

# 适形分数阶导数下的2+1维KP方程的半域孤子解\*

何伟军, 吴春

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

**摘要:**为了研究适形分数阶导数定义下分数阶孤子方程的多孤子解,利用分数阶复变换法将分数阶孤子方程变换为整数阶孤子方程,然后用传统的双线性法求分数阶孤子方程的多孤子解。得到了分数阶Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程的1-孤子解、2-孤子解的显式表达式以及任意 $n$ -孤子解的递推公式,比较了整数阶孤子和相应的分数阶孤子,讨论了2-孤子在传播过程中2个孤子的相互作用。通过对比发现,适形分数阶导数定义下的分数阶KP方程的孤子解与整数阶导数定义下的KP方程的孤子解在动力学行为上存在一些差异。

**关键词:**适形分数阶导数;非线性分数阶偏微分方程;分数阶2+1维KP方程;半域孤子解

**中图分类号:**O193;O175.2

**文献标志码:**A

**文章编号:**1672-6693(2023)06-0065-07

自从分数阶微积分的概念于1695年在L'Hospital给Leibniz的信中提出以来<sup>[1]</sup>,经过漫长的发展历程,分数阶微积分及分数阶微分方程理论逐渐地被建立起来。但与整数阶微积分相比,分数阶微积分的发展却十分缓慢,至今分数阶微积分仍然没有统一的定义,使得分数阶微积分在实际应用中极为不便。早期的分数阶微积分定义各具特点,例如Riemann-Liouville型分数阶微积分定义、Caputo型分数阶微积分定义、Grünwald-Letnikov型分数阶微积分等定义。它们不存在像整数阶导数那样简洁的链式法则和莱布尼茨公式,并且除了幂函数外,其他初等函数均找不到简洁的导数公式,给运算带来极大的困难,导致分数阶微积分应用存在着相当大的难度。为了解决上述问题,2006年,Jumarie<sup>[2]</sup>改进了Riemann-Liouville型分数阶导数的定义,又在后续研究中获得了与整数阶导数一样简洁的分数阶链式法则和莱布尼茨公式<sup>[3-4]</sup>。有研究者利用这2个新公式并结合1种复变换,获得了某些非线性分数阶偏微分方程的孤立子解<sup>[5-8]</sup>。然而,在文献[9-11]中,研究者们又证明了Jumarie提供的分数阶链式法则和莱布尼茨公式是错误的。于是,Khalil等人<sup>[12]</sup>、Abdeljawad等人<sup>[13]</sup>先后提出了适形分数阶导数(conformable fractional derivative)的定义,又称一致分数阶导数或保形分数阶导数定义,该分数阶导数定义的性质非常接近整数阶导数的性质,因此链式法则和莱布尼茨公式均成立,并且所有的基本初等函数都存在导数公式,极大地简化了运算,于是许多学者在这种新的导数定义下,研究了一系列的分数阶孤子方程的孤子解或一般行波解<sup>[14-17]</sup>。最近,Rui<sup>[18]</sup>发现,在适形分数阶导数的定义下,1+1维的分数阶孤子方程的孤子解是一种局域形式的孤子解,孤子仅在右半平面传播,因此他称之为半域孤子解(semi-domain soliton solution)。但Rui只讨论了1+1维的分数阶孤子方程的1-孤子解,为了较全面地研究这种半域形式的孤子解,本文将在适形分数阶导数的定义下讨论2+1维Kadomtsev-Petviashvili(KP)方程的各种半域孤子解,包括它的多孤子解及动力学行为。

## 1 预备知识

**定义 1**<sup>[12-13]</sup> 设 $f(t)$ 是定义于 $t \in [0, +\infty)$ 的光滑函数,适形分数阶导数的定义如下:

$${}^K D_t^\alpha f(t) = f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f(t + \epsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\epsilon},$$

\* 收稿日期:2022-10-31 修回日期:2023-10-13 网络出版时间:2023-09-21T12:04

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11361023);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2019cyj-msxmX0390);重庆市教育科学规划课题《现代信息技术与高校数学教学深度融合实践研究》(No. K22YG205144)

