

多阶段复杂退化产品的可靠性统计模型^{*}

周子韩¹, 凡红梅¹, 缪思巧¹, 唐家银^{1,2}

(1. 西南交通大学 数学学院 统计系; 2. 西南交通大学 综合交通大数据应用技术国家工程实验室, 成都 611756)

摘要:针对多阶段退化产品,基于性能退化响应数据的回归统计拟合,建立变速率复杂退化可靠性评估模型。首先利用分段回归拟合对性能退化数据进行变点回归建模,推导变点分布的极大似然函数;其次鉴于模型的复杂性,变点估计的最大似然估计无法得到显式解,采用分层 Bayes 进行建模;然后结合 MCMC(Markov chain Monte Carlo)算法中的 Gibbs 采样对模型进行参数诊断,依据 Schwarz 信息准则(Schwarz information criterion, SIC)构建经验似然比模型的变点进行估计与检验;最后根据产品失效退化的定义,推导该失效模式下产品的可靠度函数。以手机运行的游戏性能数据建模分析,演绎说明了多阶段退化模型适应性强、可行性高的特点。与传统两阶段建模相比,多阶段退化建模考虑了各个阶段的退化信息,提高了数据利用率和产品的可靠性评估可信度。

关键词:多阶段退化;变点;Schwarz 信息准则;Gibbs 采样;可靠性

中图分类号:O212.3;TB114.3

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)01-0074-12

随着中国型号可靠性工作的深入落实以及人民对产品可靠性要求的不断提高,对产品可靠度评估的可信度要求日渐提升^[1]。传统的可靠性评估方法建立在确切失效寿命数据的基础之上,而目前大多数产品都具有高可靠性、长寿命的特点,导致在有限的试验时间内仅观测到极少的失效寿命数据,使可靠性评估工作变得举步维艰,质量评估的可信度也差强人意。有鉴于此,基于性能退化数据的可靠性评估方法打破了传统分析方法的瓶颈,成为了可靠性评估的主流方法之一^[2-3]。

性能退化建模方法主要分为物理模型、深度学习模型和退化量分布模型。物理模型需要对设备的内在运作机理和外部使用条件进行具体分析,评估精度较高但模型的推广性差,难以涵盖其他领域的具体情况^[4-5];深度学习模型具有强大的包容性与适应性,主要适用于退化轨迹非线性、缺乏规律性的情形,但该模型在数据量不足时,难以给出令人信服的可靠性评估结果^[6-9]。退化量分布模型避免了对试验产品的内在结构与机理进行具体性分析,因而在某种程度上具有较强的适应性与一般性;而且该类模型即使在试验产品个数不足的情况下也可通过增加测量密集度获得多组性能退化数据来对产品建模,或者在时间有限的情况下通过对少量的性能退化数据应用回归外推的方法进行产品退化量的预测。退化量分布模型与物理模型和深度学习模型相比有着明显的优点,它可以有效地描述产品退化轨迹中的波动性。学者们对性能退化建模方法进行了大量的研究,例如:文献[10]对 GaAs 激光器在 80 °C 下的工作电流变化百分比进行建模,通过拟合最优的退化轨迹实现对产品可靠性的精准评估;文献[11]对空间谐波减速器的失效原理和它的性能退化量分布进行分析,通过试验推导了减速器在混合润滑情况下的磨损率以及可靠度;文献[12]采用 TiAlN 涂层硬质合金刀具对洛氏硬度为 35 的 AISI4340 型钢材料进行多组的切削试验,并通过 Weibull 和 Gamma 分布拟合刀具退化量分布进行可靠性分析;文献[13]通过循环试验和热加速老化试验,对高级计量基础设施用密封铅酸电池的性能和寿命周期进行退化建模分析。

大量试验表明,因磨损、腐蚀、疲劳等因素的存在,产品在使用时的退化轨迹呈现出阶段性的特点:文献[14]

^{*} 收稿日期:2022-05-26 修回日期:2022-07-07 网络出版时间:2023-06-20T13:50

资助项目:教育部人文社会科学研究规划基金项目(No. 20XJAZH009);西南交通大学 2020 本科教育教学研究与改革项目(20201033);西南交通大学 2020 年度研究生研究类教育改革项目(No. YJG4-2020-Y035);四川省教育厅高等教育人才培养质量和教学改革项目(No. JG2018-143);中央高校基础研究培育专题 2021 年度项目(No. 2682021ZTPY018)

第一作者简介:周子韩,男,研究方向为可靠性统计,E-mail:zzh2971595898@outlook.com;通信作者:唐家银,男,副教授,博士生导师,E-mail:tangjiayin@home.swjtu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230620.0939.003

讨论了在荧光显示屏的使用损耗中,由于老化熔炼筛选得不充分,所以显示屏亮度衰减过程存在变点,且变点前后的退化过程呈现先快后慢的规律;文献[15]指出,液力耦合器的振幅会随着使用时间的增长而不断扩大,呈现明显的两阶段退化;半导体激光器、发光二极管、高压脉冲电容器等电子元器件都表现出相似的两阶段退化趋势^[16-18]。但是,两阶段建模拟合退化轨迹却难以有效适应复杂机械的真实情况。文献[19]指出,由于内在失效机理的阶段性和外在条件的不断改变,高精度产品的退化轨迹难以符合理想的两阶段模式,多阶段退化建模才能有效地适应可靠性分析的需求。此外,文献[20]表明,多数产品的失效率本质服从于“浴盆型”曲线,相应的退化轨迹也呈现多阶段特征;在产品使用的初期存在一个短暂且快速退化的阶段,而两阶段退化模型往往忽略了这一特殊时期。Tseng 等人^[21]在荧光灯的寿命实验中认为前期退化轨迹的短暂波动是由于产品自身的不稳定因素以及外界环境的不确定性引起的,并直接将这一阶段的数据舍弃——这样粗暴的方法损失了大量宝贵的实验数据及产品信息,直接影响可靠性评估的可信度^[22]。

