DOI:10.11721/cqnuj20230504

弱双四元数广义 Sylvester 方程的混合解*

樊学玲，李　莹，刘志红，赵建立
(聊城大学 数学科学学院，山东 聊城 252000)

摘要:利用矩阵半张量积、弱双四元数矩阵的复矩阵表示以及特殊矩阵的 H-表示方法对弱双四元数广义 Sylvester 方程的混合解进行研究。利用 H-表示方法提取特殊矩阵的独立元素，从而去除冗余。结合矩阵半张量积、弱双四元数矩阵的复矩阵表示将弱双四元数 Sylvester 方程转化为具有独立变量的复矩阵方程。由经典矩阵理论给出广义 Sylvester 方程存在混合解的充要条件及通解表达式。通过数值算例验证该方法的有效性。

关键词:弱双四元数;广义 Sylvester 方程;矩阵半张量积;复表示;H-表示
中图分类号:O241.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2023)05-0118-08

本文使用的符号表示如下,$\mathbf{R}$ 代表实数域,$\mathbf{R}^{m\times n}$ 代表 $m\times n$ 维实矩阵集合,$\mathbf{C}^{m\times n}$ 代表 $m\times n$ 维复矩阵集合,$\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}$ 代表弱双四元数集合,$\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{m\times n}$ 代表 $m\times n$ 维弱双四元数矩阵集合,$\mathbf{C}_{z}^{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 维复 Hurwitz 矩阵集合,$\mathbf{Q}_{z}^{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 维弱双四元数 Hurwitz 矩阵集合,$\mathbf{C}_{t}^{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 维复 Toeplitz 矩阵集合,$\mathbf{Q}_{t}^{n\times n}$ 代表 $n\times n$ 维弱双四元数 Toeplitz 矩阵集合,$\boldsymbol{I}_n$ 表示 n 维单位矩阵,$\boldsymbol{\delta}_n^i$ 表示单位矩阵 $\boldsymbol{I}_n$ 的第 i 列,$\boldsymbol{O}$ 表示适合维数的零矩阵,$\otimes$表示矩阵的 Kronecker 积,$V_{\mathrm{r}}(\boldsymbol{A})$、$V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{A})$分别表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 按行展开和按列展开,$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{S}$ 的转置,$\boldsymbol{M}^{\dagger}$ 表示矩阵 $\boldsymbol{M}$ 的 M-P 广义逆。

弱双四元数及弱双四元数矩阵在神经网络以及彩色图像处理[1]、最优控制和数字滤波器设计[2-3]领域都有广泛的应用。例如,Kamal 等人[4]利用弱双四元数在彩色图像中的应用,提出一种有效的矢量处理方法,并将这种方法应用于人脸识别领域的主成分分析框架中;Pei 等人[5]将弱双四元数应用到对数字信号和彩色图像的处理上,提出用弱双四元数的极性形式来表示彩色图像,弱双四元数的这种表示方式可以使许多不同类型的彩色图像颜色模板匹配以及颜色敏感的边缘检测(亮度、色调、饱和度和色度匹配的边缘)得以同时进行,此外 Pei 还利用弱双四元数矩阵的奇异值分解处理彩色图像,弱双四元数矩阵的奇异值分解方法可以实现不将彩色图像分为三通道的方式来处理彩色图像。

矩阵方程在电力系统[6]、数字图像处理[7-8]、物流运输等领域有着非常广泛的应用。许多学者利用不同的求解方法对矩阵方程的特殊解进行了研究。例如,Yuan 等人[9]基于弱双四元数矩阵的复表示给出了弱双四元数矩阵方程$(\boldsymbol{AXB},\boldsymbol{CXD})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$存在 Hermitian 解的充分必要条件及通解表达式;Hidayet[10]将弱双四元数的 e_1-e_2 表示应用到矩阵方程的求解,给出了弱双四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 的最小二乘解,并研究了弱双四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 在彩色图像恢复上的应用;基于矩阵半张量积,利用四元数的实向量表示方法[11-12],丁文旭等人[13-14]研究了不同弱双四元数矩阵方程特殊解存在的充分必要条件。本文将借助矩阵半张量积、弱双四元数矩阵的复矩阵表示以及特殊矩阵的 H-表示方法研究弱双四元数广义 Sylvester 矩阵方程

$$\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{E} \tag{1}$$

的混合解,问题如下。

问题 1　给定 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{n\times p}$,$\boldsymbol{E}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{m\times p}$,求

* **收稿日期**:2022-03-09　**修回日期**:2022-04-27　**网络出版时间**:2023-06-25T10:33
资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 62176112);山东省自然科学基金资助项目(No. ZR2020MA053);聊城大学科研基金(No. 318011921)
第一作者简介:樊学玲,女,研究方向为线性系统理论,E-mail:17852262206@163.com;**通信作者**:李莹,女,教授,E-mail:liyingld@163.com
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230621.2000.014

$$S_z=\{\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}\mid \boldsymbol{X}\in \mathbf{Q}_z^{n\times n},\boldsymbol{Y}\in \mathbf{Q}_t^{n\times n},\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{E}\}。$$

1　预备知识

弱双四元数定义为：

$$x=x_0+x_1\mathrm{i}+x_2\mathrm{j}+x_3\mathrm{k}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R},$$