第一作者简介:何伟军,男,研究方向为分数阶微分方程,E-mail:hewei jun2022@163.com;通信作者:吴春,男,副教授,研究方向为偏微分方程,E-mail:wuchun@cqu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230920.1941.010

其中:  $t > 0, 0 < \alpha \leq 1$ 。如果  $f$  在  $(0, +\infty)$  上是  $\alpha$ -可导的, 则极限  $\lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$  存在, 且有  $f^{(\alpha)}(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ 。

**定义 2**<sup>[12-13]</sup> 如果  $n < \alpha \leq n+1$ , 高阶适形分数阶导数的定义如下:

$${}^K D_t^\alpha f(t) = f^{(\alpha)}(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{f^{(n)}(t + \epsilon t^{n+1-\alpha}) - f^{(n)}(t)}{\epsilon}.$$

**定理 1**<sup>[12-13]</sup> 如果  $\alpha \in (0, 1]$ , 且  $f(t), g(x)$  是定义于  $[0, +\infty)$  的  $\alpha$  阶可导的函数, 则以下结论成立:

1)  ${}^K D_t^\alpha (af + bg) = a {}^K D_t^\alpha f + b {}^K D_t^\alpha g, \forall a, b \in \mathbf{R};$

2)  ${}^K D_t^\alpha t^\lambda = \lambda t^{\lambda-\alpha}, \forall \lambda \in \mathbf{R};$

3)  ${}^K D_t^\alpha c = 0$ , 其中  $c$  为任意常数;

4)  ${}^K D_t^\alpha fg = g {}^K D_t^\alpha f + f {}^K D_t^\alpha g;$

5)  ${}^K D_t^\alpha \frac{f}{g} = \frac{g {}^K D_t^\alpha f - f {}^K D_t^\alpha g}{g^2};$

6)  ${}^K D_t^\alpha f = t^{1-\alpha} f', f'$  表示  $f$  的一阶导数。

## 2 适形分数阶导数定义下分数阶 KP 方程的多孤子解及动力学行为

由于 Riemann-Liouville 型分数阶导数和 Caputo 型分数阶导数领域均不存在简洁的链式求导法则<sup>[18]</sup>, 所以无法获得相应的非线性偏微分方程的孤子解。但在适形分数阶导数定义下, 适形分数阶孤子方程可以获得它们的孤子解的。下面以 2+1 维的分数阶 KP 方程为例, 研究分数阶非线性偏微分方程的多孤子解, 并讨论它们的动力学行为, 同时将进一步讨论 2+1 维分数阶 KP 方程与整数阶 KP 方程的孤子解之间的差异。

对 2+1 维整数阶 KP 方程和 2+1 维适形分数阶 KP 方程分别定义如下:

$$(u_t + u_{xxx} + 6uu_x)_x + 3\sigma^2 u_{yy} = 0, \quad (1)$$

$${}^K D_x^\beta ({}^K D_t^\alpha u + ({}^K D_x^\beta)^3 u + 6u {}^K D_x^\beta u) + 3\sigma^2 ({}^K D_y^\beta)^2 u = 0. \quad (2)$$

其中:  $u = u(t, x, y), 0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, \sigma$  为任意常数。显然当  $\alpha = \beta = 1$  时, 适形分数阶 KP 方程(2)就变为经典的整数阶 KP 方程(1)。在求解方程(2)的多孤子解前, 首先证明以下定理。

**定理 2** 设  $u = u(t, x)$  是整数阶孤子方程

$$F\left(u, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial^n u}{\partial x^n}\right) = 0 \quad (3)$$

的一个  $n$ -孤子解, 则  $U = U\left(\frac{t^\alpha}{\alpha}, \frac{x^\beta}{\beta}\right)$  是适形分数阶方程

$$F(U, {}^K D_t^\alpha U, {}^K D_x^\beta U, ({}^K D_x^\beta)^2 U, \dots, ({}^K D_x^\beta)^n U) = 0 \quad (4)$$

的一个  $n$ -孤子解, 其中:  ${}^K D_t^\alpha$  是适形分数阶微分算子, 且  $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1, ({}^K D_t^\alpha)^2 \neq {}^K D_t^{2\alpha}$ 。

**证明** 对  $u$  作如下变换:

$$u(t, x) = U(\tau, \chi), \chi = \frac{x^\beta}{\beta}, \tau = \frac{t^\alpha}{\alpha}.$$