基于上述研究背景和有关性能退化数据,本研究建立了多阶段退化可靠性评估模型,推导出多阶段退化变点的极大似然函数,并通过分段回归方法及退化失效模式分析确定退化轨迹的变点个数,结合采用 Schwarz 信息准则(Schwarz information criterion, SIC)进行变点的估计构建经验似然比对模型变点进行检验。进一步地,本研究用了 Bayes 方法结合 Gibbs 采样对未知参数进行采样估计,最后以手机的游戏性能退化实例进行可靠性评估,并与传统两阶段的方法进行比较。

1 基于性能退化量的多阶段变点回归模型

产品在工作过程中,某个性能指标随时间呈现出一定趋势的变化规律,直至无法保持正常工作状态,该现象即为“退化型失效”;与之相对应的表征指标则被称为性能退化量,用 $\{y(t), t > 0\}$ 表示,其中 t 为时间。由于高精度可靠性产品退化过程存在复杂性,本研究建立了多阶段变点回归模型描述该类产品的性能退化量随时间变化轨迹,即通过对产品在不同时刻 $t_1, t_2, \dots, t_m$ 监测得到 n 个退化量观测样本,结合文献[23],可得到多阶段变点回归模型为:

$$y_i = \begin{cases} h_1(t_i; \alpha_1, \beta_1) + \varepsilon_1, 1 \leq i < k_1, \\ h_2(t_i; \alpha_2, \beta_2) + \varepsilon_2, k_1 \leq i < k_2, \\ \vdots \\ h_m(t_i; \alpha_m, \beta_m) + \varepsilon_m, k_{m-1} \leq i \leq n. \end{cases} \quad (1)$$

其中: $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 为多阶段退化轨迹的变点; α_1 和 β_1 分别为变点 k_1 之前的斜率和截距; α_2 和 β_2 分别为变点 k_1 和变点 k_2 之间的斜率和截距;以此类推, α_m 和 β_m 分别为变点 k_{m-1} 之后的斜率和截距; $h_j(t_i; \alpha_j, \beta_j)$ 是 α_j 和 β_j 的线性函数,即 $h_j(t_i; \alpha_j, \beta_j) = \alpha_j t_i + \beta_j$,并假设 $\varepsilon_j \sim N(0, \sigma_j^2)$,且 $j = 1, 2, \dots, m$ 。

变点 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 位置的确定及各阶段模型系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$ 的估计是多阶段变点回归模型中的关键问题。下文将通过 SIC 检验模型中变点 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 的存在性,并得到变点估计结果 $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_{m-1}$;另外,为进一步说明所估计变点的正确性,将构建经验似然比对变点的估计结果 $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_{m-1}$ 进行逐个检验。在此基础上,采用 Bayes 方法对各阶段模型系数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2$ 进行估计,并结合 Gibbs 采样得到模型参数估计的数值结果。

1.1 多阶段退化轨迹的变点识别

1.1.1 SIC 下的变点估计

在退化试验中,往往只能间断检测产品在不同时刻的性能退化值,因此变点的个数以及变点的值一般都不知,需要估计。分段回归方法是确定多阶段线性退化模型变点个数的常用方法,各阶段回归结果统计显著性为显著并且回归系数差异明显是确定退化变点的有利证据。但该方法具有一定的主观性,有时结果会产生较大的偏差。因此可以先利用分段回归粗略判断变点个数,再采用 SIC 进行变点估计。

判断模型是否存在变点的过程实际上也是对模型进行选择的过程,文献[24-25]利用模型选择的信息标准方法对分布函数中的变点问题进行了统计推断,所谓信息标准方法就是选择使模型之间的 K-L 信息距离达到最小的模型,此时的模型也是与真实模型最为接近的模型,文献[26]将极大似然方法与 K-L 信息距离结合并利用似然函数的性质,推导出了模型选择的最佳准则,即赤池信息准则(Akaike information criterion, AIC),表达式为:

$$\text{AIC} = -2\ln L(x|\hat{\theta}) + 2K,$$

其中: K 表示似然函数中参数的个数; $\ln L(x|\hat{\theta})$ 表示模型的对数似然函数。

AIC 在时间序列、回归分析、多元分析等方面被广泛使用,但在最佳模型选择时也常遇到过度拟合的情形。因此, Schwarz^[27] 从 Bayes 的观点出发在 AIC 的基础上提出了基于 SIC 的模型选择标准,表达式为:

$$\text{SIC} = -2\ln L(x|\hat{\theta}) + 2K \ln n.$$

相对于 AIC, SIC 加大了对模型参数个数的惩罚力度。但无论是 AIC 还是 SIC, 判断依据都是建立在模型的对数似然函数基础上, 因此变点的似然函数是 SIC 下选择模型最优的变点的关键。根据式(1)可以得到多阶段退化模式下退化量分布的似然函数为:

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2) = \prod_{j=1}^m (2\pi\sigma_j^2)^{-(k_j-k_{j-1})/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_j^2} \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} (y_i - h_j(t_i; \alpha_j, \beta_j))^2\right\}. \quad (2)$$

对式(2)取对数得到以下对数似然函数:

$$l(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m; \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m; \sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_m^2) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \sum_{j=1}^m (k_j - k_{j-1}) \ln \sigma_j + \sum_{j=1}^m \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} -\frac{1}{2\sigma_j^2} (y_i - h_j(t_i; \alpha_j, \beta_j))^2, \quad (3)$$

不失一般性, 对式(3)固定 j , 再分别关于 α_j, β_j 和 σ_j^2 求偏导, 并令所得偏导为 0, 即可求解得到 α_j, β_j 和 σ_j^2 ($j=1, 2, \dots, m$) 的极大似然估计 $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j$ 和 $\hat{\sigma}_j^2$ 如下:

$$\hat{\alpha}_j = \frac{(k_j - k_{j-1}) \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i y_i - \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} y_i}{(k_j - k_{j-1}) \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i^2 - \left(\sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i\right)^2}, \quad (4)$$

$$\hat{\beta}_j = \frac{\sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} y_i - \hat{\alpha}_j \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i}{k_j - k_{j-1}}, \quad (5)$$

$$\hat{\sigma}_j^2 = \frac{\sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} (y_i - \hat{\alpha}_j t_i - \hat{\beta}_j)^2}{k_j - k_{j-1}}. \quad (6)$$