并定义弱双四元数的乘法满足 $\mathrm{i}^2=\mathrm{k}^2=-1,\mathrm{j}^2=1,\mathrm{ij}=\mathrm{ji}=\mathrm{k},\mathrm{jk}=\mathrm{kj}=\mathrm{i},\mathrm{ki}=\mathrm{ik}=-\mathrm{j}$，其中 $x_0,x_1,x_2,x_3\in \mathbf{R}$。$x$ 可唯一的表示为 $x=d_1+d_2\mathrm{j}$，这里 $d_1=x_0+x_1\mathrm{i},d_2=x_2+x_3\mathrm{i}\in \mathbf{C}$。

定义 1[15]　定义 $\mathbf{Q}_\mathrm{R}$ 上的一个映射 $f_x:\begin{cases}\mathbf{Q}_\mathrm{R}\to \mathbf{Q}_\mathrm{R}\\ f_x(y)=yx\end{cases}(\forall\, y\in \mathbf{Q}_\mathrm{R})$，则映射 f_x 是 $\mathbf{Q}_\mathrm{R}$ 上的一个线性双射。

利用此线性双射计算：

$$\begin{cases}f_x(1)=1(d_1+d_2\mathrm{j})=d_1+d_2\mathrm{j},\\ f_x(\mathrm{j})=\mathrm{j}(d_1+d_2\mathrm{j})=d_2+d_1\mathrm{j}。\end{cases}$$

记 $M(\mathbf{C})=\left\{\begin{bmatrix}d_1 & d_2\\ d_2 & d_1\end{bmatrix}:d_1,d_2\in \mathbf{C}\right\}\subseteq \mathbf{C}^{2\times 2}$。

定义 2[9]　定义映射 $F(x):\mathbf{Q}_\mathrm{R}\to M(\mathbf{C}),F(x)=\begin{bmatrix}d_1 & d_2\\ d_2 & d_1\end{bmatrix}$，称 $F(x)$ 为弱双四元数 x 的复矩阵表示。

与弱双四元数相似，弱双四元数矩阵 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}_{11}+\boldsymbol{D}_{12}\mathrm{i}+\boldsymbol{D}_{21}\mathrm{j}+\boldsymbol{D}_{22}\mathrm{k}$，也可唯一的表示为 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{D}_1+\boldsymbol{D}_2\mathrm{j}$，其中 $\boldsymbol{D}_{11},\boldsymbol{D}_{12},\boldsymbol{D}_{21},\boldsymbol{D}_{22}\in \mathbf{R}^{m\times n},\boldsymbol{D}_1=\boldsymbol{D}_{11}+\boldsymbol{D}_{12}\mathrm{i}\in \mathbf{C}^{m\times n},\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{D}_{21}+\boldsymbol{D}_{22}\mathrm{i}\in \mathbf{C}^{m\times n}$。则弱双四元数矩阵的复矩阵表示为 $F(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1 & \boldsymbol{D}_2\\ \boldsymbol{D}_2 & \boldsymbol{D}_1\end{bmatrix}\in \mathbf{C}^{2m\times 2n}$[9]。定义弱双四元数矩阵算子为 $\Phi(\boldsymbol{X})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{D}_1\\ \boldsymbol{D}_2\end{bmatrix}$，则弱双四元数矩阵算子性质如下。

定理 1　设 $k\in \mathbf{R},\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^{m\times n},\boldsymbol{C}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^{n\times p}$，则：1) $\Phi(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\Phi(\boldsymbol{A})+\Phi(\boldsymbol{B}),\Phi(k\boldsymbol{A})=k\Phi(\boldsymbol{A})$；2) $\Phi(\boldsymbol{AC})=F(\boldsymbol{A})\Phi(\boldsymbol{C})$。

证明　1) 显然，下证 2)成立。设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\mathrm{j}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^{m\times n},\boldsymbol{C}=\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2\mathrm{j}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^{n\times p}$，于是有：

$$\boldsymbol{AC}=(\boldsymbol{A}_1+\boldsymbol{A}_2\mathrm{j})(\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{C}_2\mathrm{j})=\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_2\mathrm{j}+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_1\mathrm{j},$$

故 $\Phi(\boldsymbol{AC})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_2\\ \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{C}_2+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{C}_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & \boldsymbol{A}_2\\ \boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{A}_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{C}_1\\ \boldsymbol{C}_2\end{bmatrix}=F(\boldsymbol{A})\Phi(\boldsymbol{C})$。　　证毕

2　矩阵半张量积

定义 3[16]　假设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{R}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in \mathbf{R}^{p\times q},t=\mathrm{lcm}(n,p)$ 为 n 和 p 的最小公倍数，那么矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矩阵半张量积定义为 $\boldsymbol{A}\ltimes\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{I}_{t/n})(\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{I}_{t/p})$，矩阵半张量积用符号 $\ltimes$ 表示。

由矩阵半张量积的定义可以看出，当 $n=p$ 时，矩阵半张量积为经典矩阵乘法，即矩阵半张量积是经典矩阵乘法的推广。下面介绍的换位矩阵在实现矩阵半张量积的伪交换性中起着极其重要的作用。

定义 4[17]　定义 mn 维换位矩阵为 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}:=[\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\delta}_m^1,\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\delta}_m^2,\cdots,\boldsymbol{I}_n\otimes\boldsymbol{\delta}_m^m]$。