由定理 1 中的法则 4) 知:

$${}^K D_t^\alpha U = t^{1-\alpha} U_t = t^{1-\alpha} \cdot \frac{\alpha t^{\alpha-1}}{\alpha} U_\tau = U_\tau,$$

$${}^K D_x^\beta U = x^{1-\beta} U_x = x^{1-\beta} \cdot \frac{\beta x^{\beta-1}}{\beta} U_\chi = U_\chi,$$

$$({}^K D_x^\beta)^n U = ({}^K D_x^\beta)^{n-1} (x^{1-\beta} U_x) = ({}^K D_x^\beta)^{n-1} U_\chi = \dots = \frac{\partial^n U}{\partial \chi^n}.$$

将上述各式代入方程(4)可得:

$$F\left(U, \frac{\partial U}{\partial \tau}, \frac{\partial U}{\partial \chi}, \frac{\partial^2 U}{\partial \chi^2}, \dots, \frac{\partial^n U}{\partial \chi^n}\right) = 0. \quad (5)$$

显然方程(5)与方程(3)除了自变量不同以外, 形式上是一样的, 因此它们有相似结构的  $n$ -孤子解。证毕

### 2.1 分数阶 KP 方程的 1-孤子解

接下来将利用 Hirota 的双线性方法求 2+1 维分数阶 KP 方程(2)的 1-孤子解。对  $u$  做如下变换:

$$u(t, x, y) = U(\tau, \chi, \gamma), \tau = \frac{t^\alpha}{\alpha}, \chi = \frac{x^\beta}{\beta}, \gamma = \frac{y^\beta}{\beta}. \tag{6}$$

将式(6)代入 2+1 维分数阶 KP 方程(2)中,由定理 2 得:

$$(U_\tau + U_{xxx} + 6UU_\chi)_\chi + 3\sigma^2 U_{\gamma\gamma} = 0. \tag{7}$$

令

$$U(\tau, \chi, \gamma) = 2(\ln f(\tau, \chi, \gamma))_{\chi\chi},$$

将上式代入式(7)中,用双线性方法得到:

$$(D_\tau D_\chi + D_\chi^4 + 3\sigma^2 D_\gamma^2) f \cdot f = 0, \tag{8}$$

其中: $D_\tau$  是双线性微分算子。假设  $f$  可以展成  $\epsilon$  的幂级数形式:

$$f = 1 + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots + \epsilon^n f^{(n)} + \dots.$$

把上式代入式(8)中,有:

$$f_{\tau\chi}^{(1)} + f_{xxx}^{(1)} + 3\sigma^2 f_{\gamma\gamma}^{(1)} = 0, \tag{9}$$

$$2(f_{\tau\chi}^{(2)} + f_{xxx}^{(2)} + 3\sigma^2 f_{\gamma\gamma}^{(2)}) = -(D_\tau D_\chi + D_\chi^4 + 3\sigma^2 D_\gamma^2) f^{(1)} \cdot f^{(1)}, \tag{10}$$

$$f_{\tau\chi}^{(3)} + f_{xxx}^{(3)} + 3\sigma^2 f_{\gamma\gamma}^{(3)} = -(D_\tau D_\chi + D_\chi^4 + 3\sigma^2 D_\gamma^2) f^{(1)} \cdot f^{(2)}, \tag{11}$$

.....

在式(9)中取  $f^{(1)}$  为:

$$f^{(1)} = e^{\xi_1}, \xi_1 = k_1(\omega_1\tau + \chi + p_1\gamma), \omega_1 = -k_1^2 - 3\sigma^2 p_1^2,$$

代入式(10)、(11)易得  $f^{(2)} = f^{(3)} = \dots = f^{(n)} = \dots = 0$ , 则  $f$  可以截断为有限项的和:

$$f = 1 + e^{\xi_1}, \xi_1 = k_1(\omega_1\tau + \chi + p_1\gamma),$$

其中: $k_1, \omega_1$  和  $p_1$  为任意常数,且  $\omega_1 = -k_1^2 - 3\sigma^2 p_1^2$ 。由此得到了 2+1 维整数阶 KP 方程(7)的 1-孤子解:

$$U(\tau, \chi, \gamma) = 2(\ln f(\tau, \chi, \gamma))_{\chi\chi} = \frac{2k_1^2 e^{\xi_1}}{(1 + e^{\xi_1})^2} = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \frac{\xi_1}{2},$$

