DOI:10.11721/cqnuj20230501

# 强余挠维数*

张 豫 冈
(兰州工业学院 基础学科部，兰州 730050)

**摘要:**为进一步研究模的平坦性与余挠性,引入强余挠维数的概念,证明了存在模使得非凝聚环上的强余挠维数严格大于余挠维数,刻画了环的整体强余挠维数的有限性。这一有限性为研究 Gorenstein 投射模和 Gorenstein AC-投射模的一致性提供了新的思路。

**关键词:**强余挠模;强余挠维数;Gorenstein 投射模;Gorenstein AC-投射模

**中图分类号:**O153.3　　**文献标志码:**A　　**文章编号:**1672-6693(2023)05-0108-05

平坦模类作为经典同调代数中的三大模类之一,具有良好的性质。例如,在任意环上,平坦模类是投射可解的,并且对纯子模、纯商模及正向极限封闭。Enochs 等人[1]利用这些性质在 20 世纪初解决了著名的“平坦覆盖猜想”。另一方面,著名的 Govorov-Lazard 定理建立了平坦模与投射模间的联系。平坦模的这些性质在模论及模的模型理论、环论、代数表示论、群的表示理论及代数几何等领域中都有广泛的应用。

众所周知,余挠模类即平坦模类的右正交类。正如余挠模是内射模的推广,余挠维数是内射维数的推广,二者一致当且仅当基环是 von Neumann 正则环。Mao 等人[2]研究了模与环的余挠维数,给出了余挠维数的经典刻画,并由此刻画了半单环、von Neumann 正则环、完全环等经典环类。同时给出了余挠维数在交换代数中的应用。Gao 等人[3]引入并研究了弱平坦模、弱内射模及维数(这两类模在文献[4]中分别称为 level 模和绝对 clean 模)。弱平坦模类和弱内射模类的一个重要性质是它们将 Noether 环上平坦模与内射模的对偶性质推广到任意环。并且在任意环上所有模都具有左、右弱平坦模和弱内射分解。受文献[2]的启发,本文考虑弱平坦模的右正交类及相应的维数,称之为强余挠维数。特别地,本文给出了环的整体强余挠维数有限的刻画,同时给出了环的整体强余挠维数的有限性在 Gorenstein 同调代数中的应用。

## 1　预备知识

贯穿全文,环 $R$ 均表示具有单位元的结合环,所有的模均是酉模。

用 $R$-Mod 表示所有左 $R$-模的类,其中由所有投射、内射、平坦左 $R$-模构成的(子)类分别用 $\mathcal{Proj}$、$\mathcal{Inj}$ 及 $\mathcal{Flat}$ 表示。分别用 $\mathrm{pd}_R(M)$,$\mathrm{id}_R(M)$和 $\mathrm{fd}_R(M)$表示 $R$-模 $M$ 的投射、内射和平坦维数。

设 $X$,$Y$ 是 $R$-模的类,称二元组$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$是余挠对,如果 $\mathcal{Y}=\mathcal{X}^{\perp}$ 且 $\mathcal{X}={}^{\perp}\mathcal{Y}$。这里
$$\mathcal{X}^{\perp}=\{M\in R\text{-Mod}\mid \mathrm{Ext}_R^1(X,M)=0,\forall X\in\mathcal{X}\},$$
对偶的可定义${}^{\perp}\mathcal{Y}$。

称余挠对$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$是遗传的,如果对任意的 $X\in\mathcal{X}$,$Y\in\mathcal{Y}$ 及 $m\geqslant 1$,都有$\mathrm{Ext}_R^m(X,Y)=0$。

称余挠对$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$是完备的,如果$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$具有足够的投射对象和足够的内射对象,即对任意的 $M\in R$-Mod,都存在 $R$-模的两个短正合序列:
$$0\to Y\to X\to M\to 0,0\to M\to Y'\to X'\to 0,$$
其中:$X$,$X'\in\mathcal{X}$ 且 $Y$,$Y'\in\mathcal{Y}$。