换位矩阵具有以下性质。

引理 1[18]　1) 设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{R}^{m\times n}$，则 $\boldsymbol{W}_{[m,n]}V_\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=V_\mathrm{c}(\boldsymbol{A}),\boldsymbol{W}_{[n,m]}V_\mathrm{c}(\boldsymbol{A})=V_\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$；

2) 设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{R}^{m\times n},\boldsymbol{B}\in \mathbf{R}^{s\times t}$，则 $\boldsymbol{A}\otimes\boldsymbol{B}=\boldsymbol{W}_{[s,m]}\ltimes\boldsymbol{B}\ltimes\boldsymbol{W}_{[m,t]}\ltimes\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{I}_m\otimes\boldsymbol{B})\ltimes\boldsymbol{A}$。

下面给出矩阵半张量积在弱双四元数上的一些结论，该结论将被应用于求解弱双四元数矩阵方程。

定理 2　假设 $\boldsymbol{A}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^{m\times n},\boldsymbol{X}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^{n\times q},\boldsymbol{Y}\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^{p\times m}$，则：

1) $V_\mathrm{r}(\boldsymbol{AX})=\boldsymbol{A}\ltimes V_\mathrm{r}(\boldsymbol{X}),V_\mathrm{c}(\boldsymbol{AX})=(\boldsymbol{I}_q\otimes\boldsymbol{A})V_\mathrm{c}(\boldsymbol{X})$；

2) $V_\mathrm{c}(\boldsymbol{YA})=\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\ltimes V_\mathrm{c}(\boldsymbol{Y}),V_\mathrm{r}(\boldsymbol{YA})=(\boldsymbol{I}_p\otimes\boldsymbol{A}^\mathrm{T})V_\mathrm{r}(\boldsymbol{Y})$。

证明　1)、2)中等式证明方法相似，仅证明 $V_\mathrm{c}(\boldsymbol{YA})=\boldsymbol{A}^\mathrm{T}\ltimes V_\mathrm{c}(\boldsymbol{Y})$。记 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{a}_1,\cdots,\boldsymbol{a}_n),\boldsymbol{a}_i\in \mathbf{Q}_\mathrm{R}^m(i=1,\cdots,$

n),$a_{ki}(k=1,2,\cdots,m)$表示矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 k 行第 i 列的元素,$\boldsymbol{Y}=(\boldsymbol{y}_1,\cdots,\boldsymbol{y}_m)$,$y_j\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{p}(j=1,\cdots,m)$,则 $V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{YA})=V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Ya}_1,\boldsymbol{Ya}_2,\cdots,\boldsymbol{Ya}_n)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Ya}_1\\ \boldsymbol{Ya}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{Ya}_n\end{bmatrix}$。进而有:

$$\boldsymbol{Ya}_i=\boldsymbol{y}_1a_{1i}+\boldsymbol{y}_2a_{2i}+\cdots+\boldsymbol{y}_ma_{mi}=a_{1i}\boldsymbol{y}_1+a_{2i}\boldsymbol{y}_2+\cdots+a_{mi}\boldsymbol{y}_m=[a_{1i}\boldsymbol{I}_p \quad \cdots \quad a_{mi}\boldsymbol{I}_p]V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})。$$

故有:

$$V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{YA})=\begin{bmatrix}a_{11}\boldsymbol{I}_p & a_{21}\boldsymbol{I}_p & \cdots & a_{m1}\boldsymbol{I}_p\\ a_{12}\boldsymbol{I}_p & a_{22}\boldsymbol{I}_p & \cdots & a_{m2}\boldsymbol{I}_p\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{1n}\boldsymbol{I}_p & a_{2n}\boldsymbol{I}_p & \cdots & a_{mn}\boldsymbol{I}_p\end{bmatrix}V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})=(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{I}_p)V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})=\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\rhd V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})。$$

证毕

3 矩阵的 H-表示

本节将介绍矩阵的 H-表示方法。

定义 5[18] 在复数域 $\mathbf{C}$ 上,考虑 p 维复矩阵子空间 $X\subset\mathbf{C}^{n\times n}$,假设 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\cdots,\boldsymbol{e}_p$ 为 X 的一组基,对于任意的 $\boldsymbol{X}\in X$,有 $\boldsymbol{X}=\sum\limits_{i=1}^{p}x_i\boldsymbol{e}_i$,定义 $\boldsymbol{H}=[V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{e}_1),V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{e}_2),\cdots,V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{e}_p)]$。有 $\psi(\boldsymbol{X})=V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})=\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{X}}$,这里 $\widetilde{\boldsymbol{X}}=[x_1,x_2,\cdots,x_p]^{\mathrm{T}}$ 为 p 维列向量,$\boldsymbol{H}\widetilde{\boldsymbol{X}}$ 称为 $\psi(\boldsymbol{X})$的 H-表示,$\boldsymbol{H}$ 称为 $\psi(\boldsymbol{X})$的 H-表示矩阵。

Hurwitz 矩阵在控制系统中有非常重要的应用,通常被用于考虑稳定性问题中的稳定多项式,且线性系统的稳定性可以用状态矩阵是不是 Hurwitz 矩阵来判定。Hurwitz 矩阵定义如下。

