运筹学与控制论

DOI:10.11721/cqnuj20240111

多共同工期分配调度问题算法研究*

包　晗，吕丹阳，王吉波
(沈阳航空航天大学 理学院，沈阳 110136)

摘要:为确定所有工件的多个共同工期以及工件的最优调度序列，最小化提前惩罚、延误惩罚和公共工期分配的加权和，利用位置权重与处理时间的匹配过程来获得最优解。对此问题给出了最优解满足的性质，当分配给共同工期的工件个数为给定常数时该问题可解。该问题是多项式可解的，并给出了具体求解算法。

关键词:调度;提前/延误惩罚;多项式时间算法;单机;多共同工期
中图分类号:O221.6　　**文献标志码**:A　　**文章编号**:1672-6693(2024)01-0008-06

在传统的单机调度问题中，大多数研究者都假设所有工件一旦给定就具有恒定的工期。但在实际的加工过程中，工件的工期会受多种因素的影响，其中影响工期的主要原因是延误完工(要受到延误惩罚)和提前完工(要受到提前惩罚)。从客户的角度看，在工期过后交付到客户手里会导致客户因不满而造成惩罚。从生产的角度出发，迟到交付会影响公司声誉，并会消耗人工成本和不必要的库存成本，因此为了提高经济收益和降低生产成本，并在市场竞争中提升公司竞争力，工件不能过早也不能太晚完成，对于处理时间不同的工件可拆分到多个集合，这样每个集合就会产生一个公共工期，因此需要考虑确定多个公共工期，最优工件序列，最小化延误和提前惩罚问题。

Panwalkar 等人[1]的论文最早研究了公共工期的选择生产调度问题，目标是极小化工件的延误惩罚，提前惩罚，工期分配惩罚的线性组合。他们给出了一个多项式时间最优算法来解决这个问题。Cheng 等人[2]研究了工期分配单机调度问题，其中工件的延误惩罚和提前惩罚都是一般的非递减函数。对此问题，他们提出了一种有效的时间为 (为工件个数)的最优算法。Tanaka 等人[3]和 Alvarez-Valdes 等人[4]研究了工件具有相同工期的单台机器调度问题，目标是极小化所有工件的加权提前和延误惩罚问题。此问题是 NP-难问题，对此问题，Tanaka 等人[3]给出了一个精确算法，Alvarez-Valdes 等人[4]提出了 2 种二次整数规划模型，并给出了一种启发式算法，并且用实例说明，在非常少的计算时间内获得了高质量的解决方案。Yin 等人[5]研究了具有可分配的公共工期和可控制处理时间的单机批处理调度问题，其中工件处理时间是分配其的连续的不可再生的资源量的线性函数和凸函数。他们证明此问题在线性和凸资源消耗函数下，问题分别在 $O(n^5)$ 和 $O(n^4)$ 时间内最优解决。Birgin 等人[6]研究了具有共同工期和准备时间不相同的单机调度问题，他们提出了一个启发式方法，并且用数值实验显示了其高效率和稳健性。但此方法未能充分给出所解决问题的特征和性质。吴悦等人[7]研究了公共交货期窗口的单机调度问题，并假设如果工件(任务)在交货期窗口内完成，不受惩罚;否则，将导致提前或迟到惩罚。目标是确定最优共同交货期和工件序列，使工件的延误和提前惩罚的加权和最小，他们证明了此问题可在多项式时间内解决。Keshavarz 等人[8]研究了总加权提前和延误最小化的单机成组调度问题，此问题是 NP-难的，他们提出了一种基于拉格朗日松弛的分支定界算法。Mosheiov 等人[9]研究了工件加工时间与位置相关的单台机器调度问题，目标函数是加权准时工件数最大化问题，他们给出了一系列结论。关于工期分配问题的其它问题，读者可以参见文献[10-13]。

在准时制(just in time,JIT)系统下，以上的研究大多数假定所有工件给定一个工期，然而为了提高客户和生产者的满意度，需要确定多个工件交货期(工期)。Wang 等人[14]研究了多个共同工期分配的单机调度问题，目