---

* **收稿日期:**2022-03-24　**修回日期:**2022-07-05　**网络出版时间:**2022-09-21T14:45

**资助项目:**国家自然科学基金面上项目(No. 12161049);甘肃省自然科学基金项目(No. 21JR1RA229);甘肃省高等学校创新能力提升项目(No. 2019A-146)

**第一作者简介:**张豫冈,男,副教授,研究方向为同调代数,E-mail:zhangyg781027@163.com

**网络出版地址:**https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20220920.1648.002

$R$-模 $M$ 的 $\mathcal{X}$-预覆盖是指一个同态 $\alpha: X\to M$，使得 $X\in\mathcal{X}$ 并且对任意的 $X'\in\mathcal{X}$，序列 $\mathrm{Hom}_R(X',X)\to\mathrm{Hom}_R(X',M)\to 0$ 是正合的。

称 $R$-模 $M$ 的 $\mathcal{X}$-预覆盖 $\alpha: X\to A$ 是 $\mathcal{X}$-覆盖，如果满足 $\alpha f=\alpha$ 的自同态 $f: X\to X$ 都是同构。

称模类 $\mathcal{X}$ 是(预)覆盖类，如果每个模都具有 $\mathcal{X}$-(预)覆盖。对偶的可定义模的(预)包络以及(预)包络类。

称余挠对$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$是完全的，如果 $\mathcal{X}$ 是覆盖类且 $\mathcal{Y}$ 是包络类。

称模类 $\mathcal{Y}$ 是内射可解的，如果 $\mathcal{Inj}\subseteq\mathcal{Y}$，并且 $\mathcal{Y}$ 对扩张及满同态的核封闭(即对任意的 $R$-模的短正合序列 $0\to L\to M\to N\to 0$，其中 $L\in\mathcal{Y}$，有 $M\in\mathcal{Y}$ 等价于 $N\in\mathcal{Y}$)。对偶的可定义投射可解类。

称余挠对$(\mathcal{X},\mathcal{Y})$是遗传的，如果对任意的 $i\geqslant 1$ 及任意的 $X\in\mathcal{X}$，$Y\in\mathcal{Y}$，都有$\mathrm{Ext}_R^i(X,Y)=0$。等价地，如果 $\mathcal{X}$ 是投射可解的，或 $\mathcal{Y}$ 是内射可解的。

## 2　主要结论

**定义 1**[3]　1）若左 $R$-模 $F$ 存在投射分解：$\cdots\to P_2\to P_1\to P_0\to F\to 0$，其中：每个 $P_i$ 是有限生成自由模，则称 $M$ 是超有限表示的；

2）若对任意的超有限表示右 $R$-模 $F$，都有$\mathrm{Tor}_1^R(F,M)=0$，则称左 $R$-模 $M$ 是弱平坦模。弱平坦左 $R$-模的类记为 $\mathcal{WFlat}$。

**注 1**　在文献[4]中“超有限表示模”及“弱平坦模”分别被称为“$\mathrm{FP}_\infty$ 型模”及“level 模”。

众所周知，$R$-模 $C$ 是余挠的当且仅当对任意的平坦 $R$-模 $F$，都有$\mathrm{Ext}_R^1(F,C)=0$。同时，$R$-模 $M$ 的余挠维数(记为$\mathrm{cd}_R(M)$)的定义为 $M$ 的余挠分解长度的下确界。结合这些概念。并注意到任意环上平坦模一定是弱平坦的，如下定义是自然的。

**定义 2**　1）称左 $R$-模 $C$ 是强余挠的，如果对任意的 $F\in\mathcal{WFlat}$，都有$\mathrm{Ext}_R^1(F,C)=0$。强余挠左 $R$-模的类记为 $\mathcal{SCot}$；

2）对于任意左 $R$-模 $M$，令集合 $\Phi_M=\{m\in\mathbf{N}\mid$存在正合序列$\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^m\to 0\}$，其中每个 $C^i\in\mathcal{SCot}$。若 $\Phi_M$ 非空，则定义 $M$ 的强余挠维数为$\mathrm{scd}_R(M)=\inf\Phi_M$，否则记$\mathrm{scd}_R(M)=\infty$。