再将式(4)~(6)估计量代入式(3)中, 得到关于变点位置 $(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ 的极大似然函数如下:

$$l(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi - \sum_{j=1}^m (k_j - k_{j-1}) \ln \hat{\sigma}_j - \frac{n}{2}. \quad (7)$$

由于式(7)的复杂性, 直接对它取对数求偏导难以得到变点 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 极大似然估计的显式表达。而 SIC 是 AIC 的改进, 在变点的识别与检验中有着广泛的应用, 对变点的检测效果良好; 因此下面通过 SIC 确定变点 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 的值。

当模型中不存在变点时, 多阶段变点回归退化为简单一元线性回归模型, 式(7)中的 $\hat{\sigma}_j$ 则变为 $\hat{\sigma}$, 有:

$$\text{SIC}(n) = n \ln 2\pi + 2n \ln \hat{\sigma} + n + 2K \ln n.$$

当存在变点 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 时, 多阶段性能退化模型的 SIC 值为:

$$\text{SIC}(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}) = -2 \left(-\frac{n}{2} \ln 2\pi - \sum_{j=1}^m (k_j - k_{j-1}) \ln \hat{\sigma}_j - \frac{n}{2} \right) + 2K \ln n.$$

若 $\text{SIC}(n) \leq \min \text{SIC}(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ 时, 说明当模型中不存在变点时的 SIC 值最小; 根据 SIC 值对于模型选择的意义, 认为当模型中不存在变点时为最优模型, 即认为退化轨迹中没有变点。

若存在 $2 \leq k_1 < \dots < k_{m-1} \leq n-2$, 使得 $\text{SIC}(n) > \min \text{SIC}(k_1, k_2, \dots, k_{m-1})$ 时, 同理根据 SIC 选择 SIC 值最小的模型, 即存在变点 $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ 时的模型; 同时变点的估计为 $\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_{m-1}$, 其中:

$$(\hat{k}_1, \hat{k}_2, \dots, \hat{k}_{m-1}) = \arg \min_{2 \leq k_1 < \dots < k_{m-1} \leq n-2} \text{SIC}(k_1, k_2, \dots, k_{m-1}).$$

SIC 下的变点估计值极大地拟合了多阶段的退化轨迹,避免了求解复杂的极大似然解析解的同时,也通过加大对模型参数个数的惩罚力度,避免了过拟合。为进一步说明变点估计的合理性与准确性,下面通过经验似然比对模型变点的估计值进行逐个检验。

1.1.2 变点的经验似然比检验

经验似然方法兼顾了非参数方法稳健性的同时,也具备了极大似然方法的有效性和灵活性,具有良好的统计性质。对来自非正态总体的样本或者样本的方法波动很大的情况时,经验似然方法的精确性相对于正态逼近方法要更为可观。在一般的正则条件下,通过经验似然方法构造的置信域不但具有置信区域保持性、变换不变性等优良性质,而且置信域的形状可以由数据自行决定^[28]。

类似于参数的似然比,非参数似然比可定义为^[28]:

$$R(F) = \frac{L(F)}{L(F_n)}, \quad (8)$$

其中: F 是独立同分布随机变量 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的分布函数, F_n 是它的样本经验分布函数,并且有:

$$L(F) = \prod_{i=1}^n dF(X_i) = \prod_{i=1}^n p_i, \quad (9)$$

$$L(F_n) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{n}, \quad (10)$$

其中: $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, $\sum_{i=1}^n \varphi(X_i; \theta) p_i = 0$; 这里 $\varphi(X_i; \theta)$ 代表 X_i 关于参数 θ 的可测函数, $\sum_{i=1}^n \varphi(X_i; \theta) p_i = \mu$ 等价于 $E[\varphi(X_i; \theta)] = \mu$, 此时经验似然比可以写为^[28]:

$$R(\theta) = \left\{ \prod_{i=1}^n n p_i \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n \varphi(X_i; \theta) p_i = \mu \right\}. \quad (11)$$

不失一般性,考虑任一变点估计值 $\hat{k}_j$, 检验此退化轨迹的其中一个变点是否为 $k_j = \hat{k}_j$ 。令样本 A 为 (α_j, β_j) ; 样本 B 为 $(\alpha_{j+1}, \beta_{j+1})$, 假设:

$$H_0: A = A(\text{退化轨迹中变点 } k_j \neq \hat{k}_j);$$

$$H_1: A \neq B(\text{退化轨迹中存在变点 } k_j = \hat{k}_j)。$$

将上述检验问题拆分为 2 个部分进行分析,若 H_0 成立,定义残差形式如下^[29]:

$$\tilde{e}(\hat{k}_j) = \begin{cases} \dots & \dots \\ y_i - (\hat{\alpha}_{j+1} t_i + \hat{\beta}_{j+1}), & \hat{k}_{j-1} < i \leq \hat{k}_j, \\ y_i - (\hat{\alpha}_j t_i + \hat{\beta}_j), & \hat{k}_j < i \leq \hat{k}_{j+1}, \\ \dots & \dots \end{cases} \quad (12)$$

其中: $\hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j$ 分别是线性模型在变点 k_j 之前斜率和截距的最大似然估计(MLE); $\hat{\alpha}_{j+1}, \hat{\beta}_{j+1}$ 是线性模型在变点 k_j 之后斜率和截距的 MLE。

由于 $E(\tilde{e}(\hat{k}_j)) = 0$, 即 $\sum_{i=1}^n \tilde{e}(\hat{k}_j) p_i = 0$ 当且仅当 H_0 成立时满足,则多阶段变点回归模型关于变点的经验似然比 $R(\hat{k}_j)$ 为:

$$R(\hat{k}_j) = \left\{ \prod_{i=1}^n n p_i \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n \tilde{e}(\hat{k}_j) p_i = 0 \right\}. \quad (13)$$