* **收稿日期**:2023-06-26　**修回日期**:2023-12-31　**网络出版时间**:2024-02-22T17:28
资助项目:国家自然科学基金(No.71471120);辽宁省“兴辽英才计划”项目资助(No.XLYC2002017)
第一作者简介:包晗，女，研究方向为运筹学与组合优化，E-mail:1608392838@qq.com;**通信作者**:王吉波，教授，男，博士生导师，E-mail:wangjibo75@163.com
网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20240222.1306.002

标是确定多个公共工期、工件的加工序列使所有工件的提前、延误和工期指派费用的加权和最小。对此问题,他们给出了最优解满足的性质,通过位置权重与处理时间的匹配过程来获得最优解,并证明了这个问题是多项式时间可解的。Yang 等人[15]研究了多个共同工期分配的单机调度问题,其中工件的处理时间取决于其在加工序列中的位置和资源。目标函数是最小化包含提前、延误、工期分配和资源消耗惩罚的线性函数,他们证明了此问题是多项式时间可解的。本文在 Wang 等人[14]的基础上,考虑到多个公共工期分配的单机调度问题,目标是确定分配到共同工期的工件集合,共同工期和工件加工序列,使所有工件的提前惩罚、延误惩罚和公共工期分配的线性加权和最小,其中权重为只和位置有关而与工件无关的位置权重(位置权重可参见文献[16-17])。对于此问题,证明该问题是多项式可解的,并给出具体的求解算法。

1　问题描述

假设 n 个工件 $J=\{J_1,J_2,\cdots,J_n\}$ 要在一台机器上加工,所有的工件都在时间点时刻到达且在被加工的过程不可中断,其中 n 个工件 $J_1,J_2,\cdots,J_n$ 有多个工件集,每个工件集有一个共同工期,工件的加工(处理)时间为 p_j(为已知)。把具有共同工期的工件 J_j 分配到工件集 $I_i(i=1,2,\cdots,m)$,不失一般性,假设在工件集中的工件为 $J_{i,1},J_{i,2},\cdots,J_{i,n_i}$,其中为工件集中的工件数量,每个工件集的共同工期为 d^i_{opt}(为决策变量),加工(处理)时间为 p_{ij},其它参数类似定义。令$[r]$表示排在第 r 个位置,目标是确定工件集 $I=\{I_1,I_2,\cdots,I_m\}$,共同工期 d^i_{opt} 和最优调度序列,并使以下目标函数最小:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha_{ij}E_{i[j]}+\beta_{ij}T_{i[j]}+\gamma_i d^i_{\text{opt}}),\tag{1}$$

其中:α_{ij},β_{ij} 为在第 i 个工件集 I_i 中排在第 j 个位置的工件的提前和延误惩罚的位置系数(即位置权重),γ_i 为排在第 i 个位置的工件集 I_i 惩罚系数(即位置权重),$C_{i[j]}$为工件集 I_i 中 $J_{i[j]}$的完工时间,并且 $C_{i[j]}=\sum_{h=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{n_h}p_{h[j]}+\sum_{j\in I_i}p_{i[j]}$,$E_{i[j]}=\{0,d^i_{\text{opt}}-C_{i[j]}\}$ 为 $J_{i[j]}$的提前惩罚,$T_{i[j]}=\{0,C_{i[j]}-d^i_{\text{opt}}\}$ 为 $J_{i[j]}$的延误惩罚。本文研究工件集 I_i 数量已知的情况,即$|I_i|=n_i$,所有工件集的总数为 $\sum_{i=1}^{m}|I_i|=\sum_{i=1}^{m}n_i=n$,定义 $N_i=\sum_{k=1}^{i}n_k$ 是分配给 i 个及之前工件集的工件总数,在此条件下,本文证明该问题是多项式可解的。

