是 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$,与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾。又由断言2的性质2)可知,$N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}$中只含度至少是4的强支撑点。不失一般性,设 u_2 是 $N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}$中度至少是4的强支撑点。由引理2可知,不妨设 $f(u_2)=\{1,2\}$。此外,由断言1可知,$f(v_2)=\{1,2\}$且 $f(v_1)=f(u_1)=\varnothing$。因此不难看出函数 g 使得 $g(v_1)=\{1\}$,$g(v_2)=\varnothing$,$g(u_1)=\{2\}$且当 $x\in V(T)\backslash\{v_1,v_2,u_1\}$时,$g(x)=f(x)$是 T 的全局2-彩虹控制函数。于是 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$,这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾,故断言4成立。 证毕

由断言2～4可得断言5成立。

断言5 树 T 满足下列性质之一:1) $d(v_3)=2$;2) $d(v_2)\geqslant 4$,$d(v_3)\geqslant 3$ 且 $N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}$中只含度至少是4的强支撑点;3) $d(v_2)\geqslant 4$,$d(v_3)\geqslant 3$ 且 $N(v_3)\backslash\{v_2,v_4\}$中只含1个叶子点且其他顶点都为度至少是4的强支撑点。

断言6 $d(v_4)\geqslant 3$ 且 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中或者全部是叶子点或者全部是弱支撑点。

证明 首先证明 $d(v_4)\geqslant 3$。因为 $d(v_4)\geqslant 2$,所以只需要证明 $d(v_4)\neq 2$。采用反证法,假设 $d(v_4)=2$。又由断言1可知,$f(v_2)=\{1,2\}$,$f(v_5)=\varnothing$,$f(v_6)=\{1\}$且 $2\in f(v_4)$,所以不难看出函数 g 使得 $g(v_5)=\{1,2\}$,$g(v_4)=g(v_6)=\varnothing$且当 $x\in V(T)\backslash\{v_4,v_5,v_6\}$时,$g(x)=f(x)$是 T 的全局2-彩虹控制函数。因此 $\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f)-(|f(v_4)|+|f(v_5)|+|f(v_6)|)+(|g(v_4)|+|g(v_5)|+|g(v_6)|)\leqslant\omega(f)-2+2=\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$,这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾。故 $d(v_4)\geqslant 3$。

下面证明 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中或者全部是叶子点或者全部是弱支撑点。若 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中存在强支撑点,则不妨设为 u。令 $u'\in N(u)\backslash\{v_4\}$,则 $P'=v_1v_2v_3v_4uu'$也是 T 的一条最长路且 v_2 和 u 都是强支撑点。于是类似于命题5的证明可得 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)$,与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾。因此 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中不存在强支撑点。又因为 $P=v_1v_2\cdots v_6$ 是 T 的最长路,所以 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中只存在叶子点或弱支撑点。

假设 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中同时含有叶子点和弱支撑点,不妨分别设为 u_1 和 u_2。令 $N(u_2)\backslash\{v_4\}=\{u_3\}$。则 u_3 是叶子点。由断言1可知,$2\in f(v_4)$。于是利用 $\gamma_{r2}(T)$-函数的定义有 $|f(u_1)|+|f(v_4)|=2$ 且 $|f(u_2)|+|f(u_3)|=1$。又由断言1可知,$f(v_2)=\{1,2\}$且 $f(v_6)=\{1\}$,所以函数 g 使得 $g(v_4)=\{1,2\}$,$g(u_1)=g(u_2)=\varnothing$,$g(u_3)=\{2\}$且当 $x\in V(T)\backslash\{v_4,u_1,u_2,u_3\}$时,$g(x)=f(x)$是 T 的全局2-彩虹控制函数。于是有:$\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f)-(|f(u_1)|+|f(v_4)|)-(|f(u_2)|+|f(u_3)|)+(|g(u_1)|+|g(v_4)|+|g(u_2)|+|g(u_3)|)=\omega(f)-2-1+3=\gamma_{r2}(T)$,这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾,故断言6成立。 证毕

断言7 若 $d(v_4)\geqslant 3$ 且 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中全部是叶子点,则 $d(v_2)\geqslant 4$ 且 $d(v_4)\geqslant 4$。

证明 首先证明 $d(v_4)\geqslant 4$。因为 $d(v_4)\geqslant 3$,所以只需要证明 $d(v_4)\neq 3$ 即可。采用反证法,假设 $d(v_4)=3$。令 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}=\{u\}$。则 u 是 T 的叶子点。由断言1可知,$2\in f(v_4)$,所以利用 $\gamma_{r2}(T)$-函数的定义知,$|f(u)|+|f(v_4)|=2$。再由断言1可知,$f(v_2)=\{1,2\}$且 $f(v_6)=\{1\}$,所以不难看出函数 g 使得 $g(u)=g(v_4)=\{2\}$且当 $x\in V(T)\backslash\{u,v_4\}$时,$g(x)=f(x)$是 T 的全局2-彩虹控制函数。于是有:$\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f)-(|f(u)|+|f(v_4)|)+(|g(u)|+|g(v_4)|)=\omega(f)-2+2=\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$,这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾,因此 $d(v_4)\geqslant 4$。

