DOI:10.11721/cqnuj20230603

度量空间中拟双曲映射与拟相似映射的一个等价刻画*

刘红军, 杨　倩, 梁　茜
(贵州师范大学 数学科学学院, 贵阳 550025)

摘要: 根据拟双曲映射和拟相似映射的基本概念及性质,刻画拟双曲映射和拟相似映射在度量空间中的等价问题。利用拟双曲度量作为研究的重要工具,结合最大伸缩和最小伸缩的概念与拟双曲映射之间的关系,得到了拟双曲映射和拟相似映射在度量空间中是等价的。研究结果表明:假设 X 是 c_1-拟凸度量空间,Y 是 c_2-拟凸度量空间,且 $G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 是两个子区域。如果 $f:G\to G'$ 是一个同胚映射,则 f 是一个 M-拟双曲映射当且仅当 f 和 f^{-1} 都是同胚(M_1,q)-拟相似映射,其中 $M_1=(c_1c_2M^2(1-\alpha q)^{-M-1})^{\frac{\alpha}{1-\alpha q}+1}$,$q<\min\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2}\right\}$,$\alpha=\max\{c_1,c_2\}$。

关键词: 拟双曲度量;拟双曲映射;拟相似映射;度量空间

中图分类号: O174.55　　**文献标志码:** A　　**文章编号:** 1672-6693(2023)06-0072-06

为了讨论高维拟共形映射中的黎曼映射定理,Gehring 等人[1]于 1976 年给出了欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的拟双曲度量的定义。即,设 G 是度量空间 X 中的真子区域,γ 是 G 中的一条可求长曲线,则曲线 γ 的拟双曲长度定义为 $l_{k_G}(\gamma)=\int_\gamma \frac{\mathrm{d}s}{\delta_G(x)}$。对于任意的 $x,y\in G$,它们之间的拟双曲距离定义为 $k_G(x,y)=\inf\limits_{\gamma} l_{k_G}(\gamma)$,其中下确界取遍 G 中所有连接 x 与 y 的可求长弧 γ,称 k_G 为 G 中的拟双曲度量,同时称(G,k_G)是按照拟双曲距离 $k_G(x,y)$ 构成的拟双曲度量空间。关于拟双曲度量空间的更多文献参见[2-12]。

1　基本概念

X 和 Y 表示两个度量空间,设 $G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 是两个子区域。对任意的 $x,y\in X$,记 x,y 之间的距离为 $|x-y|$,点 x 到 $X\backslash G$ 的距离记为 $\delta_G(x)$,即 $\delta_G(x)=\mathrm{dist}(x,X\backslash G)$。对任意的 $x\in X$,$r>0$,令 $B(x,r)=\{y\in X:|y-x|<r\}$表示以 x 为中心和 r 为半径的度量开球,$\overline{B}(x,r)$和$\partial B(x,r)$分别称为度量开球 $B(x,r)$的闭包和边界。

定义 1　设 $M\geqslant 1$,如果 $f:G\to G'$是一个同胚映射,对任意的 $x,y\in G$ 都有:
$$M^{-1}|y-x|\leqslant|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|,$$
则称 f 为双边 M-Lipschitz 映射。

根据定义 1,引入 M-拟双曲映射的概念[13-16]。

定义 2　设 $M\geqslant 1$,如果 $f:G\to G'$是一个同胚映射,对于任意的 $x,y\in G$,都有:
$$M^{-1}k_G(x,y)\leqslant k_{G'}(f(x),f(y))\leqslant Mk_G(x,y),$$
则称 $f:G\to G'$为 M-拟双曲映射。

注 1　根据定义 1 和定义 2 可知,拟双曲映射是拟双曲度量空间中的双边 Lipschitz 映射。

在研究拟双曲映射和拟相似映射的相关结论时,还需要引入最大伸缩和最小伸缩的概念,并在度量空间中得到具体证明和应用[7,13-15]。

---

* **收稿日期:** 2022-06-08　**修回日期:** 2023-11-01　**网络出版时间:** 2023-06-12T09:44

资助项目: 国家自然科学基金面上项目(No. 11671057);贵州省科学技术基金(No. 黔科合基础[2020]1Y003);贵州师范大学博士科研启动基金(No. 11904/0517078)