其中: $\xi_1 = k_1(\omega_1\tau + \chi + p_1\gamma)$ ,  $\omega_1 = -k_1^2 - 3\sigma^2 p_1^2$  且  $k_1, \omega_1$  和  $p_1$  是任意常数。

同时由变换(6)可以得到 2+1 维适形分数阶 KP 方程(2)的 1-孤子解:

$$u = \frac{k_1^2}{2} \operatorname{sech}^2 \left[ \frac{k_1}{2} \left( \omega_1 \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{x^\beta}{\beta} + p_1 \frac{y^\beta}{\beta} \right) \right].$$

为了比较整数阶 KP 方程的孤子解与分数阶 KP 方程的孤子解,本文用 Maple 软件分别画出了对应的波形图(图 1),其中:

$$k_1 = 0.6, \omega_1 = -5, p_1 = 1, \alpha = 0.25, \beta = 0.75, \sigma^2 = 1/3.$$

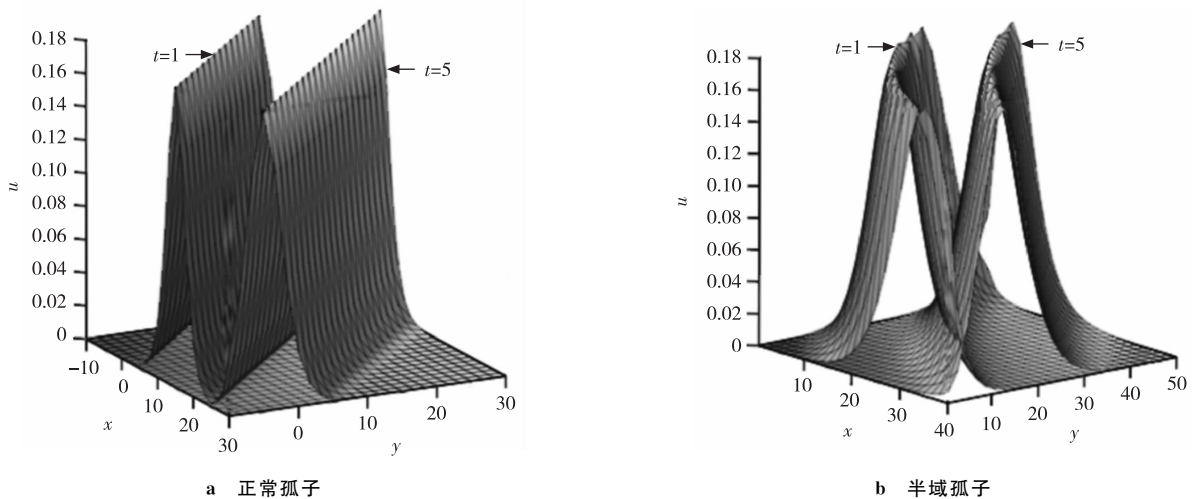


图 1 正常孤子解和半域孤子解的三维图

Fig. 1 The 3D-graphs of soliton solution and semi-domain soliton solution

众所周知,  $2+1$  维整数阶系统的所有孤立波都在整个空间内传播, 而且是双向传播(图 1a)。但由于分数阶系统的自变量必须为正值( $t>0, x>0, y>0$ ), 所以  $2+1$  维分数阶系统的孤立波仅在右半空间内传播, 而且是单向传播(图 1b), 因此称分数阶系统的孤子为半域孤子(或分数阶孤波)。同时从图 1 还可以看出, 时间相同时, 在传播速度方面, 分数阶孤立波慢于整数阶孤立波, 但二者的振幅没有变化。此外, 分数阶的孤子比整数阶的孤子要“胖”, 而且它们的传播范围也不同, 由此可见整数阶系统的孤子与分数阶系统的孤子存在一些差异。