对 $R(\hat{k}_j)$ 取对数后为:

$$-2 \ln R(\hat{k}_j) = -2 \sup \left\{ \sum_{i=1}^n \ln n p_i \mid p_i \geq 0, \sum_{i=1}^n p_i = 1, \sum_{i=1}^n \tilde{e}(\hat{k}_j) p_i = 0 \right\}. \quad (14)$$

根据文献[29]给出的参数似然比极限分布结论可知:

$$-2 \ln R(\theta) \rightarrow \chi^2(q).$$

在给定显著性水平 α 下,该检验的拒绝域为 $(-\infty, \chi^2_{\alpha/2}(q)] \cup (\chi^2_{1-(\alpha/2)}(q), \infty]$, 其中 q 为自变量协方差矩阵的秩。

若 $-2\ln R(\hat{k}_j)$ 落在拒绝域之内,那么拒绝原假设,认为退化轨迹中存在变点 $k_j = \hat{k}_j$ 。

1.2 Gibbs 采样下多阶段退化模型参数 Bayes 估计

多阶段退化模型中参数众多,似然函数复杂且难以运算,MLE 无论从样本信息的可信度还是从估计量的数学求解来说,相对于 Bayes 推断都具有明显的弊端。因此本研究通过分层 Bayes 方法推断的分布参数,综合了先验信息,可信度更高。

先验分布的选择是 Bayes 估计的重要部分,目前多数学者选择的先验分布主要分为 2 类:共轭先验和无信息先验。无论选择何种分布,Bayes 方法都可以将它们通过数据收敛到相同的结果中。在此基础上,由于式(1)参数众多,整体形式较为复杂,为简化模型复杂度和参数估计的难度,假设模型中参数 α_j, β_j 满足无信息的先验分布, σ_j^2 则取共轭先验,即: $\pi(\alpha_j) \propto 1, \pi(\beta_j) \propto 1, \pi(\sigma_j^2) \sim \text{IG}(a, b), j=1, 2, \dots, m$ 。其中: a, b 为超参数,满足 $a > 0, b > 0, \text{IG}(a, b)$ 表示参数为 a, b 的逆伽马分布,它的概率密度函数为:

$$\text{IG}(a, b) = \begin{cases} b^a / \Gamma(a) (\sigma_j^2)^{-(a+1)} e^{-b/\sigma_j^2}, & \sigma_j^2 > 0, \\ 0, & \text{其他。} \end{cases} \quad (15)$$

其中: $\Gamma(a)$ 为 a 的伽马分布。假设参数 α_j, β_j 和 σ_j^2 相互独立,则在给定观测数据集时,多阶段变点回归模型参数的联合后验分布为:

$$\pi(\alpha_j, \beta_j, \sigma_j^2 | C) \propto \pi(C | \alpha_j, \beta_j, \sigma_j^2) \prod_{j=1}^m \pi(\alpha_j) \prod_{j=1}^m \pi(\beta_j) \prod_{j=1}^m \pi(\sigma_j^2) \propto \prod_{j=1}^m \sigma_j^{-(k_j - k_{j-1}) - 2(a+1)} \exp \left\{ \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} - \frac{1}{2\sigma_j^2} (y_i - h_j(t_i; \alpha_j, \beta_j))^2 - \sum_{j=1}^m - \frac{b}{\sigma_j^2} \right\},$$

其中 C 代表观测样本。

根据联合后验分布 $\pi(\alpha_j, \beta_j, \sigma_j^2 | C)$ 可以得到各个参数的满条件边缘后验分布:

$$\begin{aligned} \pi(\alpha_j | \sim) &\sim N \left(\frac{(k_j - k_{j-1}) \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i y_i - \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} y_i}{k_j \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i^2 - (\sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i)^2}, \frac{\sigma_j^2}{\sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} (t_i - \bar{t})^2} \right), \\ \pi(\beta_j | \sim) &\sim N \left(\frac{\sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} y_i - \hat{\alpha}_j \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} t_i}{k_j - k_{j-1}}, \left(\frac{1}{k_j - k_{j-1}} + \frac{\bar{t}^2}{\sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} (t_i - \bar{t})^2} \right) \sigma_j^2 \right), \\ \pi(\sigma_j^2 | \sim) &\sim \text{IG} \left(a + \frac{k_j - k_{j-1}}{2}, \sum_{i=k_{j-1}}^{k_j} \frac{(y_i - \hat{\alpha}_j t_i - \hat{\beta}_j)^2}{2} + b \right). \end{aligned}$$

通过各个参数的后验分布,结合 MCMC(Markov chain Monte Carlo)算法中的 Gibbs 采样可以得到参数的 Bayes 估计值。MCMC 是一种基于 Markov 链的随机采样算法,Gibbs 采样是 MCMC 算法的一个特殊情况,在通过 Gibbs 采样采集的样本 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 中,样本 x_t 满足 Markov 性质,即 $k(x_t | x_{t-1}, x_{t-2}, \dots, x_1) = k(x_t | x_{t-1})$,其中 $k(x_t | x_{t-1})$ 可以简写为转移概率 $k(x_{t-1} \rightarrow x_t)$,表示采样结果 x_t 仅受上一次的采样结果 x_{t-1} 的影响。采集的样本整体 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 需要服从一个平稳分布 $\pi(x)$ 。转移概率 $k(x_{t-1} \rightarrow x_t)$ 与采样分布 $\pi(x)$ 之间需要满足细致平衡等式(detailed balance): $\pi(x_{t-1}) k(x_{t-1} \rightarrow x_t) = \pi(x_t) k(x_t \rightarrow x_{t-1})$,其中 $k(x_{t-1} \rightarrow x_t) = q(x_t | x_{t-1}) \min \left\{ 1, \frac{\pi(x_t) k(x_t \rightarrow x_{t-1})}{\pi(x_{t-1}) k(x_{t-1} \rightarrow x_t)} \right\}$ 为样本 x_t 的接受率。Gibbs 采样具体算法如下:

步骤 1,规定初始值 x_0 。

步骤 2,规定采样次数 i 为 0 到 n 。

步骤 3,从均匀分布 $U(0,1)$ 中生成一个随机数 u 。

步骤 4,选择建议分布 $k(x)$ 。

步骤 5,从 $k(x^* | x_i)$ 中生成一个 x^* , 即 $x^* \sim k(x^* | x_i)$ 。

步骤 6,如果 $u < \min\left\{1, \frac{\pi(x_i)k(x_i \rightarrow x_{i-1})}{\pi(x_{i-1})k(x_{i-1} \rightarrow x_i)}\right\}$, 那么 $x_{i+1} = x^*$; 否则 $x_{i+1} = x_i$ 。

步骤 7,重复 $i=1, \dots, n$ 。

实际上,在 Gibbs 采样对满条件后验分布的具体操作的过程中以 α_j 的满条件后验分布 $\pi(\alpha_j | \sim)$ 为例,如果 $\pi(\alpha_j^* | \sim) = k(\alpha_j^* | \alpha_j)$, 那么接受率为:

$$\begin{aligned} \frac{\pi(x_i)k(x_i \rightarrow x_{i-1})}{\pi(x_{i-1})k(x_{i-1} \rightarrow x_i)} &= \frac{\pi(\alpha_j^* | \sim)\pi(\alpha_j, \beta_j, \sigma_j^2)}{\pi(\alpha_j | \sim)\pi(\alpha_j^*, \beta_j, \sigma_j^2)} = \frac{\pi(\alpha_j^* | \sim)\pi(\alpha_j | \beta_j, \sigma_j^2)\pi(\beta_j, \sigma_j^2)}{\pi(\alpha_j | \sim)\pi(\alpha_j^* | \beta_j, \sigma_j^2)\pi(\beta_j, \sigma_j^2)} = \\ &= \frac{\pi(\alpha_j^* | \sim)\pi(\alpha_j | \beta_j, \sigma_j^2)}{\pi(\alpha_j | \sim)\pi(\alpha_j^* | \beta_j, \sigma_j^2)} = 1. \end{aligned}$$

在 Gibbs 采样中,样本的实际接受率为 100%, 并且也满足细致平衡条件,因此本研究采用这一算法是可行的。对参数 α_j, β_j 和 $\sigma_j^2 (j=1, 2, \dots, m)$ 采样完成后,对采集样本求平均值就可得到参数的 Bayes 估计值。

2 多阶段退化产品可靠性评估

根据退化失效的定义,产品失效的充要条件是性能退化量达到失效阈值 D 的首次到达时刻, T 为产品的寿命。定义如下:

$$T = \inf\{t: y(t) \leq D\},$$

t 时刻产品的可靠度函数为:

$$R(t) = P\{T > t\} = P\{y(t) < D, y(s) < D, 0 \leq s < t\}.$$

其中: s 为 $[0, t)$ 内的任意时刻, $y(t) = \{y_i(t)\}, i=1, 2, \dots, n$ 。

下面分 3 种情况来分别讨论产品的可靠度函数。

1) $0 < t \leq k_1$, 由本文 1.2 节可知,产品按照 $\alpha_1 x + \beta_1$ 进行线性退化,此时的退化量 $y(x)$ 服从均值为 $\hat{\alpha}_1 x + \hat{\beta}_1$ 、方差为 $\hat{\sigma}_1^2$ 的正态分布,可得 x 时刻产品的失效分布函数和可靠度函数分别为:

$$F_1(t; \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_1^2, D) = \int_D^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_1} \exp\left\{-\frac{(y - \hat{\alpha}_1 t - \hat{\beta}_1)^2}{2\hat{\sigma}_1^2}\right\} dy,$$

$$R_1(t; \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_1^2, D) = 1 - F_1(t; \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_1^2, D).$$

2) $k_{j-1} < t \leq k_j, j=1, 2, \dots, m-1$ 。此时讨论产品的可靠性包含一个前提条件:产品在区间 $(0, k_{j-1}]$ 没有失效,进而在区间 $(k_{j-2}, k_{j-1}], (k_{j-3}, k_{j-2}], \dots, (0, k_1]$ 内均未失效。则此时产品的可靠度函数为:

$$R(t) = P\{y(t) \leq D, y(s) < D, 0 \leq s < t\} =$$

$$P\{y(t) \leq D, y_j(s) < D, k_{j-1} \leq s < t; y_{j-1}(s) < D, k_{j-2} \leq s < k_{j-1}; \dots; y_1(s) < D, 0 \leq s \leq k_1\}.$$

根据独立性

$$\begin{aligned} R(t) &= P\{y(t) \leq D, y_j(s) < D, k_{j-1} \leq s < t\} \prod_{i=1}^{j-1} P\{y(t) \leq D, y_i(s) < D, k_{i-1} \leq s < k_i\} = \\ &= \prod_{i=1}^{j-1} R_i(k_i; \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i^2, D) R_j(t - k_{j-1}; \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, \hat{\sigma}_j^2, D), \end{aligned}$$

其中:

$$R_j(t - k_{j-1}; \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, \hat{\sigma}_j^2, D) = 1 - \int_D^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_j} \exp\left\{-\frac{(y - \hat{\alpha}_j(t - k_{j-1}) - \hat{\beta}_j)^2}{2\hat{\sigma}_j^2}\right\} dy.$$

3) $t > k_{m-1}$, 相同推断可以得到:

$$R(t) = P\{y(t) \leq D, y(s) < D, 0 \leq s < t\} =$$

$$P\{y(t) \leq D, y_x(s) < D, k_{m-1} \leq s < t; y_{m-1}(s) < D, k_{m-2} \leq s < k_{m-1}; \dots; y_1(s) < D, 0 \leq s \leq k_1\} =$$

$$P\{y(t) \leq D, y_m(s) < D, k_{j-1} \leq s < t\} \prod_{i=1}^{m-1} P\{y(t) \leq D, y_i(s) < D, k_{i-1} \leq s < k_i\} =$$

$$\prod_{i=1}^{m-1} R_i(k_m; \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i^2, D) R_m(t - k_{m-1}; \hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m, \hat{\sigma}_m^2, D),$$