2　主要结论

引理 1　在最优调度序列中,工件加工之间没有空闲时间,加工的过程不可中断,并且第一个工件在零时间开始加工。

引理 1 的具体证明参见文献[18]。

引理 2　对于极小化 $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha_{ij}E_{i[j]}+\beta_{ij}T_{i[j]}+\gamma_i d^i_{\text{opt}})$ 问题,在工件集 I_i 中调度序列 $\pi=[J_{i[N_{i-1}+1]},J_{i[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{i[N_i]}]$给定的情况下,$d^i_{\text{opt}}$ 为的某个工件的完工时间。

证明　考虑工件集 I_i 中调度序列 $\pi=[J_{i[N_{i-1}+1]},J_{i[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{i[N_i]}]$,假设 $C_{i[k_i]}<d^i_{\text{opt}}<C_{i[k_i+1]}$,$k_i=1,2,\cdots,n_i$,此时目标函数可写为 $Z=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}(d^i_{\text{opt}}-C_{i[j]})+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(C_{i[j]}-d^i_{\text{opt}})+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i d^i_{\text{opt}}$,将共同工期向左移使得 $d^i_{\text{opt}}=C_{i[k_i]}$,目标函数对应为:

$$Z'=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}(C_{i[k_i]}-C_{i[j]})+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(C_{i[j]}-C_{i[k_i]})+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i C_{i[k_i]}。$$

将共同工期向右移使得 $d^i_{\text{opt}}=C_{i[k_i+1]}$,对应目标函数为:

$$Z''=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}(C_{i[k_i+1]}-C_{i[j]})+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(C_{i[j]}-C_{i[k_i+1]})+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i C_{i[k_i+1]},$$

则:

$$Z'-Z=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}(C_{i[k_i]}-d_{\mathrm{opt}}^i)+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(d_{\mathrm{opt}}^i-C_{i[k_i]})+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i(C_{i[k_i]}-d_{\mathrm{opt}}^i),$$

$$Z''-Z=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}(C_{i[k_i+1]}-d_{\mathrm{opt}}^i)+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(d_{\mathrm{opt}}^i-C_{i[k_i+1]})+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i(C_{i[k_i+1]}-d_{\mathrm{opt}}^i)。$$

现令 $x=d_{\mathrm{opt}}^i-C_{i[k_i]}$,$y=C_{i[k_i+1]}-d_{\mathrm{opt}}^i$,$x\geqslant 0$,$y\geqslant 0$ 则:

$$Z'=Z+x\Big(\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}-\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}-\gamma_i n_i\Big)。$$

同理可得 $Z''=Z-y\Big(\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}-\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}-\gamma_i n_i\Big)$。

因此,当 $\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}-\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}-\gamma_i n_i\leqslant 0$,则 $Z'\leqslant Z$,$Z''\geqslant Z$,反之亦然。这说明在 I_i 工件集中,存在工件共同工期 d_{opt}^i 的最优值,它等于调度序列 π 中某个工件的完成时间。 证毕

引理3 在工件集中调度序列 $\pi=[J_{i[N_{i-1}+1]},J_{i[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{i[N_i]}]$给定的情况下,共同工期为 $d_{\mathrm{opt}}^i=C_{i[k_i]}$,其中 k_i 为满足如下2个不等式的整数:

$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\leqslant 0,\ \sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\geqslant 0。$$

证明 由引理2,共同工期为某工件的完成时间,即假设共同工期 $d_{\mathrm{opt}}^i=C_{i[k_i]}$,那么总惩罚函数可写为:

$$Z=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}(C_{i[k_i]}-C_{i[j]})+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(C_{i[j]}-C_{i[k_i]})+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i C_{i[k_i]}。$$

现将 d_{opt}^i 向左移 Δ 个单位,其中 $\Delta>0$ 为很小的数,则:

$$Z'=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}(C_{i[k_i]}-\Delta-C_{i[j]})+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(C_{i[j]}-C_{i[k_i]}+\Delta)+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i(C_{i[k_i]}-\Delta)。$$