**注 2**　1）在文献[4]中“强余挠模”被称为“cospiral 模”；

2）由文献[4]的定理 2.14、命题 2.10 可知任意环 $R$ 上二元组$(\mathcal{WFlat},\mathcal{SCot})$构成完全遗传的余挠对。特别地，有：

$$\text{左 } R\text{-模 } C \text{ 是强余挠的} \Leftrightarrow \text{对任意的 } F\in\mathcal{WFlat}\text{，都有}\mathrm{Ext}_R^{i\geqslant 1}(F,C)=0\text{。}$$

3）显然 $\mathcal{Inj}\subseteq\mathcal{SCot}\subseteq\mathcal{Cot}$，因而对任意的左 $R$-模 $M$，有$\mathrm{cd}_R(M)\leqslant\mathrm{scd}_R(M)\leqslant\mathrm{id}_R(M)$。

4）对于任意左 $R$-模 $M$，$\mathrm{scd}_R(M)=0$ 当且仅当 $M\in\mathcal{SCot}$。

下述引理说明了“强余挠模”及“强余挠维数”中“强”的合理性，即在非右凝聚环上 $\mathcal{SCot}$ 是 $\mathcal{Cot}$ 的真子类。同时，在非右凝聚环上存在一个模使得该模的强余挠维数严格大于余挠维数。

**引理 1**　设 $R$ 是环，则以下条件等价：

1）$\mathcal{SCot}=\mathcal{Cot}$；

2）$\mathcal{Flat}=\mathcal{WFlat}$；

3）$R$ 是右凝聚环；

4）对任意的左 $R$-模 $M$，都有$\mathrm{scd}_R(M)=\mathrm{cd}_R(M)$。

**证明**　注意到二元组$(\mathcal{Flat},\mathcal{Cot})$及$(\mathcal{WFlat},\mathcal{SCot})$均构成(完全遗传的)余挠对。因此，由余挠对的定义可知1)$\Leftrightarrow$2)。

2)$\Leftrightarrow$3)由文献[4]的推论 2.11 可知。

1)$\Rightarrow$4)显然。

4)$\Rightarrow$1)。由注 2 的 3)可知 $\mathcal{SCot}\subseteq\mathcal{Cot}$。反之，设 $C$ 是任意的余挠左 $R$-模。则$\mathrm{cd}_R(M)=0$。因此，由条件 4)及注 2 的 4)可知 $M\in\mathcal{SCot}$。所以，$\mathcal{SCot}=\mathcal{Cot}$。　证毕

注 2 的 2)指出，任意环 $R$ 上二元组$(\mathcal{WFlat},\mathcal{SCot})$构成完全的余挠对。因此，每个 $R$-模 $M$ 都具有弱平坦覆

盖(即 $\mathcal{WF}lat$-覆盖),WF($M$)。下述结论给出强余挠维数的刻画。

**命题 1** 设 $n$ 是非负整数。则对任意左 $R$-模 $M$,以下条件等价:

1) $\mathrm{scd}_R(M)\leqslant n$;

2) 存在左 $R$-模的正合序列 $0\to M\to E^0\to E^1\to\cdots\to E^n\to 0$,其中每个 $E^i\in\mathcal{SC}ot$;

3) 对任意左 $R$-模的正合序列 $0\to M\to C^0\to C^1\to\cdots\to C^{n-1}\to N\to 0$,若每个 $C^i\in\mathcal{SC}ot$,则 $N\in\mathcal{SC}ot$;

4) 对任意左 $R$-模的正合序列 $0\to M\to I^0\to I^1\to\cdots\to I^{n-1}\to L\to 0$,若每个 $I^i\in\mathcal{I}nj$,则 $L\in\mathcal{SC}ot$;

5) 对任意的 $i\geqslant 1$ 及 $F\in\mathcal{WF}lat$,都有$\mathrm{Ext}_R^{i+n}(F,M)=0$;

6) 对任意的 $F\in\mathcal{WF}lat$,都有$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0$;