定义 6[19] 设多项式 $a(\lambda)=\sum\limits_{i=0}^{n}a_i\lambda^{n-i}$, $a_0\neq0$,$n\times n$ 矩阵

$$\boldsymbol{Z}_n=\begin{bmatrix}a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2n-3} & a_{2n-1}\\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2n-4} & a_{2n-2}\\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2n-5} & a_{2n-3}\\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & a_{2n-6} & a_{2n-4}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2} & a_n\end{bmatrix},$$

其中:$a_i=0,\forall i>n$,$\boldsymbol{Z}_n$ 称为相伴多项式 $a(\lambda)$的 Hurwitz 矩阵。

例 1 设 $X=\mathbf{C}_z^{4\times4}$,$\boldsymbol{Z}_4\in X$,$\dim(X)=5$ 选 X 的基为:

$$\boldsymbol{e}_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_2=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\boldsymbol{e}_5=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}。$$

有:

$$\psi(\boldsymbol{Z}_4)=[a_1,a_0,0,0,a_3,a_2,a_1,a_0,0,a_4,a_3,a_2,0,0,0,a_4]^{\mathrm{T}},\widetilde{\boldsymbol{Z}}_4=[a_1,a_3,a_0,a_2,a_4]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}。$$

一般地，对 $X=\mathbf{C}_{z}^{n\times n}$，先为 Hurwitz 矩阵子空间选取标准基底$\{\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\cdots,\boldsymbol{E}_{n+1}\}$。这里当 n 为奇数时，

$$\boldsymbol{E}_i=\begin{cases} e_{1+2k,i+k}=1,1\leqslant i\leqslant\dfrac{n+1}{2},k=0,1,\cdots,\dfrac{n-1}{2}, \\ e_{2k+2,i+k-\frac{n+1}{2}}=1,\dfrac{n+1}{2}+1\leqslant i\leqslant n+1,k=0,1,\cdots,\dfrac{n-3}{2}。\end{cases}$$

当 n 为偶数时，

$$\boldsymbol{E}_i=\begin{cases} e_{1+2k,i+k}=1,1\leqslant i\leqslant\dfrac{n}{2} \\ e_{2+2k,i+k-\frac{n}{2}}=1,\dfrac{n}{2}+1\leqslant i\leqslant n+1 \end{cases},k=0,1,\cdots,\dfrac{n-2}{2}。$$

对于任意的 $\boldsymbol{Z}_n\in X$，有$\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n=\begin{cases}(a_1,a_3,\cdots,a_n,a_0,a_2,\cdots,a_{n-1})^{\mathrm{T}},n \text{ 为奇数时} \\ (a_1,a_3,\cdots,a_{n-1},a_0,a_2,\cdots,a_n)^{\mathrm{T}},n \text{ 为偶数时}\end{cases}$。

对于上述标准基底的选取以及由基底唯一确定的$\widetilde{\boldsymbol{Z}}_n$ 可以得到 Hurwitz 矩阵的 H-表示矩阵 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}}$ 如下：

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}}=[V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}_1),V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}_2),\cdots,V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}_{n+1})]\in\mathbf{R}^{n^2\times(n+1)}。$$

Toeplitz 矩阵被广泛应用于微分方程数值解、三角矩量等问题中。Toeplitz 矩阵定义如下。

定义 7[19]　设 $\boldsymbol{T}_n=(t_{ij})_{n\times n}\in\mathbf{R}^{n\times n}$，满足 $t_{ij}=t_{j-i}(i,j=1,2,\cdots,n)$，即：

$$\boldsymbol{T}_n=\begin{bmatrix} t_0 & t_1 & t_2 & \cdots & t_{n-1} \\ t_{-1} & t_0 & t_1 & \cdots & t_{n-2} \\ t_{-2} & t_{-1} & t_0 & \cdots & t_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{-n+1} & t_{-n+2} & t_{-n+3} & \cdots & t_0 \end{bmatrix}。$$

称 $\boldsymbol{T}_n$ 为 n 维 Toeplitz 矩阵。

例 2　设 $X=\mathbf{C}_{\mathrm{t}}^{4\times 4}$，$\boldsymbol{T}_4=(t_{ij})_{4\times 4}\in X$，$\dim(X)=7$，选 X 的基为：

$$f_1=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},f_2=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},f_3=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},f_4=\begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$f_5=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{bmatrix},f_6=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},f_7=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}。$$

有：

$$\psi(\boldsymbol{T}_4)=[t_0,t_{-1},t_{-2},t_{-3},t_1,t_0,t_{-1},t_{-2},t_2,t_1,t_0,t_{-1},t_3,t_2,t_1,t_0]^{\mathrm{T}},\widetilde{\boldsymbol{T}}_4=[t_0,t_{-1},t_{-2},t_{-3},t_1,t_2,t_3]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1\\0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&0&0&0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}。$$

一般地，对 $X=\mathbf{C}_{\mathrm{t}}^{n\times n}$，先选取 Toeplitz 矩阵子空间的标准基底为$\{\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\cdots,\boldsymbol{F}_{2n-1}\}$，这里

$$\boldsymbol{F}_i=\begin{cases}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{I}_{n-i+1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}_{n\times n}, i\leqslant n,\\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}_{2n-i}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}_{n\times n}, n<i\leqslant 2n-1。\end{cases}$$