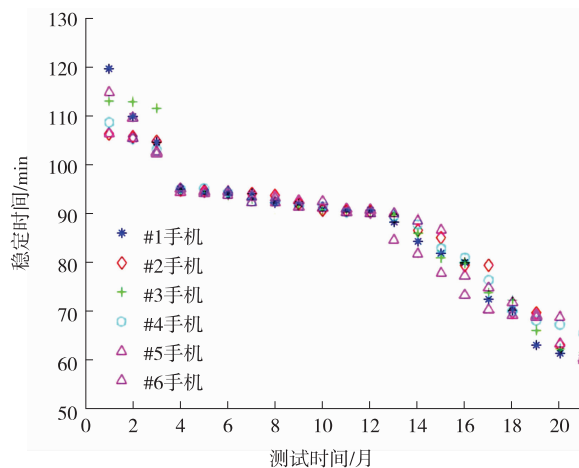
$$\text{其中: } R_m(t - k_{m-1}; \hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m, \hat{\sigma}_m^2, D) = 1 - \int_D^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}\hat{\sigma}_m} \exp\left\{-\frac{(y - \hat{\alpha}_m(t - k_{m-1}) - \hat{\beta}_m)^2}{2\hat{\sigma}_m^2}\right\} dy.$$

综上所述,多阶段变点回归模型的可靠度函数为:

$$R(t) = \begin{cases} R_1(t; \hat{\alpha}_1, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}_1^2, D), & 0 \leq t < k_1, \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^{j-1} R_i(k_j; \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i^2, D) R_j(t - k_{j-1}; \hat{\alpha}_j, \hat{\beta}_j, \hat{\sigma}_j^2, D), & k_{j-1} \leq t < k_j, \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^{m-1} R_i(k_m; \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_i, \hat{\sigma}_i^2, D) R_m(t - k_{m-1}; \hat{\alpha}_m, \hat{\beta}_m, \hat{\sigma}_m^2, D), & t > k_m. \end{cases}$$

3 算例分析

选取一款同型号国产手机 6 台,同时运行相同的网络游戏,对所获得的手机运行性能数据进行建模分析发现,随着手机使用时间的增加,运行游戏稳定在 $60 \text{ 帧} \cdot \text{s}^{-1}$ 的时间会不断缩减,当稳定时间跌落一定的阈值时,便认为该手机已经不再适合运行游戏。因此,将手机运行游戏流畅画质的稳定时间作为它的游戏性能状态参数。图 1 记录了分别命名为 #1、#2、#3、#4、#5 和 #6 的 6 台同型号手机的游戏画质稳定时间在 630 d(21 个月)的检测时间周期中的变化情况,且在此期间这 6 台手机均未失效。



注:1 个月以 30 d 计,下同。

图 1 手机运行网络游戏稳定运行时间的退化过程

Fig. 1 Degradation process of stable uptime of mobile phone running a certain online game

由图 1 可知:1) 6 台手机的游戏性能退化曲线之间不完全重叠,但退化轨迹与退化模式基本相似。2) 性能退化曲线快缓交错,曲折下跌,具有明显的变点特征;3) 6 台手机运行相同网络游戏稳定在 $60 \text{ 帧} \cdot \text{s}^{-1}$ 的时间在测试初期一段时间内有较大幅度缩短;随着测试时间继续延长,手机游戏性能退化过程明显变缓;当测试时间进一步延长时,上述状态被打破,手机游戏性能继续开始快速的衰减。

由图 1 还可以发现,供测试手机的游戏性能在退化过程中具有不确定性,这种不确定性可能与测量误差有关,或者是手机受到环境(温度或湿度)或自身性质的影响,且可以看出手机的游戏性能在退化的过程中存在 2 个明显的变点。进一步地,可以利用分段回归的方法来确定变点的个数,对这一退化轨迹的 3 个阶段进行回归;如果分段回归的回归系数差异较大,并且每个阶段的拟合优度很高,那么便有理由认为退化轨迹中含有 2 个

变点。有鉴于此,建立三阶段回归模型评估该产品的可靠度是合理的。不失一般性,下面以#1手机为例进行详细的说明。

首先通过图 1 可以看出,变点 $k_1 \in (4,5)$,变点 $k_2 \in (10,15)$ 。所以可以分别对区间 $[1,4]$, $[5,10]$ 和 $[15,20]$ 做回归,得到结果如表 1 所示。

表 1 不同区间的线性回归结果
Tab.1 Linear regression results of different intervals

区间	参数	估计值	标准差	p 值	统计显著性	调整 R^2
[1,4]	α_1	-8.132 3	1.737 1	1.88e-04	非常显著	0.980 9
	β_1	124.335	0.634 3	6.393e-03	显著	
[5,10]	α_2	-0.652 15	0.991 3	6.21e-08	非常显著	0.857 6
	β_2	97.236 5	0.128 9	5.06e-03	显著	
[15,20]	α_3	-4.365 55	0.390 6	3.51e-04	非常显著	0.962 0
	β_3	147.264 6	6.868 8	2.69e-05	非常显著	

表 2 显示在 3 个区间中回归系数的差异较大,并且每个分段的拟合效果较好,统计显著性均为显著或非常显著,说明#1手机游戏性能退化轨迹在图 1 中存在 2 个变点。根据 SIC,分别计算不同变点组合下相应的 SIC 的值,结果如图 2 所示,SIC(4,14)为所有组合中的最小值。所以#1手机游戏性能退化过程中的变点出现在 120 d(4 个月)左右和 420 d(14 个月)左右。

表 2 变点 k_1 和 k_2 的经验似然比检验结果
Tab.2 Empirical likelihood ratio test results of change point k_1 and k_2