7) $\mathrm{scd}_R(\mathrm{WF}(M))\leqslant n$,其中 WF($M$)表示 $M$ 的弱平坦覆盖。

**证明** 由定义 2 易知 1)$\Leftrightarrow$2)。

2)$\Rightarrow$5)。考虑条件 2)中的正合序列。对任意的 $F\in\mathcal{WF}lat$ 及任意的 $i\geqslant 1$,由维数转移可知$\mathrm{Ext}_R^{n+i}(F,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{1+i}(F,E^n)$。由于 $E^n\in\mathcal{SC}ot$,因而$\mathrm{Ext}_R^{1+i}(F,E^n)=0$。所以条件 5)成立。

5)$\Rightarrow$6)和 4)$\Rightarrow$3)$\Rightarrow$2)显然。

6)$\Rightarrow$3)。考虑条件 3)中待证明的正合序列。对任意的 $F\in\mathcal{WF}lat$,由条件 6)及维数转移可知$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)\cong\mathrm{Ext}_R^1(F,L)=0$。所以 $L\in\mathcal{SC}ot$。

3)$\Rightarrow$4)。由文献[4]的定理 2.14、命题 2.10(2)可知模类 $\mathcal{SC}ot$ 是内射可解的,并且对 $\mathcal{SC}ot$ 对有限直和及直和因子封闭。考虑条件 4)中待证明的正合序列。将比较引理运用于条件 4)和条件 3)中的正合序列,可得图 1。

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} 0 & \to & M & \to & C^0 & \to & C^1 & \to & \cdots & \to & C^{n-1} & \to & N & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & M & \to & I^0 & \to & I^1 & \to & \cdots & \to & I^{n-1} & \to & L & \to & 0 \end{array}$$

**图 1 复形的交换图**

**Fig. 1 Communicative diagram of morphisms of modules**

于是存在如下正合序列 $0\to C^0\to I^0\oplus C^1\to I^1\oplus C^2\to\cdots\to I^{n-1}\oplus N\to L\to 0$。

由于每个 $I^i,C^i\in\mathcal{SC}ot$,所以由 $\mathcal{SC}ot$ 对有限制和的封闭性可知 $I^i\oplus C^{i+1}\in\mathcal{SC}ot$,$0\leqslant i\leqslant n-2$。令 $K=\mathrm{Ker}(I^{n-1}\oplus N\to L)$。由模类 $\mathcal{SC}ot$ 的内射可解性可知$K\in\mathcal{SC}ot$。同时由条件 3)知 $L\in\mathcal{SC}ot$。再次运用模类 $\mathcal{SC}ot$ 的内射可解性,可得 $I^{n-1}\oplus N\in\mathcal{SC}ot$。进而由模类 $\mathcal{SC}ot$ 对直和因子的封闭性可知 $N\in\mathcal{SC}ot$。

1)$\Leftrightarrow$7)。由条件 1)和条件 6)的等价性可知只需证明对任意的 $F\in\mathcal{WF}lat$,都有:

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,\mathrm{WF}(M))=0。$$

注意到模类 $\mathcal{SC}ot$ 对扩张封闭,从而由 Wakamuts 引理可知存在如下左 $R$-模的短正合序列 $0\to K\to\mathrm{WF}(M)\to M\to 0$,其中 $K\in\mathcal{SC}ot$。注意到对任意的 $i\geqslant 1$,都有$\mathrm{Ext}_R(F,K)=0$。因而由维数转移可知$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)\cong\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,\mathrm{WF}(M))$。

从而$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0\Leftrightarrow\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,\mathrm{WF}(M))=0$。 证毕

结合命题 1 给出的强余挠维数的刻画,运用通常的同调代数方法,可得到如下观察。

**观察 1** Ⅰ) 设 $R$ 是环,$0\to L\to M\to N\to 0$ 是左 $R$-模的短正合序列。若$\mathrm{scd}_R(L)$、$\mathrm{scd}_R(M)$和$\mathrm{scd}_R(N)$中任意 2 个维数有限,则第 3 个亦有限。并且,以下维数的(不)等式成立:

1) $\mathrm{scd}_R(L)\leqslant\max\{\mathrm{scd}_R(M),\mathrm{scd}_R(N)-1\}$,并且当$\mathrm{scd}_R(M)\neq\mathrm{scd}_R(N)$时相应等式成立。这里若$\mathrm{scd}_R(N)=0$时,$\mathrm{scd}_R(N)-1$ 则应理解为 0;

2) $\mathrm{scd}_R(M)\leqslant\max\{\mathrm{scd}_R(M),\mathrm{scd}_R(N)\}$,并且当$\mathrm{scd}_R(M)+1\neq\mathrm{scd}_R(N)$时相应等式成立;

3) $\mathrm{scd}_R(N)\leqslant\max\{\mathrm{scd}_R(L)+1,\mathrm{scd}_R(M)\}$,并且当$\mathrm{scd}_R(L)\neq\mathrm{scd}_R(M)$时相应等式成立。

Ⅱ) 设$\{(G_j)_{j\in J}\}$是任意一簇左 $R$-模,则 $\mathrm{scd}_R(\prod_{j\in J}M_j)=\sup\{\mathrm{scd}_R(M_j)\mid j\in J\}$。

通常定义环的左整体余挠维数为 $\mathrm{l.Cot}(R)=\sup\{\mathrm{cd}_R(M)\mid M$ 是左 $R$-模$\}$。因此,自然地考虑环的左整体强余挠维数。

**定义 3** 定义环的左整体强余挠维数为 $\mathrm{l.Cot}(R)=\sup\{\mathrm{scd}_R(M)\mid M$ 是左 $R$-模$\}$。

如下定理是本文的主要结论。

**定理 1**　设 $R$ 是环，则以下维数相等：

1) $\mathrm{l}.\mathcal{SCot}(R)$；

2) $\sup\{\mathrm{pd}_R(F)\mid F$ 是弱平坦左 $R$-模$\}$；

3) $\sup\{\mathrm{scd}_R(F)\mid F$ 是弱平坦左 $R$-模$\}$；

4) $\sup\{\mathrm{scd}_R(\mathrm{WF}(M))\mid M$ 是左 $R$-模$\}$。

**证明**　4)=1)由命题 1 中条件 1)⇔7)可知。

3)⩽1)显然。

1)⩽2)。假设 $\sup\{\mathrm{pd}_R(M)\mid F$ 是弱平坦左 $R$-模$\}=n<\infty$，则对任意的弱平坦左 $R$-模 $F$ 及任给的左 $R$-模 $M$，由 $\mathrm{pd}_R(F)\leqslant n$ 可知 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0$。从而由命题 1 可知 $\mathrm{scd}_R(m)\leqslant n$。于是 $\mathrm{l}.\mathcal{SC}\mathrm{ot}(R)\leqslant n$。

2)⩽3)。假设 $\sup\{\mathrm{cd}_R(M)\mid F$ 是弱平坦左 $R$-模$\}=n<\infty$。对任意的左 $R$-模 $M$，由余挠对$(\mathcal{WFlat},\mathcal{SCot})$的完备性(或命题 1 中条件 1)⇔7)的证明)可知，存在左 $R$-的短正合序列：

$$0\to K\to F_M\to M\to 0,$$

其中：$F_M\in\mathcal{WFlat}$，$K\in\mathcal{SCot}$。于是对任意的 $F\in\mathcal{WFlat}$，由长正合序列引理可得：

$$\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,F_M)\to\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)\to\mathrm{Ext}_R^{n+2}(F,K)。$$

由注 2 的 2)可知 $\mathrm{Ext}_R^{n+2}(F,K)=0$，由 $\mathrm{scd}_R(F_M)\leqslant n$ 及命题 1 可知 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,F_M)=0$，于是 $\mathrm{Ext}_R^{n+1}(F,M)=0$，再由命题 1 可知 $\mathrm{scd}_R(M)\leqslant n$。　　证毕