对于任意的 $\boldsymbol{T}_n=(t_{ij})_{n\times n}\in X$,有$\widetilde{\boldsymbol{T}}_n=(t_0,t_{-1},\cdots,t_{-n+1},t_1,\cdots,t_{n-1})^{\mathrm{T}}$。

对于上述标准基底的选取以及由基底唯一确定的$\widetilde{\boldsymbol{T}}_n$ 可以得到 Toeplitz 矩阵的 H-表示矩阵 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$ 如下:

$$\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}}=[V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_1),V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_2),\cdots,V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{F}_{2n-1})]\in\mathbf{R}^{n^2\times(2n-1)}。$$

4 广义 Sylvester 方程的混合解

引理 2[20] 设 $\boldsymbol{A}\in\mathbf{C}^{m\times n}$,$\boldsymbol{b}\in\mathbf{C}^m$,则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是 $\boldsymbol{AA}^{\dagger}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$,这时,$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解是 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{A})\boldsymbol{y}$,其中 $\boldsymbol{y}\in\mathbf{C}^n$ 为任意向量。当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=n$ 时,$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^{\dagger}\boldsymbol{b}$ 是方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的唯一解。

定理 3 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{m\times n}$,$\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{n\times p}$,$\boldsymbol{E}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{m\times p}$,弱双四元数矩阵方程(1)有混合解 $\boldsymbol{X}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{z}}^{n\times n}$,$\boldsymbol{Y}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{t}}^{n\times n}$ 当且仅当

$$\boldsymbol{RR}^{\dagger}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))。\tag{2}$$

如果式(2)成立,则所有混合解的集合为:

$$S_{\mathrm{z}}=\left\{\boldsymbol{X}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{z}}^{n\times n},\boldsymbol{Y}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{t}}^{n\times n}\ \middle|\ \begin{bmatrix}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}))\\ \Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}))\end{bmatrix}=\boldsymbol{WR}^{\dagger}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{6n}-\boldsymbol{R}^{\dagger}\boldsymbol{R})\boldsymbol{y}\right\}。\tag{3}$$

这里 $\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{6n}$ 为任意向量。并且当

$$\mathrm{rank}(\boldsymbol{R})=6n\tag{4}$$

时,弱双四元数矩阵方程(1)唯一混合解 $\dot{X}$,$\dot{Y}$ 满足:

$$\begin{bmatrix}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\dot{\boldsymbol{X}}))\\ \Phi(V_{\mathrm{c}}(\dot{\boldsymbol{Y}}))\end{bmatrix}=\boldsymbol{WR}^{\dagger}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))。\tag{5}$$

这里 $\boldsymbol{W}=\mathrm{diag}(\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}})$,$\boldsymbol{R}=[F(\boldsymbol{P})\quad F(\boldsymbol{Q})]\boldsymbol{W}$。

证明 令 $\boldsymbol{P}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\mathrm{j}$,$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C}=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2\mathrm{j}$。设 $\boldsymbol{X}=\boldsymbol{X}_1+\boldsymbol{X}_2\mathrm{j}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{z}}^{n\times n}$,$\boldsymbol{Y}=\boldsymbol{Y}_1+\boldsymbol{Y}_2\mathrm{j}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{t}}^{n\times n}$。由定理 1 与定理 2 有:

$$\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{E}\Leftrightarrow V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{AXB})+V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{CYD})=V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E})\Leftrightarrow$$
$$(\boldsymbol{I}_p\otimes\boldsymbol{A})\triangleright\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\triangleright V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{I}_p\otimes\boldsymbol{C})\triangleright\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\triangleright V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})=V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E})\Leftrightarrow$$
$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{A})V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X})+(\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}\otimes\boldsymbol{C})V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y})=V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E})\Leftrightarrow\Phi(\boldsymbol{P}V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}))+\Phi(\boldsymbol{Q}V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}))=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))\Leftrightarrow$$
$$F(\boldsymbol{P})\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}))+F(\boldsymbol{Q})\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}))=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))\Leftrightarrow$$
$$[F(\boldsymbol{P})\quad F(\boldsymbol{Q})]\begin{bmatrix}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}))\\ \Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}))\end{bmatrix}=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))\Leftrightarrow[F(\boldsymbol{P})\quad F(\boldsymbol{Q})]\begin{bmatrix}V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_1)\\ V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_2)\\ V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}_1)\\ V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}_2)\end{bmatrix}=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))\Leftrightarrow$$
$$[F(\boldsymbol{P})\quad F(\boldsymbol{Q})]\begin{bmatrix}\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{H}_{\mathrm{h}} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{X}}_2\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_2\end{bmatrix}=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))\Leftrightarrow$$
$$[F(\boldsymbol{P})\quad F(\boldsymbol{Q})]\boldsymbol{W}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{X}}_2\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_2\end{bmatrix}=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))\Leftrightarrow\boldsymbol{R}\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{X}}_2\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_2\end{bmatrix}=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))。$$

由引理 1 可以得到弱双四元数 Sylvester 方程(1)有解当且仅当 $\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\dagger}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))=\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))$，并且它的通解满足：

$$\begin{bmatrix}\widetilde{\boldsymbol{X}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{X}}_2\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_1\\ \widetilde{\boldsymbol{Y}}_2\end{bmatrix}=\boldsymbol{R}^{\dagger}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))+(\boldsymbol{I}_{6n}-\boldsymbol{R}^{\dagger}\boldsymbol{R})\boldsymbol{y},\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{6n}。$$