第一作者简介: 刘红军,男,副教授,博士,研究方向为拟共形映射与度量空间上的分析,E-mail: hongjunliu@gznu.edu.cn

网络出版地址: https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230609.1339.004

定义 3　设 $f:X\to Y$ 是一个同胚映射，点 x 是 X 中的非孤立点。记：

$$L(x,f)=\lim_{y\to x}\sup\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|},\ l(x,f)=\lim_{y\to x}\inf\frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}。$$

显然有 $0\leqslant l(x,f)\leqslant L(x,f)\leqslant\infty$，其中：$L(x,f)$，$l(x,f)$分别称为 f 在点 x 的最大伸缩和最小伸缩。

注 2　1）假若 $f:X\to Y$ 是一个同胚映射，且 x 是 X 中的非孤立点，则有：

$$L(x,f)=\frac{1}{l(f(x),f^{-1})},\ l(x,f)=\frac{1}{L(f(x),f^{-1})}。$$

2）假若 $f:X\to Y$ 和 $g:Y\to Z$ 都是连续的，且 x 和 $f(x)$分别是 X 和 Y 中的非孤立点，则有：

$$L(x,g\circ f)\leqslant L(x,f)\cdot L(f(x),g),\ l(x,g\circ f)\geqslant l(x,f)\cdot l(f(x),g)。$$

定义 4　假设 $f:G\to G'$是一个同胚映射。令 $0<q<1$，$M\geqslant 1$，对于任意的 $x,y\in G$，如果 $|x-y|<q\delta_G(x)$，有：

$$L(x,f)\leqslant Ml(y,f),\ L(y,f)\leqslant Ml(x,f),$$

则称 f 为一个同胚(M,q)-拟相似映射。

2　重要的引理

本节还需引入拟凸度量空间的概念。设 $c\geqslant 1$，对 X 中的任意两点 x,y 都能被一条曲线 γ 连接，且 $l(\gamma)\leqslant c|x-y|$，则称度量空间 X 是一个 c-拟凸的。同时，可以对拟凸度量空间[10,14-16]与伪度量空间[17]的概念加以区别。

利用拟凸度量空间的性质，将文献[14]中定理 3.7 的结论推广到适合的度量空间中，得到如下结论。

引理 1　设 X 是 c-拟凸度量空间，$G\subset X$ 是 X 的子区域，则：

1）对于任意的 $x,y\in G$，都有 $k_G(x,y)\geqslant\ln\dfrac{\delta_G(y)}{\delta_G(x)}$；

2）如果任意的 $x,y\in G$，且 $|x-y|<q\delta_G(x)$，其中 $q<\dfrac{1}{c}$，则有 $k_G(x,y)\leqslant\ln\dfrac{1}{1-cq}$。

此结论的证明方法与文献[14]中定理 3.7 的证明方法相似，主要不同在于对 Banach 空间中直线段用拟凸度量空间中的曲线弧段来代替，并应用了拟凸度量空间的性质，因此不再重复。

引理 2[13-14]　假设 $f:X\to Y$ 是一个同胚映射，如果 f 是 M-Lipschitz 映射，则对任意的非孤立点 $x\in X$ 都有 $L(x,f)\leqslant M$。反之，如果 X 是 c-拟凸度量空间，且对任意的 $x\in X$ 都有 $L(x,f)\leqslant M$，则 f 是 cM-Lipschitz 映射。

引理 3[16]　设 X 是 c_1-拟凸度量空间，Y 是 c_2-拟凸度量空间。假如 $G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 是两个子区域，且 $f:G\to G'$是一个同胚映射，有：

1）如果 f 是一个 M-拟双曲映射，则对任意的 $x\in G$，都有：

$$L(x,f)\delta_G(x)\leqslant c_1M\delta_{G'}(f(x)),\ L(f(x),f^{-1})\delta_{G'}(f(x))\leqslant c_2M\delta_G(x);$$

2）相反地，如果对任意的 $x\in G$，都有：

$$L(x,f)\delta_G(x)\leqslant c_1M\delta_{G'}(f(x)),\ L(f(x),f^{-1})\delta_{G'}(f(x))\leqslant c_2M\delta_G(x),$$