此外, 在解的渐进性行为方面, 当  $x \rightarrow +\infty, y > 0 \rightarrow +\infty$  时, 存在  $u \rightarrow 0$ , 所以  $u=0$  是分数阶孤子解和整数阶孤子解的渐进平面。又由于整数阶孤子解的变量  $\xi_i = k_i(\omega_i t + x + p_i y)$  是  $t, x, y$  的线性函数, 所以整数阶孤子的波峰成直线型, 但分数阶孤子解的变量  $\xi_i = k_i \left( \omega_i \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{x^\beta}{\beta} + p_i \frac{y^\beta}{\beta} \right)$  是  $t, x, y$  的非线性函数, 所以分数阶孤子的波峰成曲线型, 这可以从图 1a、b 看出来。

## 2.2 $2+1$ 维分形阶 KP 方程的多孤子解

接下来求解  $2+1$  维分数阶 KP 方程的多孤子解。由式(9)可知,  $f^{(1)}$  也可以取为:

$$f^{(1)} = e^{\xi_1} + e^{\xi_2}, \xi_i = k_i(\omega_i \tau + \chi + p_i \gamma), \omega_i = -k_i^2 - 3\sigma^2 p_i^2 (i=1, 2), e \text{ 为自然常数。}$$

将上述式子代入式(10)可得:

$$f^{(2)} = e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}}, e^{a_{12}} = \frac{(k_1 - k_2)^2 - \sigma^2 (p_1 - p_2)^2}{(k_1 + k_2)^2 - \sigma^2 (p_1 - p_2)^2},$$

再将上式代入式(10)、(11)可得  $f^{(3)} = f^{(4)} = \dots = f^{(n)} = \dots = 0$ , 则  $f$  可以截断为有限项的和, 即:

$$f = 1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}},$$

所以  $2+1$  维整数阶 KP 方程(7)的 2-孤子解为:

$$U = 2(\ln(1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}}))_{xx} = \frac{2(k_1^2 e^{\xi_1} + k_2^2 e^{\xi_2} + (k_1 + k_2)^2 e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}})}{1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}}} - \frac{2(k_1 e^{\xi_1} + k_2 e^{\xi_2} + (k_1 + k_2) e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}})^2}{(1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}})^2}.$$

同时由变换(6)可得  $2+1$  维分数阶 KP 方程(2)的 2-孤子解:

$$u(\tau, \chi, \gamma) = \frac{2(k_1^2 e^{\eta_1} + k_2^2 e^{\eta_2} + (k_1 + k_2)^2 e^{\eta_1 + \eta_2 + a_{12}})}{1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + a_{12}}} - \frac{2(k_1 e^{\eta_1} + k_2 e^{\eta_2} + (k_1 + k_2) e^{\eta_1 + \eta_2 + a_{12}})^2}{(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_1 + \eta_2 + a_{12}})^2},$$

其中:  $\eta_i = k_i \left( \omega_i \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{x^\beta}{\beta} + p_i \frac{y^\beta}{\beta} \right), i=1, 2$ 。

为了比较分数阶 KP 方程的 2-孤子和整数阶 KP 方程的 2-孤子的动力学行为, 本文用 Maple 软件分别画出了它们的波形图(图 2), 其中 2 个图的参数取值为  $k_1=0.5, k_2=0.4, \omega_1=-1.25, \omega_2=-1.26, p_1=1, p_2=1, \alpha=0.25, \beta=0.75$ 。

在  $2+1$  维整数阶系统中, 多孤子总是在整个空间上传播, 并且在传播过程中, 高波总是可以超过矮波, 如图 2a、b 所示。但在  $2+1$  维分数阶系统中, 多孤子仅在右半空间传播( $t>0, x>0, y>0$ ), 且高波总是在矮波之前, 高波超过矮波的现象从未发生, 如图 2c、d 所示。就传播速度而言, 分数阶 2-孤子的整体播速度与分数阶 1-孤子的播速度有明显不同, 可能是因为 2 个波的相互作用影响了它们的整体传播速度。另外, 在整数阶系统或分数阶系统中, 除了整数阶的 2 个波的碰撞过程外, 高波和矮波的振幅都保持不变, 并且随着时间的增加, 两波之间的间隔也随之扩大。同样地, 当  $x \rightarrow +\infty, y > 0 \rightarrow +\infty$  时, 总有  $u \rightarrow 0$ , 所以  $u=0$  也是分数阶 2-孤子解和整数阶 2-孤子解的渐进平面。