两者相减可得:

$$Z-Z'=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}\Delta-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}\Delta+\sum_{j=1}^{n_i}\gamma_i\Delta=\Big(\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\Big)\Delta\leqslant 0。$$

同理,现将 d_{opt}^i 向右移 Δ 个单位,则:

$$Z''=\sum_{j=N_{I-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}(C_{i[k_i]}+\Delta-C_{i[j]})+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}(C_{i[j]}-C_{i[k_i]}-\Delta)+\sum_{j=N_{I-1}+1}^{N_i}\gamma_i(C_{i[k_i]}+\Delta)。$$

两者相减可得:

$$Z-Z''=-\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}\Delta+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}\Delta-\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\Delta=-\Big(\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\Big)\Delta\leqslant 0。$$

即 k_i 满足 $\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\leqslant 0$,且 $\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\geqslant 0$ 的整数。 证毕

引理4 在工件集 I_i 中给定的调度序列 $\pi=[J_{i[N_{i-1}+1]},J_{i[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{i[N_i]}]$,如果共同工期 $d_{\mathrm{opt}}^i=C_{i[k_i]}$,那么目标函数可表示为:

$$Z(\pi,d_{\mathrm{opt}}^i,I)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha_{ij}E_{i[j]}+\beta_{ij}T_{i[j]}+\gamma_i d_{\mathrm{opt}}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}\omega_j p_{i[j]}\tag{2}$$

其中:

$$\omega_j=\begin{cases}\sum_{h=N_{i-1}+1}^{j-1}\alpha_{ih}+(n-N_{i-1}+1)\gamma_i,\ j=N_{i-1}+1,N_{i-1}+2,\cdots,k_i,\\ \sum_{h=j}^{N_i}\beta_{ih}+(n-N_{i-1}+1)\gamma_i,\ j=k_{i+1},\cdots,N_i。\end{cases}\tag{3}$$

证明　考虑 I_i 中给定的调度序列 $\pi=[J_{i[N_{i-1}+1]},J_{i[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{i[N_i]}]$，根据引理 2 和 3，有：

$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}(\alpha_{ij}E_{i[j]}+\beta_{ij}T_{i[j]}+\gamma_i d_{\rm opt}^i)=\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}E_{i[j]}+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}T_{i[j]}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i d_{\rm opt}^i=$$

$$\alpha_{iN_{i-1}+1}(C_{i[k_i]}-C_{i[N_{i-1}+1]})+\alpha_{iN_{i-1}+2}(C_{i[k_i]}-C_{i[N_{i-1}+2]})+,\cdots,+\alpha_{ik_i-1}(C_{i[k_i]}-C_{i[k_i-1]})+$$

$$\beta_{ik_i+1}(C_{i[k_i+1]}-C_{i[k_i]})+\beta_{ik_i+2}(C_{i[k_i+2]}-C_{i[k_i]})+,\cdots,+\beta_{iN_i}(C_{i[N_i]}-C_{i[k_i]})+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i C_{i[k_i]}=$$

$$\alpha_{iN_{i-1}+1}(p_{i[N_{i-1}+2]}+p_{i[N_{i-1}+3]}+,\cdots,+p_{i[k_i]})+\alpha_{iN_{i-1}+2}(p_{i[N_{i-1}+3]}+,\cdots,+p_{i[k_i]})+,\cdots,+\alpha_{ik_i}p_{i[k_i]}+,\cdots,+$$

$$\beta_{i[k_i+1]}p_{i[k_i+1]}+\beta_{i[k_i+2]}(p_{i[k_i+1]}+p_{i[k_i+2]})+,\cdots,+\beta_{i[N_i]}(p_{i[k_i+1]}+,\cdots,+p_{i[N_i]})+,\cdots,+$$

$$\gamma_i(n-N_{i-1}+1)\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}p_{i[j]}+\gamma_i(n-N_i+1)\sum_{j=k_i+1}^{N_i}p_{i[j]}=$$