进而由 H-表示方法可得：

$$\begin{bmatrix}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}))\\ \Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}))\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_1)\\ V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}_2)\\ V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}_1)\\ V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}_2)\end{bmatrix}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}^{\dagger}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))+\boldsymbol{W}(\boldsymbol{I}_{6n}-\boldsymbol{R}^{\dagger}\boldsymbol{R})\boldsymbol{y},\ \forall\,\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^{6n}。$$

并且当 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{R})=6n$ 时，弱双四元数 Sylvester 方程(1)的唯一混合解满足 $\begin{bmatrix}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{X}))\\ \Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{Y}))\end{bmatrix}=\boldsymbol{W}\boldsymbol{R}^{\dagger}\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E}))$。 证毕

5 算法及数值算例

算法 设 $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{E}$ 满足具有混合解的条件，本算法用于计算弱双四元数矩阵方程(1)的混合解。具体如下：

1) 输入 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{m\times n}$，$\boldsymbol{B},\boldsymbol{D}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{n\times p}$，$\boldsymbol{E}\in\mathbf{Q}_{\mathrm{R}}^{m\times p}$，输出 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q},\Phi(V_{\mathrm{c}}(\boldsymbol{E})),F(\boldsymbol{P}),F(\boldsymbol{Q})$；

2) 输入 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{h}},\boldsymbol{H}_{\mathrm{t}}$，输出矩阵 $\boldsymbol{W},\boldsymbol{R}$；

3) 如果式(2)、(4)成立，根据式(5)计算弱双四元数矩阵方程(1)的混合解 $\dot{\boldsymbol{X}},\dot{\boldsymbol{Y}}\in S_{\mathrm{z}}$。

算例 考虑弱双四元数矩阵方程(1)的混合解。设 $m=n=p=4$，给出 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D},\boldsymbol{E}$ 如下：

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2+5\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k} & 4+4\mathrm{i}+2\mathrm{k} & 3\mathrm{i}+3\mathrm{j}+\mathrm{k} & 4+2\mathrm{i}+\mathrm{j}+3\mathrm{k}\\ 5+3\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k} & 3+2\mathrm{i}+3\mathrm{j}+\mathrm{k} & 3+3\mathrm{i}+2\mathrm{j}+\mathrm{k} & 5+2\mathrm{j}\\ 3+\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+4\mathrm{i}+\mathrm{j}+5\mathrm{k} & 3+3\mathrm{j}+\mathrm{k} & 4+2\mathrm{i}+4\mathrm{j}+5\mathrm{k}\\ 4+\mathrm{i}+\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 3+\mathrm{i}+3\mathrm{j} & 4+3\mathrm{i}+2\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 3+\mathrm{i}+4\mathrm{j}+4\mathrm{k}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2+3\mathrm{i}+4\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 5\mathrm{i}+3\mathrm{j} & 5+2\mathrm{i}+4\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+\mathrm{j}+\mathrm{k}\\ 4\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 2+3\mathrm{i}+3\mathrm{j} & 2+\mathrm{i}+2\mathrm{j}+\mathrm{k} & 3\mathrm{i}+\mathrm{j}+3\mathrm{k}\\ 4+4\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 2+\mathrm{i}+2\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 1+4\mathrm{i}+3\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 3+3\mathrm{i}+3\mathrm{j}+2\mathrm{k}\\ 1+4\mathrm{i}+\mathrm{j} & 1+4\mathrm{i}+5\mathrm{k} & 4\mathrm{j}+\mathrm{k} & 4+3\mathrm{i}+2\mathrm{j}+3\mathrm{k}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}4+2\mathrm{i}+4\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 5+3\mathrm{i}+2\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 1+\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 5+4\mathrm{i}+2\mathrm{j}+4\mathrm{k}\\ 3\mathrm{i}+5\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 4+4\mathrm{i}+4\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 2+\mathrm{i}+2\mathrm{j}+\mathrm{k} & 2+\mathrm{i}+\mathrm{j}\\ 4+\mathrm{j}+5\mathrm{k} & 4+2\mathrm{i}+4\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+3\mathrm{i}+\mathrm{k} & 1+5\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}\\ 5+4\mathrm{i}+2\mathrm{j}+\mathrm{k} & 3+2\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k} & 2\mathrm{i}+3\mathrm{j}+\mathrm{k} & 2+3\mathrm{i}+5\mathrm{j}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}=\begin{bmatrix}4+4\mathrm{i}+\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 4+\mathrm{i}+5\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 2+4\mathrm{i}+2\mathrm{j} & 4+3\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}\\ 3+\mathrm{i}+4\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 5+3\mathrm{i}+2\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 2+\mathrm{i}+3\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 2+\mathrm{j}+\mathrm{k}\\ 4+2\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k} & 4+2\mathrm{i}+3\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 3+\mathrm{i}+\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 1+2\mathrm{i}+4\mathrm{j}\\ 1+3\mathrm{i}+3\mathrm{j} & \mathrm{i}+4\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 3+\mathrm{i}+5\mathrm{j}+3\mathrm{k} & \mathrm{i}+2\mathrm{j}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}=[\boldsymbol{E}_1\quad \boldsymbol{E}_2\quad \boldsymbol{E}_3\quad \boldsymbol{E}_4]$$