继续以上推导过程和处理方法, 可以得到  $2+1$  维整数阶 KP 方程(7)的 3-孤子解和  $2+1$  维分数阶 KP 方程(2)的 3-孤子解:

$$U(\tau, \chi, \gamma) = 2(\ln(1 + e^{\xi_1} + e^{\xi_2} + e^{\xi_3} + e^{\xi_1 + \xi_2 + a_{12}} + e^{\xi_1 + \xi_3 + a_{13}} + e^{\xi_2 + \xi_3 + a_{23}}))_{xx},$$

$$u(t, x, y) = 2(\ln(1 + e^{\eta_1} + e^{\eta_2} + e^{\eta_3} + e^{\eta_1 + \eta_2 + a_{12}} + e^{\eta_1 + \eta_3 + a_{13}} + e^{\eta_2 + \eta_3 + a_{23}}))_{xx},$$

其中:  $\eta_i = k_i \left( \omega_i \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{x^\beta}{\beta} + p_i \frac{y^\beta}{\beta} \right), e^{a_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2 - \sigma^2 (p_i - p_j)^2}{(k_i + k_j)^2 - \sigma^2 (p_i - p_j)^2}, 1 \leq i < j \leq 3。$

通过归纳法可以得到 2+1 维整数阶 KP 方程(7)的  $n$ -孤子解:

$$U(\tau, \lambda, \gamma) = 2 \left[ \ln \left( \sum_{k=0,1} e^{\sum_{i=1}^n k_i \xi_i + \sum_{1 \leq i < j}^n k_i k_j a_{ij}} \right) \right]_{xx},$$

其中:对  $k$  的求和是取  $k_i = 0$  或  $1 (i=1, 2, \dots, n)$  的所有可能组合,且

$$e^{a_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2 - \sigma^2 (p_i - p_j)^2}{(k_i + k_j)^2 - \sigma^2 (p_i - p_j)^2}, 1 \leq i < j \leq n。$$