$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}p_{i[j]}(\sum_{h=1}^{j-1}\alpha_{ih})+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}p_{i[j]}(\sum_{h=j}^{N_i}\beta_{ih})+\gamma_i(n-N_{i-1}+1)\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}p_{i[j]}+\gamma_i(n-N_i+1)\sum_{j=k_i+1}^{N_i}p_{i[j]}=$$

$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}p_{i[j]}\Big(\sum_{h=N_{i-1}+1}^{j-1}\alpha_{ih}+\gamma_i(n-N_{i-1}+1)\Big)+\sum_{j=k_i+1}^{N_i}p_{i[j]}\Big(\sum_{h=j}^{N_i}\beta_{ih}+\gamma_i(n-N_i+1)\Big)=\sum_{j\in I_i}\omega_j p_{i[j]}$$

其中：

$$\omega_j=\begin{cases}\displaystyle\sum_{h=N_{i-1}+1}^{j-1}\alpha_{ih}+(n-N_{i-1}+1)\gamma_i,\ j=N_{i-1}+1,N_{i-1}+2,\cdots,k_i,\\ \displaystyle\sum_{h=j}^{N_i}\beta_{ih}+(n-N_{i-1}+1)\gamma_i,\ j=k_{i+1},\cdots,N_i。\end{cases}$$

因此，$Z(\pi,d_{\rm opt}^i,I)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha_{ij}E_{i[j]}+\beta_{ij}T_{i[j]}+\gamma_i d_{\rm opt}^i)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}\omega_j p_{i[j]}$。　　证毕

引理 5[19]　如果 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 按非减顺序排序，$y_1,y_2,\cdots,y_n$ 按非增顺序排序，则最小，反之亦然。

由引理 1～5，可以给出如下求解算法。

算法 1　步骤 1：计算 k_i，其中 k_i 满足 $\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i-1}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\leqslant 0$，且

$$\sum_{j=N_{i-1}+1}^{k_i}\alpha_{ij}-\sum_{j=k_i+1}^{N_i}\beta_{ij}+\sum_{j=N_{i-1}+1}^{N_i}\gamma_i\geqslant 0,$$

且 k_i 为大于的整数。否则 $d_{\rm opt}^i=0$。

步骤 2：根据公式(3)计算 ω_j，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n_i$，最大的 p_j 分配给最小的 ω_j，第二大的 p_j 分配给第二小的 ω_j，以此类推，从而得到最优调度序列 π。

步骤 3：将最优序列的按工件集内工件的数量分组得到 I_i 中调度序列为：

$$\pi=[J_{i[N_{i-1}+1]},J_{i[N_{i-1}+2]},\cdots,J_{i[N_i]}]。$$

步骤 4：计算得到 $d_{\rm opt}^i=\sum_{h=1}^{i-1}\sum_{j=1}^{n_i}p_{h[j]}+\sum_{j=1}^{k_i}p_{i[j]}$，$Z(\pi,d_{\rm opt}^i,I)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}\omega_j p_{i[j]}$。

显然，算法 1 的总时间为 $O(n\log n)$。根据以上分析，可以得到以下定理。

定理 1　总惩罚 $Z(\pi,d_{\rm opt}^i,I)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha_{ij}E_{i[j]}+\beta_{ij}T_{i[j]}+\gamma_i d_{\rm opt}^i)$ 的极小化多共同工期分配调度问题可在 $O(n\log n)$时间内求得最优解。

下面给出一个例子来说明此问题是如何求解的。

例 1　20 个工件要在一台机器上加工，它们的数据如下：

$$m=20,n_1=4,n_2=5,n_3=5,n_4=6,\gamma_1=2,\gamma_2=3,\gamma_3=4,\gamma_4=4,$$

$$p_1=3,p_2=5,p_3=9,p_4=12,p_5=14,p_6=16,p_7=19,p_8=20,p_9=21,p_{10}=25,$$

$$p_{11}=27,p_{12}=29,p_{13}=30,p_{14}=32,p_{15}=33,p_{16}=35,p_{17}=38,p_{18}=38,p_{19}=39,p_{20}=40,$$