则 f 是一个 $2c_1c_2M$-拟双曲映射。

引理 4　设 X 是 c_1-拟凸度量空间，Y 是 c_2-拟凸度量空间，$G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 是两个子区域，且 $f:G\to G'$是一个同胚映射。如果对于任意的 $x,y\in G$ 有：

$$|x-y|<q\delta_G(x),\ q<\min\left(\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2}\right),$$

且：

$$L(x,f)\leqslant Ml(y,f),\ L(y,f)\leqslant M'l(x,f),\tag{1}$$

则上述 2 个不等式是相互等价的，其中 M 和 M'互相依赖且与 c_1，c_2，q 有关。

证明 根据对称性,只需要证明:对于任意的 $x,y\in G$,$|x-y|<q\delta_G(x)$,$q<\frac{1}{c_1}$。

如果同胚映射 f 满足 $L(x,f)\leqslant Ml(y,f)$,则有 f 满足 $L(y,f)\leqslant M'l(x,f)$,其中 $M'=M'(c_1,q,M)$。

因为 X 是一个 c_1-拟凸度量空间,对于任意的 $x,y\in G$,都存在可求长曲线 $\gamma\subset X$ 连接 x,y,且满足 $l(\gamma)\leqslant c_1|x-y|$。

设 $|x-y|<q\delta_G(x)$,$q<\frac{1}{c_1}$。令 $t=\left(\frac{q(1-c_1q)}{c_1}\right)\delta_G(x)$,设 $m\in\mathbf{N}_+$ 是唯一的 1 个正整数使得:

$$(m-1)t\leqslant|x-y|<mt。$$

设 $\gamma_s:[0,l(\gamma)]\to\gamma$ 是曲线 γ 的弧长参数[14-16,18],且 $\gamma_s(0)=y$。现在将 $[0,l(\gamma)]$ 等分成 m 个小区间,即插入连续点 $0=t_0<t_1<\cdots<t_{m-1}<t_m=l(\gamma)$,使得对任意的 $0\leqslant j\leqslant m$,都有 $y_j=\gamma_s(t_j)$,其中 $y=y_0$,$x=y_m$。对于任意的 $1\leqslant j\leqslant m$,有:

$$|y_{i-1}-y_i|\leqslant l(\gamma|_{[y_{i-1},y_i]})=l(\gamma_s|_{[t_{i-1},t_i]})=|t_i-t_{i-1}|=\frac{l(\gamma)}{m}\leqslant\frac{c_1|x-y|}{m}<c_1t \tag{2}$$

和

$$\delta_G(y_{i-1})\geqslant\delta_G(x)-|x-y_{i-1}|\geqslant\delta_G(x)-l(\gamma|_{[x,y_{i-1}]})\geqslant\delta_G(x)-l(\gamma)\geqslant$$
$$\delta_G(x)-c_1|x-y|\geqslant\delta_G(x)-c_1q\delta_G(x)=(1-c_1q)\delta_G(x)=\frac{c_1}{q}t。\tag{3}$$

结合式(2)、(3),可以得到 $|y_{i-1}-y_i|\leqslant q\delta_G(y_{i-1})$。再根据已知条件,又可以得到:

$$L(y_{i-1},f)\leqslant Ml(y_i,f)\leqslant ML(y_i,f)。\tag{4}$$

由不等式(4)可得:

$$L(y,f)=L(y_0,f)\leqslant ML(y_1,f)\leqslant M^2L(y_2,f)\leqslant\cdots\leqslant$$
$$M^{m-1}L(y_{m-1},f)\leqslant M^m l(y_m,f)=M^m l(x,f)。\tag{5}$$

又因为 $(m-1)t\leqslant|x-y|<mt$,所以有:

$$m\leqslant\frac{|x-y|}{t}+1\leqslant\frac{q\delta_G(x)}{\left(\frac{q(1-c_1q)}{c_1}\right)\delta_G(x)}+1=\frac{c_1}{1-c_1q}+1。\tag{6}$$

因此,再联立不等式(5)和(6),可得 $L(y,f)\leqslant M'l(x,f)$,其中 $M'=M^{\frac{c_1}{1-c_1q}+1}$。 证毕