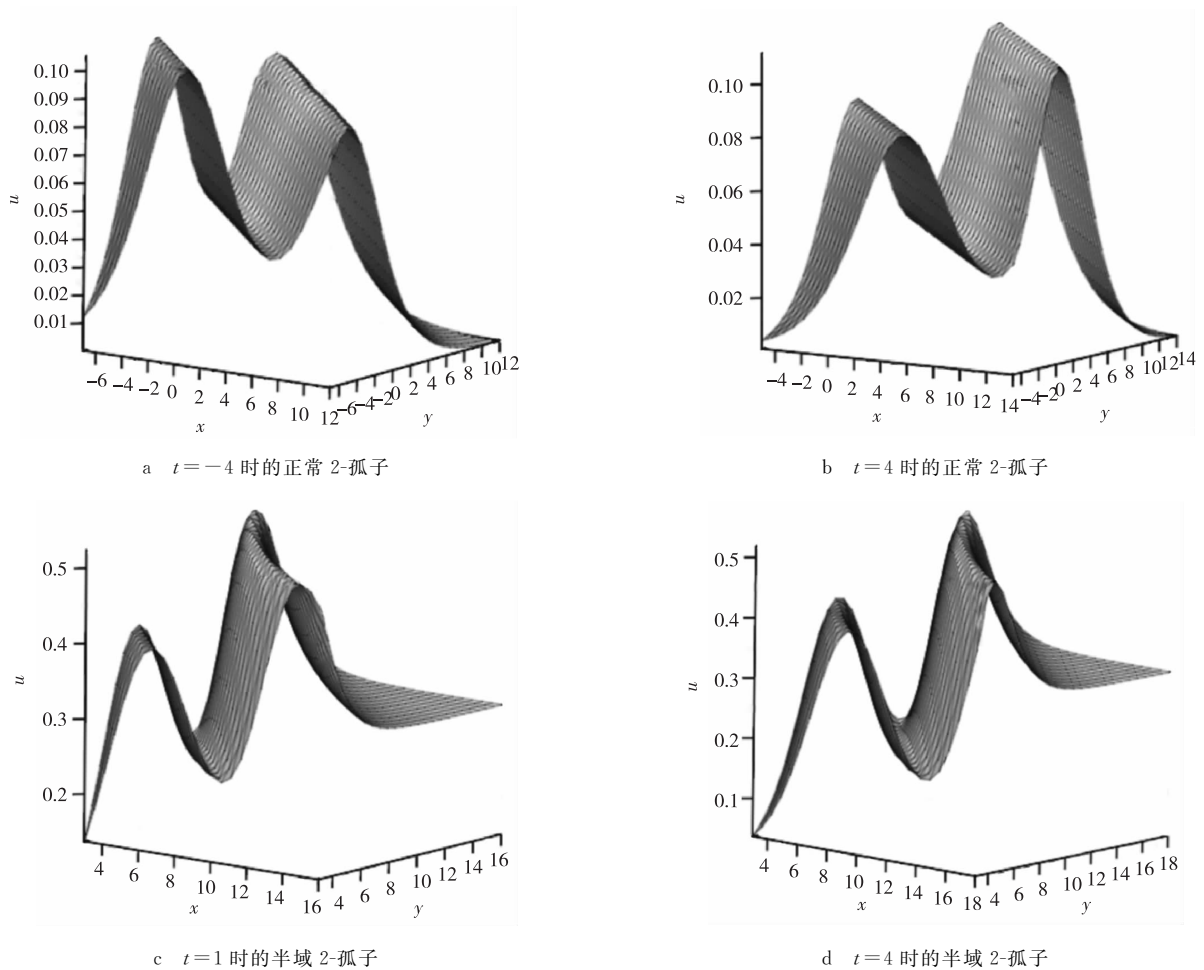


图 2 正常 2-孤子解和半域 2-孤子解的三维图

Fig. 2 The 3D-graphs of 2-soliton solution and semi-domain 2-soliton solution

同时,由变换(6)可得分数阶 KP 方程(2)的  $n$ -孤子解:

$$u(t, x, y) = 2 \left[ \ln \left( \sum_{k=0,1} e^{\sum_{i=1}^n k_i \eta_i + \sum_{1 \leq i < j}^n k_i k_j a_{ij}} \right) \right]_{xx},$$

其中:对  $k$  的求和是取  $k_i = 0$  或  $1 (i=1, 2, \dots, n)$  的所有可能组合,且

$$\eta_i = k_i \left( \omega_i \cdot \frac{t^\alpha}{\alpha} + \frac{x^\beta}{\beta} + p_i \cdot \frac{y^\beta}{\beta} \right), e^{a_{ij}} = \frac{(k_i - k_j)^2 - \sigma^2 (p_i - p_j)^2}{(k_i + k_j)^2 - \sigma^2 (p_i - p_j)^2}, 1 \leq i < j \leq n。$$

### 3 结论

研究发现,适形分数阶孤子方程的孤立波可以通过分数阶复变换法对变量进行直接变换即可得到,而不必

单独求解适形分数阶微分方程。在 1-孤子中,分数阶孤立波的振幅和整数阶孤立波的振幅都没有变化,但分数阶孤立波的传播速度比整数阶孤立波慢,且分数阶孤立波比整数阶的孤立波要“胖”,它们的传播速度和传播范围也不尽相同。在 2-孤子中,分数阶孤立波与整数阶孤立波的振幅也都不发生变化,但整数阶孤子存在高波超过矮波的情况,分数阶孤子则不存在高个的波超过矮个的波的现象。可见分数阶偏微分方程的孤子解与整数阶偏微分方程的孤子解在动力学行为方面存在一些差异。