下证 $d(v_2)\geqslant 4$。因为 $d(v_2)\geqslant 3$,所以只需要证明 $d(v_2)\neq 3$。采用反证法,假设 $d(v_2)=3$。令 $N(v_2)\backslash\{v_1,v_3\}=\{u\}$。则 u 是 T 的叶子点。因为 $d(v_4)\geqslant 4$ 且 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$中全部是叶子点,所以 v_4 是强支撑点,故由引理2可知,不妨设 $f(v_4)=\{1,2\}$。此外,由断言1可知,$f(v_2)=\{1,2\}$且 $f(v_1)=f(u)=\varnothing$。于是不难看出函数 g 使得 $g(v_1)=\{1\}$,$g(v_2)=\varnothing$,$g(u)=\{2\}$且当 $x\in V(T)\backslash\{v_1,v_2,u\}$时,$g(x)=f(x)$是 T 的全局

2-彩虹控制函数。故而有：$\gamma_{gr2}(T)\leqslant\omega(g)=\omega(f)-(|f(v_1)|+|f(v_2)|+|f(u)|)+(|g(v_1)|+|g(v_2)|+|g(u)|)=\omega(f)-2+2=\omega(f)=\gamma_{r2}(T)$，这与 $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ 矛盾，因此 $d(v_2)\geqslant4$。

综上，断言 7 成立。 证毕

由断言 6 和断言 7 可知断言 8 成立。

断言 8 树 T 满足下列性质之一：1) $d(v_4)\geqslant3$ 且 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$ 中全部是弱支撑点；2) $d(v_2)\geqslant4$，$d(v_4)\geqslant4$ 且 $N(v_4)\backslash\{v_3,v_5\}$ 中全部是叶子点。

断言 9 $T\in\bigcup\limits_{i=1}^{5}F_i$。

证明 由断言 2、3、4、6 和 7 可知，树 T 同时具有断言 5 和 8 所列出的性质。此外，注意到 $P=v_1v_2\cdots v_6$ 是树 T 的最长路，$d(v_2)\geqslant3$ 且 $d(v_5)=2$。若 $d(v_2)=3$ 且树 T 满足断言 5 的性质 1)和断言 8 的性质 1)，则 $T\in F_1$；若 $d(v_2)\geqslant4$ 且树 T 满足断言 5 的性质 1)和断言 8 的性质 1)，则 $T\in F_2$；若树 T 满足断言 5 的性质 2)和断言 8 的性质 1)，则 $T\in F_2$；若树 T 满足断言 5 的性质 3)和断言 8 的性质 1)，则 $T\in F_3$；若树 T 满足断言 5 的性质 1)和断言 8 的性质 2)，则 $T\in F_4$；若树 T 满足断言 5 的性质 2)和断言 8 的性质 2)，则 $T\in F_4$；若树 T 满足断言 5 的性质 3)和断言 8 的性质 2)，则 $T\in F_5$。因此 $T\in\bigcup\limits_{i=1}^{5}F_i$，即断言 9 成立。 证毕

由断言 9 可知，命题 7 的必要性成立，故命题 7 成立。 证毕

由命题 5～7 可知，定理 1 显然成立。

参考文献：

[1] BREŠAR B, HENNING M A, RALL D F. Paried-domination of Cartesian products of graphs and rainbow domination[J]. Electronic Notes in Discrete Mathematics, 2005, 22: 233-237.

[2] BREŠAR B, HENNING M A, RALL D F. Rainbow domination in graphs[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2008, 12(1): 213-225.

[3] KUZMAN B. On k-rainbow domination in regular graphs[J]. Discrete Applied Mathematics, 2020, 284: 454-464.

[4] OJAKIAN K, ŠKREKOVSKI R, TEPEH A. Bounding the k-rainbow total domination number[J]. Discrete Mathematics, 2021, 344(8): 112425.

[5] WU Y, RAD N J. On the 2-rainbow domination number of graphs[J]. Graphs and Combinatorics, 2013, 29: 1125-1133.

[6] SHAO Z H, SHEIKHOLESLAMI S M, WANG B, et al. Trees with equal total domination and 2-rainbow domination numbers [J]. Filomat, 2018, 32(2): 599-607.

[7] ALQESMAH A, ALWARDL A, RANGARAJAN R. Global 2-rainbow domination in graphs[J]. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2019, 7(1): 130-139.

[8] AMJADI J, SHEIKHOLESLAMI S M, VOLKMANN L. Global rainbow domination in graphs[J]. Miskolc Mathematical Notes, 2017, 17(2): 749-759.

A Note on Global 2-Rainbow Domination of Graphs

HAO Guoliang[1,2], ZENG Shuting[2], ZHUANG Wei[3]

(1. School of Mathematics and Statistics, Heze University, Heze Shandong 27401;

2. College of Science, East China University of Technology, Nanchang 330013;

3. School of Mathematics and Statistics, Xiamen University of Technology, Xiamen Fujian 361024, China)

Abstract: To study the relationship between the global 2-rainbow domination number $\gamma_{gr2}(T)$ and 2-rainbow domination number $\gamma_{r2}(T)$ of a tree T, by analyzing the structure of graphs and using the methods of categorical discussion and reduction to absurdity, the trees T of diameter five with $\gamma_{gr2}(T)=\gamma_{r2}(T)+1$ is completely characterized, which solves the unsolved problem by Amjadi et al. (2017).

Keywords: global 2-rainbow domination; 2-rainbow domination; complement; characterization

（责任编辑 方 兴）