3 主要结论及证明

芬兰著名数学家 Väisälä[2] 证明了 Banach 空间中拟双曲映射与拟相似映射在一定条件下是等价的。因此,本文考虑了如下的问题:在适合的度量空间中,拟双曲映射与拟相似映射仍然是等价的。

定理 1 设 X 是 c_1-拟凸度量空间,Y 是 c_2-拟凸度量空间,$c_i\geqslant1(i=1,2)$,且 $G\subset X$ 和 $G'\subset Y$ 是两个子区域。如果 $f:G\to G'$ 是一个同胚映射,则 f 是一个 M-拟双曲映射当且仅当 f 和 f^{-1} 都是同胚 (M_1,q)-拟相似映射,其中 $q<\min\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2}\right\}$,$M$ 和 M_1 互相依赖且与 c_1、c_2、q 有关,且:

$$M_1=(c_1c_2M^2(1-\alpha q)^{-M-1})^{\frac{\alpha}{1-\alpha q}+1},\alpha=\max\{c_1,c_2\}。$$

证明 必要性。假设 f 是一个 M-拟双曲映射,为了证明 f 和 f^{-1} 都是同胚 (M_1,q)-拟相似映射,由于对称性,仅需证明 f 是同胚 (M_1,q)-拟相似映射。而 f^{-1} 是同胚 (M_1,q)-拟相似映射则用相同的讨论方法证明即可。

令 $q<\frac{1}{c_1}$,对任意的 $x,y\in G$,使得 $|x-y|<q\delta_G(x)$。因为 f 是 M-拟双曲映射,由引理 3 的结论 1)可得:

$$L(x,f)\delta_G(x)\leqslant c_1M\delta_{G'}(f(x)) \tag{7}$$

和

$$L(f(y),f^{-1})\delta_{G'}(f(y))\leqslant c_2M\delta_G(y)。\tag{8}$$

于是，由式(8)和注 2 的 1)可以推得：

$$\delta_{G'}(f(y))\leqslant\frac{c_2M\delta_G(y)}{L(f(y),f^{-1})}\leqslant c_2M\delta_G(y)l(y,f)。\tag{9}$$

再结合式(7)、(9)可得：

$$L(x,f)\leqslant c_1c_2M^2\ \frac{\delta_G(y)\delta_{G'}(f(x))}{\delta_G(x)\delta_{G'}(f(y))}\cdot l(y,f)。\tag{10}$$

于是，根据 M-拟双曲映射的定义和引理 1 有：

$$\ln\frac{\delta_{G'}(f(x))}{\delta_{G'}(f(y))}\leqslant k_{G'}(f(x),f(y))\leqslant Mk_G(x,y)\leqslant M\ln\frac{1}{1-c_1q}。$$

进一步还可得：

$$\frac{\delta_{G'}(f(x))}{\delta_{G'}(f(y))}\leqslant\left(\frac{1}{1-c_1q}\right)^M。\tag{11}$$

又因为：

$$\delta_G(y)\leqslant\delta_G(x)+|x-y|\leqslant(1+q)\delta_G(x)<\frac{\delta_G(x)}{1-q}<\frac{\delta_G(x)}{1-c_1q}。\tag{12}$$

联立不等式(11)、(12)，可得：

$$\frac{\delta_G(y)\delta_{G'}(f(x))}{\delta_G(x)\delta_{G'}(f(y))}\leqslant(1-c_1q)^{-M-1}。\tag{13}$$

于是，再由不等式(10)、(13)可得 $L(x,f)\leqslant c_1c_2M^2(1-c_1q)^{-M-1}l(y,f)$。根据引理 4 的结论，有：

$$L(y,f)\leqslant(c_1c_2M^2(1-c_1q)^{-M-1})^{\frac{c_1}{1-c_1q}+1}l(x,f)。$$

因此，得到 f 是同胚(M_1',q)-拟相似映射，其中 $M_1'=(c_1c_2M^2(1-c_1q)^{-M-1})^{\frac{c_1}{1-c_1q}+1}$。

由于对称性，同理可得 f^{-1} 是同胚(M_1'',q)-拟相似映射，其中：$M_1''=(c_1c_2M^2(1-c_2q)^{-M-1})^{\frac{c_2}{1-c_2q}+1}$。