$$\alpha_{11}=1,\alpha_{12}=3,\alpha_{13}=4,\alpha_{14}=5,\alpha_{21}=5,\alpha_{22}=2,\alpha_{23}=3,\alpha_{24}=4,\alpha_{25}=5,\alpha_{31}=1,\alpha_{32}=2,$$
$$\alpha_{33}=3,\alpha_{34}=3,\alpha_{35}=2,\alpha_{41}=1,\alpha_{42}=3,\alpha_{43}=4,\alpha_{44}=5,\alpha_{45}=4,\alpha_{46}=3,$$
$$\beta_{11}=1,\beta_{12}=4,\beta_{13}=5,\beta_{14}=4,\beta_{21}=2,\beta_{22}=2,\beta_{23}=4,\beta_{24}=5,\beta_{25}=6,\beta_{31}=2,\beta_{32}=2,$$
$$\beta_{33}=5,\beta_{34}=8,\beta_{35}=6,\beta_{41}=3,\beta_{42}=1,\beta_{43}=8,\beta_{44}=9,\beta_{45}=3,\beta_{46}=5。$$

解 通过算法1中的步骤1、步骤2和公式(3)可得:

$$k_1=2,k_2=1,k_3=2,k_4=2,$$
$$\omega_1=42,\omega_2=43,\omega_3=43,\omega_4=38,\omega_5=51,\omega_6=53,\omega_7=51,\omega_8=47,\omega_9=42,$$
$$\omega_{10}=48,\omega_{11}=50,\omega_{12}=47,\omega_{13}=42,\omega_{14}=34,\omega_{15}=28,\omega_{16}=31,\omega_{17}=29,\omega_{18}=21,$$
$$\omega_{19}=12,\omega_{20}=9$$

得到的最优的调度序列以及共同工期为:

$$\pi=[J_{10},J_9,J_8,J_{13},J_3,J_1,J_2,J_7,J_{12},J_5,J_4,J_6,J_{11},J_{14},J_{17},J_{15},J_{16},J_{18},J_{19},J_{20}],$$
$$d_{\mathrm{opt}}^1=46,d_{\mathrm{opt}}^2=105,d_{\mathrm{opt}}^3=187,d_{\mathrm{opt}}^4=353,$$

总费用为:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j\in I_i}(\alpha_{ij}E_{i[j]}+\beta_{ij}T_{i[j]}+\gamma_i d_{\mathrm{opt}}^i)=15\ 911。$$

通过对单机多共同工期分配调度问题的算例结果分析,可以得到高效的生产方案和确定工期,为生产者的生产和顾客的配送货物(确定工期)提供决策方案。从而能有效利用资源,提高生产效率,降低成本。

3 结论

本文研究了一个单机调度问题,其中工件分成多个工件集,每个工件集有一个共同工期。该问题的目标是找到最优调度序列和多个公共工期,使延误惩罚、提前惩罚和工期指派惩罚的线性加权和总成本费用最小,其中本文的权重是与位置相关的位置权重。结果表明,如果分配给共同工期的工件个数为给定常数时,证明了该问题是多项式可解的,并给出了具体求解算法。在未来的研究中,将会考虑关于一般的多工期指派模型、研究工件加工时间具有恶化和学习效果或资源分配的模型,以及研究多机调度问题。

参考文献:

[1] PANWALKAR S S,SMITH M L,SEIDMANN A. Common due date assignment to minimize total penalty for the one machine scheduling problem[J]. Operations Research,1982,30(2):391-399.

[2] CHENG T C E,KAHLBACHER H G. Single-machine scheduling to minimize earliness and number of tardy jobs[J]. Journal of Optimization Theory and Applications,1993,77(3):563-573.

[3] TANAKA S,FUJIKUMA S,ARAKI M. An exact algorithm for single-machine scheduling without machine idle time[J]. Journal of Scheduling,2009,12(6):575-593.