检验统计量	值	是否落入拒绝域	检验统计量	值	是否落入拒绝域
$-2\ln R(\hat{k}_1)$	123.667	是	$-2\ln R(\hat{k}_2)$	115.342	是

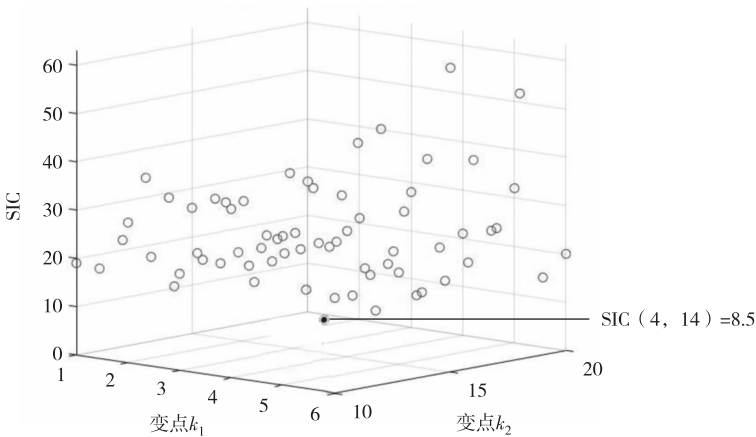
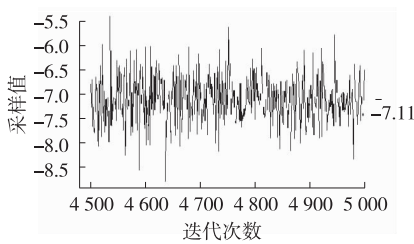
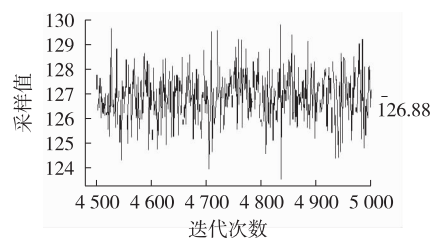
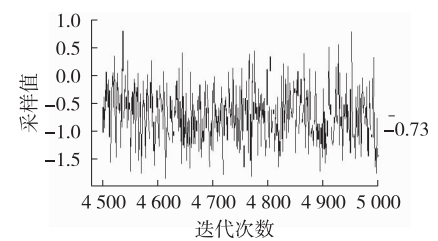
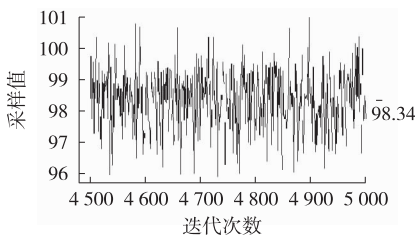
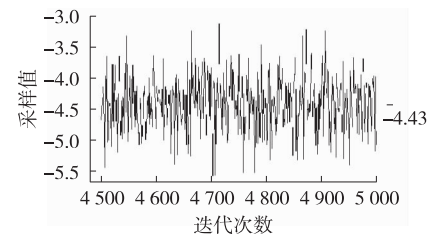
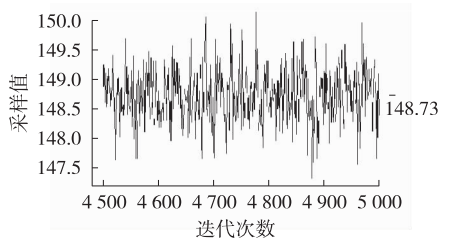
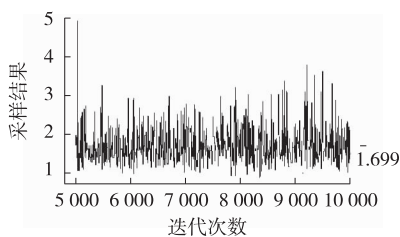
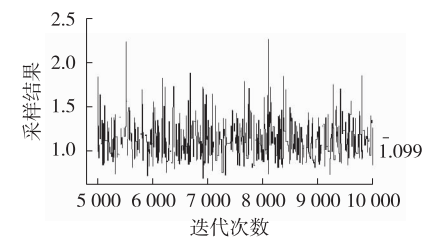
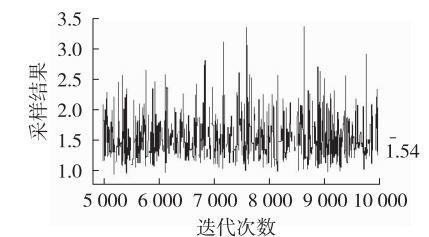


图 2 不同变点组合的 SIC 值
Fig.2 SIC values of different change point combinations

在 SIC 下确定的变点的估计值需要通过一定的检验方法进行检验,将 k_1 和 k_2 的经验似然比检验统计量 $-2\ln R(\hat{k}_1)$ 和 $-2\ln R(\hat{k}_2)$ 与临界值 $\chi^2_{0.05}(2)$ 进行对比,对 $\hat{k}_1=4,\hat{k}_2=14$ 进行经验似然比检验。由表 2 可知,检验统计量落入拒绝域内,拒绝原假设 H_0 ,认为退化轨迹中确实存在变点 $\hat{k}_1=4,\hat{k}_2=14$ 。确定#1手机的游戏性能多阶段退化模型为:

$$y_i = \begin{cases} \alpha_1 t_i + \beta_1 + \varepsilon_1, & 1 \leq i \leq \hat{k}_1, \\ \alpha_2 t_i + \beta_2 + \varepsilon_2, & \hat{k}_1 \leq i \leq \hat{k}_2, \\ \alpha_3 t_i + \beta_3 + \varepsilon_3, & i > \hat{k}_2. \end{cases}$$