根据文献[4-5]，称左 $R$-模 $M$ 是 Gorenstein 投射(或 Gorenstein AC-投射)的，如果存在一个由投射左 $R$-模构成的 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{Proj})$-正合(或 $\mathrm{Hom}(-,\mathcal{WFlat})$-正合)的正合序列：

$$\cdots\to P_1\to P_0\to P^0\to P^1\to\cdots$$

使得 $M\cong\mathrm{Im}(P_0\to P^0)$。由定义，显然每个 Gorenstein AC-投射左 $R$-模是 Gorenstein 投射的。关于 Gorenstein AC-投射模的更多研究见文献[7-9]。由文献[4]可知，当所有弱平坦左 $R$-模的投射维数有限时 Gorenstein AC-投射左 $R$-模与 Gorenstein 投射左 $R$-模一致。

作为定理 1 的应用，有以下推论。

**推论 1**　设 $R$ 是环，则以下条件等价：

1) $\mathrm{l}.\mathcal{SCot}(R)<\infty$；

2) $\sup\{\mathrm{pd}_R(M)\mid M$ 是弱平坦左 $R$-模$\}<\infty$；

3) $\sup\{\mathrm{scd}_R(M)\mid M$ 是弱平坦左 $R$-模$\}<\infty$；

4) $\sup\{\mathrm{scd}_R(\mathrm{WF}(M))\mid M$ 是左 $R$-模$\}<\infty$；

5) 对于任意的 $F\in\mathcal{WFlat}$，都有 $\mathrm{pd}_R(F)<\infty$；

6) 对于任意的 $F\in\mathcal{WFlat}$，都有 $\mathrm{scd}_R(F)<\infty$。

由此，可以断言：当上述条件之一满足时 Gorenstein AC-投射左 $R$-模与 Gorenstein 投射左 $R$-模一致。

**证明**　条件 1)～4)的等价性可由定理 1 直接得到。同时，2)⇒5)和 3)⇒6)显然。

5)⇒2)。反设 $\sup\{\mathrm{pd}_R(M)\mid M$ 是弱平坦左 $R$-模$\}=\infty$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}$，存在 $F_n\in\mathcal{WFlat}$，使得 $\mathrm{pd}_R(F_n)\geqslant n$。考虑 $R$-模 $\coprod_{n\in\mathbf{N}}F_n$。一方面，$\mathrm{pd}_R(\coprod_{n\in\mathbf{N}}F_n)=\sup\{\mathrm{pd}_R(M_n)\mid n\in\mathbf{N}\}=\infty$。另一方面，由 $\mathcal{SCot}$ 对直和的封闭性[2]可知 $\coprod_{n\in\mathbf{N}}F_n\in\mathcal{WFlat}$。因而由条件 5)可知 $\mathrm{pd}_R(\coprod_{n\in\mathbf{N}}F_n)<\infty$，矛盾。因此，$\sup\{\mathrm{pd}_R(M)\mid M$ 是弱平坦左 $R$-模$\}<\infty$。

6)⇒3)。反设 $\sup\{\mathrm{scd}_R(M)\mid M$ 是弱平坦左 $R$-模$\}=\infty$，则对任意的 $n\in\mathbf{N}$，存在 $F_n\in\mathcal{WFlat}$，使得 $\mathrm{scd}_R(F_n)\geqslant n$。考虑 $R$-模 $\prod_{n\in\mathbf{N}}F_n$。一方面，由观察 1 的Ⅱ)可知 $\mathrm{pd}_R(\prod_{n\in\mathbf{N}}F_n)=\sup\{\mathrm{pd}_R(M_n)\mid n\in\mathbf{N}\}=\infty$。另一方面，由 $\mathcal{SCot}$ 对直积的封闭性[3]可知 $\prod_{n\in N}F_n\in\mathcal{WFlat}$。因而由条件 6)可知 $\mathrm{scd}_R(\prod_{n\in\mathbf{N}}F_n)<\infty$，矛盾。因此，$\sup\{\mathrm{scd}_R(M)\mid M$ 是弱平坦左 $R$-模$\}<\infty$。