其中：

$$\boldsymbol{E}_1=\begin{bmatrix}-2\,831+3\,026\mathrm{i}-2\,688\mathrm{j}+3\,087\mathrm{k}\\ -1\,608+2\,886\mathrm{i}-1\,562\mathrm{j}+3\,069\mathrm{k}\\ -2\,585+2\,683\mathrm{i}-2\,606\mathrm{j}+2\,426\mathrm{k}\\ -1\,646+3\,273\mathrm{i}-1\,663\mathrm{j}+3\,189\mathrm{k}\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_2=\begin{bmatrix}-2\,658+3\,610\mathrm{i}-2\,742\mathrm{j}+3\,473\mathrm{k}\\ -1\,690+3\,205\mathrm{i}-1\,527\mathrm{j}+3\,245\mathrm{k}\\ -2\,514+2\,903\mathrm{i}-2\,774\mathrm{j}+2\,844\mathrm{k}\\ -1\,582+3\,584\mathrm{i}-1\,543\mathrm{j}+3\,271\mathrm{k}\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{E}_3=\begin{bmatrix}-2\ 392+3\ 049\mathrm{i}-2\ 599\mathrm{j}+3\ 104\mathrm{k}\\-1\ 459+2\ 967\mathrm{i}-1\ 475\mathrm{j}+2\ 905\mathrm{k}\\-2\ 521+2\ 663\mathrm{i}-2\ 430\mathrm{j}+2\ 601\mathrm{k}\\-1\ 450+3\ 016\mathrm{i}-1\ 447\mathrm{j}+3\ 079\mathrm{k}\end{bmatrix},\boldsymbol{E}_4=\begin{bmatrix}-1\ 790+1\ 946\mathrm{i}-1\ 737\mathrm{j}+2\ 020\mathrm{k}\\-1\ 002+2\ 063\mathrm{i}-1\ 105\mathrm{j}+1\ 976\mathrm{k}\\-1\ 813+1\ 853\mathrm{i}-1\ 828\mathrm{j}+1\ 729\mathrm{k}\\-1\ 231+2\ 142\mathrm{i}-1\ 204\mathrm{j}+2\ 075\mathrm{k}\end{bmatrix}。$$

在 Matlab 中利用算法计算弱双四元数矩阵方程(1)的混合解 $\dot{\boldsymbol{X}},\dot{\boldsymbol{Y}}$,得到:

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\begin{bmatrix}2+3\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k} & 3+\mathrm{i}+\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 0 & 0\\4+\mathrm{i}+2\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 3+2\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k} & 0\\0 & 2+3\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k} & 3+\mathrm{i}+\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 0\\0 & 4+\mathrm{i}+2\mathrm{j}+4\mathrm{k} & 3+2\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+\mathrm{i}+\mathrm{j}+\mathrm{k}\end{bmatrix},$$

$$\dot{\boldsymbol{Y}}=\begin{bmatrix}1+3\mathrm{i}+5\mathrm{j} & 3+4\mathrm{i}+\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 1+4\mathrm{i}+3\mathrm{j}+\mathrm{k} & 2+2\mathrm{i}+4\mathrm{j}+2\mathrm{k}\\2\mathrm{i}+\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+3\mathrm{i}+5\mathrm{j} & 3+4\mathrm{i}+\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 1+4\mathrm{i}+3\mathrm{j}+\mathrm{k}\\5+\mathrm{i}+\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 2\mathrm{i}+\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+3\mathrm{i}+5\mathrm{j} & 3+4\mathrm{i}+\mathrm{j}+2\mathrm{k}\\4+3\mathrm{i}+2\mathrm{j}+5\mathrm{k} & 5+\mathrm{i}+\mathrm{j}+2\mathrm{k} & 2\mathrm{i}+\mathrm{j}+3\mathrm{k} & 1+3\mathrm{i}+5\mathrm{j}\end{bmatrix},$$

并与真实解 $\boldsymbol{X},\boldsymbol{Y}$ 进行比较,得到误差为 3.994 8e−13。由此可以看出,该算法有效。

6 结论

本文介绍了利用矩阵半张量积以及矩阵的 H-表示方法求解弱双四元数广义 Sylvester 矩阵方程混合解的新方法。矩阵半张量积与弱双四元数矩阵的复矩阵表示结合,可以将弱双四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXB}+\boldsymbol{CYD}=\boldsymbol{E}$ 转化为具有独立变量的复线性方程 $\boldsymbol{Mx}=\boldsymbol{N}$ 的形式,进而利用特殊矩阵的 H-表示方法提取独立元素,由经典矩阵理论得到弱双四元数矩阵方程(1)存在混合解的充要条件及通解表达式,最后利用数值算例验证了这种方法的有效性。

参考文献:

[1] PEI S C,CHANG J H,DING J J,et al. Eigenvalues and singular value decompositions of reduced biquaternion matrices[J]. IEEE Transactions on Circuits and Systems I Regular Papers,2008,55(9):2673-2685.

[2] SCHUTTE H D,WENZEL J. Hypercomplex numbers in digital signal processing[C]//1990 IEEE of International Symposium on Circuits and Systems. Piscataway:IEEE,1990:1557-1560.