[4] ALVAREZ V R,CRESPO E,TAMARIT J M. Minimizing weighted earliness-tardiness on a single machine with a common due date using quadratic models[J]. Top,2012,20(3):754-767.

[5] YIN Y,CHENG T C E,WU C C,et al. Single-machine common due-date scheduling with batch delivery costs and resource-dependent processing times[J]. International Journal of Production Research,2013,51(17):5083-5099.

[6] BIRGIN E G,RONCONI,dé BORA P. Heuristic methods for the single machine scheduling problem with different ready times and a common due date[J]. Engineering Optimization,2012,44(10):1197-1208.

[7] 吴悦,汪定伟. 公共交货期窗口下提前/拖期惩罚不同的单机调度问题[J]. 控制与决策,1998,13(6):659-664.
WU Y,WANG D W. Single-machine scheduling problem with different advance/delay penalties under public delivery windows [J]. Control and Decision Making,1998,13(6):659-664.

[8] KESHAVARZ T,SAVELSBERGH M,SALMASI N. A branch-and-bound algorithm for the single machine sequence-dependent group scheduling problem with earliness and tardiness penalties[J]. Applied Mathematical Modelling,2015,39(20):6410-6424.

[9] MOSHEIOV G,SHABTAY D. Maximizing the weighted number of just-in-time jobs on a single machine with position-dependent processing times[J]. Journal of Scheduling,2013,16(5):519-527.

[10] HUI Z,MIN L,ZHOU Z. Machine scheduling with deteriorating and resource-dependent maintenance activity[J]. Computers & Industrial Engineering,2015,88(1):479-486.

[11] LIU W W, JIANG C. Due-date assignment scheduling involving job-dependent learning effects and convex resource allocation [J]. Engineering Optimization, 2020, 52(1): 74-89.

[12] WANG Y, WANG J Q, YIN Y. Due date assignment and multitasking scheduling with deterioration effect and efficiency promotion[J]. Computers & Industrial Engineering, 2020, 146(1): 34.

[13] 张新功,崔同欣. 共同工期下的总权误工单机双代理排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2022, 39(1): 35-40.
ZHANG X G, CUI T X. A single-machine two-agent sequencing problem for total power miswiring under common duration [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2022, 39(1): 35-40.

[14] WANG J B, WANG M Z. Single machine multiple common due dates scheduling with learning effects[J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 60(11): 2998-3002.

[15] YANG S J, LEE H T, GUO J Y. Multiple common due dates assignment and scheduling problems with resource allocation and general position-dependent deterioration effect[J]. The International Journal of Advanced Manufacturing Technology, 2013, 67 (1/2/3/4): 181-188 .

[16] WANG X P, LIU X Y, WEI G. Single machine scheduling with slack due dates assignment[J]. Engineering Optimization, 2017, 49(4): 709-717.

[17] QIAN J, CHANG G. A note on study on proportionate flowshop scheduling with due-date assignment and position-dependent weights[J]. Optimization Letters, 2022, 16(9): 2645-2648.

[18] BRUCKER P. Scheduling Algorithms[M]. 3rd ed. Berlin: Springer, 2001.

[19] HARDY G H, LITTLEWOOD J E. PÓLYA G. Inequalities[M]. 2nd ed. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1967.

Operations Research and Cybernetics

An Algorithm for Multiple Common Due-Date Assignments Scheduling Problem

BAO Han, LYU Danyang, WANG Jibo

(School of Science, Shenyang Aerospace University, Shenyang 110136, China)

Abstract: The goal is to determine multiple common durations for all jobs as well as an optimal scheduling sequence for the jobs that minimizes the weighted sum of the earliness penalties, lateness penalties, and common due date assignments. The matching process of position weight and processing time is used to obtain the optimal solution. This problem can be solved when the number of jobs assigned to the common due date is given a constant. The problem is polynomially solvable and a specific solution algorithm is given.

Keywords: scheduling; earliness/tardiness penalty; polynomial time algorithm; single machine; multiple common due-date

(责任编辑 陈 乔)