最后的断言由文献[4]可知。　　证毕

用$\mathrm{Gpd}_R(M)$和$\mathrm{ACGpd}_R(M)$分别表示 $R$-模 $M$ 的 Gorenstein 投射维数和 Gorenstein AC-投射维数。Liang 等人[7]研究了这 2 种维数的关系以及应用。最后给出如下注记。

**注 3**　设 $R$ 是环。由文献[7]中引理 3.1 的证明及推论 1 可知，$\sup\{\mathrm{ACGpd}_R(M) \mid M$ 是左 $R$-模$\}<\infty$。蕴含着 $\mathrm{l.}\mathcal{SC}ot(R)<\infty$。另一方面，由于 Gorenstein AC-投射 $R$-模总是 Gorenstein 投射的，因而易知：

$$\sup\{\mathrm{ACGpd}_R(M) \mid M \text{ 是左 } R\text{-模}\}<\infty \text{蕴含着} \sup\{\mathrm{Gpd}_R(M) \mid M \text{ 是左 } R\text{-模}\}<\infty。$$

由文献[7]中引理 3.1 及推论 3.11 可知，$\sup\{\mathrm{ACGpd}_R(M) \mid M$ 是左 $R$-模$\}<\infty$当且仅当 $\sup\{\mathrm{Gpd}_R(M) \mid M$ 是左 $R$-模$\}<\infty$且 $\mathrm{l.}\mathcal{SC}ot(R)<\infty$。同时由文献[7]中推论 4.6 可知，当环 $R$ 满足这些等价的有限维数时，相对于 Gorenstein 投射 $R$-模的稳定范畴这一三角范畴是紧生成的。

**参考文献：**


[1] ENOCHS E E. Injective and flat covers, envelopes and resolvents[J]. Isreal Journal of Mechematics, 1981, 39(3): 189-209.

[2] MAO L X, DING N Q. The cotorsion dimension of modules and rings[C]//GOETERS P, JENDA O M G. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Boca Raton: CRC Press, 2006, 249: 217-233.

[3] GAO Z H, WANG F G. Weak injective and weak flat modules[J]. Communications in Algebra, 2015, 43(9): 3857-3868.

[4] BRAVO D, GILLESPIE J, HOVEY M. The stable module category of a general ring[EB/OL]. (2014-05-22)[2022-03-20]. https://arxiv.org/abs/1405.5768v1.

[5] ENOCHS E E, JENDA O M G. Gorenstein injective and projective modules[J]. Mathematische Zeitschrift, 1995, 220(1): 611-633.

[6] HOLM H. Gorenstein homologicaldimensions[J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189(1/2/3): 167-193.

[7] LIANG L, WANG J P. Relative global dimensions and stable homotopy categories[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2020, 358(3): 379-392.

[8] WANG J P, LIU Z K, YANG G. Gillespie's questions and Grothendieck duality[J]. Comptes Rendus Mathematique, 2021, 359(5): 593-607.

[9] 汪军鹏，刘仲奎，张小向. 环的弱整体维数与 CM-自由性[J]. 中国科学：数学，2022，52(2)：121-132.
WANG J P, LIU Z K, ZHANG X X. Weak global dimension and CM-freeness of rings[J]. Scientia Sinica Mathematica, 2022, 52(2): 121-132.


## Strongly Cotorsion Dimensions

ZHANG Yugang

(Lanzhou Institute of Technology, Department of Basic Subjects, Lanzhou 730050, China)

**Abstract**: In order to study the flat and cotorsion property of modules, the notion of strongly cotorsion dimension is introduced. It is proved that over a non-coherent ring, there exists a module whose strongly cotorsion dimension is strictly greater than its cotorsion dimesion, and some characterizations of the finiteness of global strongly cotorsion dimension of rings are given. This finiteness will provide some new thoughts to study the coincidence of the Gorenstein projective and Gorendtein AC-projective modules.

**Keywords**: strongly cotorsion modules; strongly cotorsion dimension; Gorenstein projective module; Gorenstein AC-projective module

(责任编辑　黄　颖)