[3] UEDA K,TAKAHASHI S I. Digital filters with hypercomplex coefficients[J]. Electronics and Communications in Japan (Part III:Fundamental Electronic Science),1993,76(9):85-98.

[4] KAMAL A T,EL-MELEGY M T. Color image processing using reduced biquaternions with application to face recognition in a PCA framework[C]//2017 IEEE International Conference on Computer Vision Workshop,October 22-29,2017,Venice,Italy. Piscataway:IEEE,2017:3039-3046.

[5] PEI S C,CHANG J H,DING J J. Commutative reduced biquaternions and their Fourier transform for signal and image processing applications[J]. IEEE Transactions on Signal Processing,2004,52(7):2012-2031.

[6] BAILEY F N. The application of Lyapunov's second method to interconnected systems[J]. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics,1965,3(3):443-462.

[7] YUAN S F,WANG Q W,DUAN X F. On solutions of the quaternion matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ and their applications in color image restoration[J]. Applied Mathematics and Computation,2013,221(9):10-20.

[8] ZHANG F X,MU W S,LI Y,et al. Special least squares solutions of the quaternion matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ with applications [J]. Computers and Mathematics with Applications,2016,72(5):1426-1435.

[9] YUAN S F,TIAN Y,LI M Z. On Hermitian solutions of the reduced biquaternion matrix equation $(\boldsymbol{AXB},\boldsymbol{CXD})=(\boldsymbol{E},\boldsymbol{G})$[J]. Linear and Multilinear Algebra,2020,68(7):1355-1373.

[10] KOSAL H H. Least-squares solutions of the reduced biquaternion matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ and their applications in colour image restoration[J]. Journal of Modern Optics,2019,66(18):1802-1810.

[11] 丁文旭,李莹,王栋,等.求解四元数矩阵方程的矩阵半张量积方法[J].山东大学学报(理学版),2021,56(6):103-110.
DING W X,LI Y,WANG D,et al. Solutions of the quaternion matrix equation based on semi-tensor product of matrices[J].

Journal of Shandong University (Natural Science),2021,56(6):103-110.

[12] 岳树芳,李莹,赵建立,等.四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$ 的特殊最小二乘解[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2021,38(6):91-96.

YUE S F,LI Y,ZHAO J L,et al. The special least squares solutions of quaternion matrix equation $\boldsymbol{AXA}^{\mathrm{H}}=\boldsymbol{B}$[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2021,38(6):91-96.

[13] 丁文旭,李莹,王栋,等.基于矩阵半张量积求解弱双四元数矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$[J].数学的实践与认识,2021,51(8):253-259.

DING W X,LI Y,WANG D,et al. Solve the reduced biquaternion matrix equation $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ based on semi-tensor product of matrices[J]. Mathematics in Practice and Theory,2021,51(8):253-259.

[14] DING W X,LI Y,WEI A L,et al. Solving reduced biquaternion matrices equation $\sum_{i=1}^{k}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{XB}_i=\boldsymbol{C}$ with special structure based on semi-tensor product of matrices[J]. AIMS Mathematics,2022,7(3):3258-3276.

[15] 邓勇.实分裂四元数矩阵的复表示及其逆矩阵求法[J].喀什大学学报,2020,41(6):5-9.

DENG Y. The complex representation of real split quaternion matrix and its inverse matrix calculation[J]. Journal of Kashi University,2020,41(6):5-9.

[16] 程代展,齐洪胜.矩阵半张量积讲义卷一:基本理论与多线性运算[M].北京:科学出版社,2020.

CHENG D Z,QI H S. Lecture notes in semi-tensor product of matrices:basic theory and multilinear operation[M]. Beijing:Science Press,2020.

[17] CHENG D Z,QI H S,XUE A C. A survey on semi-tensor product of matrices[J]. Journal of Systems Science and Complexity,2007,20(2):304-322.

[18] ZHANG W H,CHEN B S. H-representation and applications to generalized Lyapunov equations and linear stochastic systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control,2012,57(12):3009-3022.

[19] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

CHEN J L,CHEN X H. Special matrices[M]. Beijing:Tsinghua University Press,2000.

[20] BEN-ISRAEL A,GREVILLE T N E. Generalized inverses:theory and applications[M]. New York:Springer,2003.

The Mixed Solution of Reduced Biquaternion Generalized Sylvester Equation

FAN Xueling, LI Ying, LIU Zhihong, ZHAO Jianli

(School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng Shandong 252000, China)

Abstract: The mixed solution of reduced biquaternion generalized Sylvester equation is studied by using semi-tensor product of matrices, complex matrix representation of reduced biquaternion matrix and H-representation of special matrix. The independent elements of special matrix are extracted by H-representation method to remove the redundancy. Combined with the semi-tensor product of matrices and complex representation of reduced biquaternion matrix, the reduced biquaternion Sylvester equation is transformed into a complex matrix equation with independent variables. The necessary and sufficient conditions for the existence of the mixed solution and the expression of general solution of generalized Sylvester equation are given by classical matrix theory. A numerical example is given to verify the effectiveness of the method.

Keywords: reduced biquaternion; generalized sylvester equation; semi-tensor product of matrices; complex representation; H-representation

(责任编辑 黄 颖)