因此，可得 f 和 f^{-1} 都是同胚(M_1,q)-拟相似映射，其中：

$$M_1=\max\{M_1',M_1''\}=(c_1c_2M^2(1-\alpha q)^{-M-1})^{\frac{\alpha}{1-\alpha q}+1},q<\min\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2}\right\},\alpha=\max\{c_1,c_2\}。$$

充分性。假设 f 和 f^{-1} 是同胚(M_1,q)-拟相似映射，其中 $q<\min\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2}\right\}$，即对任意的 $x,y\in G$，$|x-y|<q\delta_G(x)$，有 $L(x,f)\leqslant M_1l(y,f)$，$L(y,f)\leqslant M_1l(x,f)$。

要证 f 是 M-拟双曲映射，其中 $M=\frac{2c_2M_1\alpha}{q}$，$\alpha=\max\{c_1,c_2\}$。由引理 3 的结论 2)可知，只需要证明如下的 2 个不等式：

$$L(x,f)\delta_G(x)\leqslant\frac{c_2M_1}{q}\delta_{G'}(f(x)),\tag{14}$$

$$L(f(x),f^{-1})\delta_{G'}(f(x))\leqslant\frac{c_2M_1}{q}\delta_G(x)。\tag{15}$$

再根据对称性，只需对式(14)进行证明。

令 $\tau=\frac{q\delta_G(x)L(x,f)}{c_2M_1}$，故接下来只需证明 $\delta_{G'}(f(x))\geqslant\tau$ 即可。

对任意的 $y\in\partial\overline{B}(x,q\delta_G(x))$，作可求长曲线 γ' 连接 $f(x)$、$f(y)$，使得 $\gamma'\subset f(\overline{B}(x,q\delta_G(x)))$。则对任意的 $z\in f^{-1}(\gamma')\subset\overline{B}(x,q\delta_G(x))$ 且 $z\neq y$，可得 $|x-z|<q\delta_G(x)$。根据已知条件 f 和 f^{-1} 是(M_1,q)-拟相似映射，以及最大伸缩和最小伸缩的性质，有：

$$L(f(z),f^{-1})=\frac{1}{l(z,f)}\leqslant\frac{M_1}{L(x,f)}。\tag{16}$$

因为 Y 是 c_2-拟凸度量空间,再利用引理2和不等式(16),以及 $z\in f^{-1}(\gamma')\subset G$ 的任意性,立即得到 f^{-1} 是 $c_2\left(\frac{M_1}{L(x,f)}\right)$-Lipschitz 映射,即 $|x-y|\leqslant\frac{c_2M_1|f(y)-f(x)|}{L(x,f)}$。故结合 $y\in\partial\overline{B}(x,q\delta_G(x))$ 可得:

$$q\delta_G(x)=|x-y|\leqslant\frac{c_2M_1|f(y)-f(x)|}{L(x,f)}。$$

进而可以推出:

$$|f(y)-f(x)|\geqslant\frac{q\delta_G(x)L(x,f)}{c_2M_1}=\tau。\tag{17}$$

因此,由于 $y\in\partial\overline{B}(x,q\delta_G(x))$ 的任意性,再结合 $f(\overline{B}(x,q\delta_G(x)))\subset G'$ 和不等式(17),故有:

$$\delta_{G'}(f(x))\geqslant\tau。$$

证毕

参考文献:

[1] GEHRING F W,PALKA B P. Quasiconformally homogeneous domains[J]. Journal d'Analyse Mathématique,1976,30:172-199.

[2] GEHRING F W,OSGOOD B G. Uniform domains and the quasi-hyperbolic metric[J]. Journal d'Analyse Mathématique,1979,36:50-74.

[3] MARTIN G J,OSGOOD B G. The quasihyperbolic metric and associated estimates on the hyperbolic metric[J]. Journal d'Analyse Mathématique,1986,47:37-53.

[4] BONK M,HEINONEN J,KOSKELA P. Uniformizing Gromov hyperbolic domains[J]. Astérisque,2001,270:1-99.

[5] KOSKELA P,NIEMINEN T. Quasiconformal removability and the quasihyperbolic metric[J]. Indiana University Mathematics Journal,2005,54(1):143-151.