#### 参考文献:

- [1] LEIBNIZ G W. *Mathematische schriften*[M]. Chicago:Georg Olms,1860.
- [2] JUMARIE G. Modified Riemann-Liouville derivative and fractional Talor series of non-differentiable functions further results [J]. *Computers and Mathematics with Applications*,2006,51(9/10):1367-1376.
- [3] JUMARIE G. Fractional partial differential equations and modified Riemann-Liouville derivative new methods for solution[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*,2007,24(1/2):31-48.
- [4] JUMARIE G. Cauchy's integral formula via the modified Riemann-Liouville derivative for analytic functions of fractional order [J]. *Applied Mathematics Letters*,2010,23(12):1444-1450.
- [5] ZAYED E M E, AMER Y A, SHOHIB R M A. The fractional complex transformation for nonlinear fractional partial differential equations in the mathematical physics[J]. *Journal of the Association of Arab Universities for Basic and Applied Sciences*,2016,19:59-69.
- [6] LI Z B, ZHU W H, HE J H. Exact solutions of time-fractional heat conduction equation by the fractional complex transform[J]. *Thermal Science*,2012,16(2):335-338.
- [7] LI Z B, HE J H. Fractional complex transform for fractional differential equations[J]. *Mathematical & Computational Applications*,2010,15(5):970-973.
- [8] AHMET B, ÖZKAN G, ESIN A, YUSUF P. Functional variable method for the nonlinear fractional differential equations[C]// Van HAUTEGEM, ROGIEST K, BRUNEEL W, et al. *Proceeding of the International Coference on Numerical Analysis and Applied Mathematics*,2014. New York:AIP Publishing LLC,2015.
- [9] HE J H, ELAGAN S K, LI Z B. Geometrical explanation of the fractional complex transform and derivative chain rule for fractional calculus[J]. *Physical Letters A*,2012,376(4):257-259.
- [10] TARASOV V E. On chain rule for fractional derivatives[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*,2016,30(1/2/3):1-4.
- [11] RUI W G. Applications of homogenous balanced principle on investigating exact solutions to a series of time fractional nonlinear PDEs[J]. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*,2017,47:253-266.
- [12] KHALIL R, AL HORANI M, YOUSEF A, et al. A new definition of fractional derivative[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*,2014,264:65-70.
- [13] ABDELJAWAD T. On conformable fractional calculus[J]. *Journal of Computational and Applied Mathematics*,2015,279:57-66.
- [14] EL-AJOU A, OQIELAT M N, AL-ZHOUR Z, et al. Solitary solutions for time-fractional nonlinear dispersive PDEs in the sense of conformable fractional derivative[J]. *Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science*,2019,29(9):093102.
- [15] LIANG J L, TANG L K, XIA Y H, et al. Bifurcations and exact solutions for a class of MKdV equations with the conformable fractional derivative via dynamical system method[J]. *International Journal of Bifurcation and Chaos*,2020,30(1):2050004.
- [16] OSMAN M S, REZAZADEH H, ESLAMI M. Traveling wave solutions for  $(3 + 1)$  dimensional conformable fractional Zakharov-Kuznetsov equation with power law nonlinearity[J]. *Nonlinear Engineering*,2019,8(1):559-567.
- [17] REZAZADEH H, KHODADAD F S, MANAFIAN J. New structure for exact solutions of nonlinear time fractional Sharma-Tasso-Olver equation via conformable fractional derivative[J]. *Applications and Applied Mathematics: An International Journal (AAM)*,2017,12(1):405-414.
- [18] RUI W G. Comments on whether nonlinear fractional partial differential equations have soliton solutions[J]. *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*,2022,5:100396.

## Semi-Domain Soliton Solution of the $(2+1)$ -Dimensional KP Equation under the Conformable Fractional Derivative

HE Weijun, WU Chun

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

**Abstract:** To study the multi-soliton solutions of the fractional order soliton equation under the definition of conformable fractional derivatives. By using the fractional order complex transformation method, the fractional order soliton equation is transformed into an integer order soliton equation, and then solved by the traditional bilinear method to obtain the multi-soliton solution of the fractional order soliton equation. The 1-soliton solution, the explicit expression of the 2-soliton solution, and the recursive formula of the arbitrary  $n$ -soliton solution of the fractional KP equation are obtained, the integer-order soliton and the corresponding fractional-order soliton are compared, and the interaction of the two solitons in the propagation process of 2-soliton is discussed. Through comparison, it is found that there are some differences in dynamic behavior between the soliton solution of the fractional KP equation defined by the conformable fractional derivative and the soliton solution of the KP equation defined by the integer order derivative.

**Keywords:** conformable fractional derivative; nonlinear fractional partial differential equations; fractional order  $(2+1)$ - dimensional KP equation; semi-domain soliton solution

(责任编辑 黄颖)