[6] WANG X F,HUANG M Z,PONNUSAMY S,et al. Hyperbolic distance,λ-Apollonian metric and John disks[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae Mathematica,2007,32(2):371-380.

[7] BUCKLY S M,HERRON D A,XIE X D. Metric space inversions,quasihyperbolic distance,and uniform spaces[J]. Indiana University Mathematics Journal,2008,57(2):837-890.

[8] HUANG M Z,PONNUSAMY S,WANG X T,et al. Uniform domains,John domains and quasiisometry domains[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2008,343(1):110-126.

[9] LIU H J,HUANG X J. The properties of quasisymmetric mappings in metric spaces[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications,2016,435(2):1591-1606.

[10] 刘红军.度量空间中拟对称映射与拟双曲一致域的研究[J].数学学报(中文版),2020,63(5):537-544.
LIU H J. Quasisymmetric mappings and quasihyperbolic uniform domains in metric spaces[J]. Acta Mathematica Sinca,Chinese Series,2020,63(5):537-544.

[11] 周青山,李浏兰,李希宁.穿孔度量空间 Gromov 双曲性的几何特征[J].数学学报(中文版),2021,64(5):737-746.
ZHOU Q S,LI L L,LI X N. Geometric characterizations of Gromov hyperbolicity for punctured metric spaces[J]. Acta Mathematica Sinca,Chinese Series,2021,64(5):737-746.

[12] ZHOU Q S,LI Y X,RASILA A. A note on Väisälä's problem concerning free quasiconformal mappings[J]. Monatshefte für Mathematik volume,2021,196:607-616.

[13] VÄISÄLÄ J. Free quasiconformality in Banach spaces I[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica,1990,15:355-379.

[14] VÄISÄLÄ J. The free quasiworld: freely quasiconformal and related maps in Banach spaces[J]. Banach Center Publications,1999,48(1):55-118.

[15] HUANG X J,LIU H J,LIU J S. Local properties of quasihyperbolic mappings in metric spaces[J]. Annales Academiae Scientiarum Fennicae-Mathematica,2016,41:23-40.

[16] HUANG X J,LIU J S. Quasihyperbolic metric and quasisymmetric mappings in metric spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society,2015,367(9):6225-6246.

[17] 向长合,罗纳.伪度量空间中第七类压缩型映象的不动点定理[J].重庆师范大学学报(自然科学版),2015,32(3):68-71.

XIANG C H, LUO N. Fixed point theorem for the seventh class contraction type mappings in pseudo-metric space[J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science), 2015, 32(3): 68-71.

[18] VÄISÄLÄ J. Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings[J]. Lecture Notes in Mathematics, 1971, 229: 41-80.

An Equivalent Characterization of Quasihyperbolic Mappings and Quasisimilarity Mappings in Metric Spaces

LIU Hongjun, YANG Qian, LIANG Qian

(School of Mathematical Sciences, Guizhou Normal University, Guiyang 550025, China)

Abstract: Basing on the basic concepts and properties of quasihyperbolic mappings and quasisimilarity mappings, to describe the equivalence problem of quasihyperbolic mappings and quasisimilarity mappings in metric space. Using quasihyperbolic metric as main tool to study, the relation between the concepts of maximal stretching and minimal stretching and quasihyperbolic mappings is discussed. It is found that quasihyperbolic mappings and quasisimilarity mappings are equivalent in metric space. The result of research shows that: let be a quasiconvex metric space, Y be a c_2-quasiconvex metric space, and let $G\subset X$ and $G'\subset Y$ be two domains. Suppose that $f:G\to G'$ is a homeomorphism, then f is a M-quasihyperbolic mapping if and only if f and f^{-1} are homeomorphism (M_1,q)-quasisimilarity mappings, where $M_1=(c_1c_2M^2(1-\alpha q)^{-M-1})^{\frac{\alpha}{1-\alpha q}+1}$, $q<\min\left\{\frac{1}{c_1},\frac{1}{c_2}\right\}$, $\alpha=\max\{c_1,c_2\}$.

Keywords: quasihyperbolic metric; quasihyperbolic mapping; quasisimilarity mapping; metric space

(责任编辑 黄 颖)