进一步地,利用 Bayes 方法对模型参数 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_1, \beta_2$ 和 β_3 进行推断。将变点值代入式(4)以及各个参数的后验分布即式(7)~(15)中,通过 MCMC 算法中的 Gibbs 采样进行抽样,参数 $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3$ 舍弃前 4 500 次未收敛的抽样值,得到如下图 3~8 的收敛结果。参数 $\hat{\sigma}_1^2, \hat{\sigma}_2^2, \hat{\sigma}_3^2$ 选取迭代 5 000~10 000 次的结果如图 9~11 所示。结果显示,三阶段变点回归模型的 Bayes 估计分别为 $\hat{\sigma}_1 \approx 1.699, \hat{\sigma}_2 \approx 1.099, \hat{\sigma}_3 \approx 1.54, \hat{\alpha}_1 \approx -7.11, \hat{\alpha}_2 \approx -0.73, \hat{\alpha}_3 \approx -4.43, \hat{\beta}_1 \approx 126.88, \hat{\beta}_2 \approx 98.34, \hat{\beta}_3 \approx 148.73$ 。显然,3 个阶段的 #1 手机游戏性能稳定时间退化率差距很大。

图 3 4 500~5 000 次 α_1 迭代序列Fig. 3 4 500~5 000 iterations of α_1 图 4 4 500~5 000 次 β_1 迭代序列Fig. 4 4 500~5 000 iterations of β_1 图 5 4 500~5 000 次 α_2 迭代序列Fig. 5 4 500~5 000 iterations of α_2 图 6 4 500~5 000 次 β_2 迭代序列Fig. 6 4 500~5 000 iterations of β_2 图 7 4 500~5 000 次 α_3 迭代序列Fig. 7 4 500~5 000 iterations of α_3 图 8 4 500~5 000 次 β_3 迭代序列Fig. 8 4 500~5 000 iterations of β_3 图 9 5 000~10 000 次 σ_1^2 迭代序列Fig. 9 5 000~10 000 iterations of σ_1^2 图 10 5 000~10 000 次 σ_2^2 迭代序列Fig. 10 5 000~10 000 iterations of σ_2^2 图 11 5 000~10 000 次 σ_3^2 迭代序列Fig. 11 5 000~10 000 iterations of σ_3^2

为了验证多阶段变点回归模型拟合 #1 手机游戏性能数据的有效性,对模型不同阶段利用上述估计结果对原数据进行拟合,结果显示:多阶段退化分析对产品退化轨迹的拟合程度较高,并有利于对综合产品的退化信息进行可靠性评估,且能提高可靠性评估的可信度(图 12)。

根据所建立的模型,对 #1 手机游戏性能的可靠性进行评估,图 13 给出了多阶段变点回归模型拟合产品退化轨迹的可靠度函数曲线:在 0~120 d(0~4 个月),产品的可靠度基本维持在 100% 不变;之后在 150~420 d(5~14 个月)有轻度的递减规律,但可靠度始终维持在 80% 以上;在 450 d(15 个月)之后,产品的可靠度下降明显,此时产量品的维修率极高。传统方法的可靠性评估曲线在图 13 中也有展现,然而传统的两阶段退化建模舍弃了初始退化阶段,故而损失了大量有价值的信息,从而可靠性评估的可信度有所下降。相比之下,本研究采用

的多阶段变点回归建模方法为产品的可靠性评估提供了更多的信息量,对产品的退化轨迹的拟合程度更高,同时可靠度评估的可信度也更高^[16,21]。

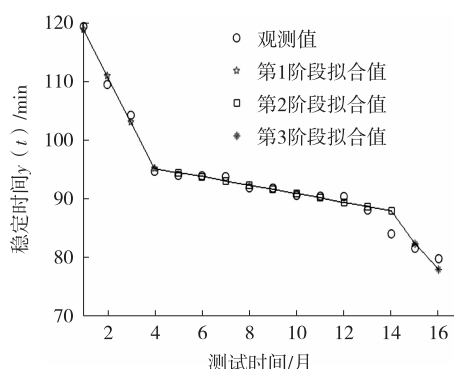


图 12 #1 手机多阶段退化模型拟合效果

Fig. 12 Fitting effect of multi-stage degradation model of #1 mobile phone

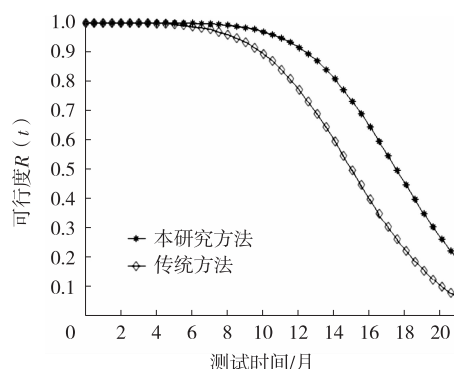


图 13 #1 手机可靠度函数曲线

Fig. 13 Reliability function curve of #1 mobile phone

4 结束语

考虑到产品在退化的过程中呈现多阶段的特征,针对传统的两阶段失效模式中有效信息大量丢失的不足,通过构建经验似然比在 SIC 下准确地完成了变点的识别工作,创建了多阶段变点回归模型,采用 Bayes 方法结合 Gibbs 采样估计模型的参数,从而有效地推导了产品的可靠度函数。

由于多数产品存在前期调试与磨合的快速退化阶段,本研究结合手机游戏性能实例分析,建立多阶段可靠性评估模型,更好地融合了产品前期的快速退化阶段,充分利用了各阶段的退化信息,提高了可靠性评估的精准度。

参考文献:

- [1] 赵宇. 可靠性数据分析[M]. 北京:国防工业出版社,2011.
ZHAO Y. Data analysis of reliability[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2011.
- [2] 苏春,张恒. 基于性能退化数据和竞争失效分析的可靠性评估[J]. 机械强度, 2011, 33(2): 196-200.
SU C, ZHANG H. Reliability assessment based on performance degradation data and competing failure analysis[J]. Journal of Mechanical Strength, 2011, 33(2): 196-200.
- [3] 迟玉伦,袁雪莲,吴春平,等. 基于声发射信号监测的主轴性能退化可靠性研究[J]. 机械强度, 2017, 39(5): 1086-1091.
CHI Y L, ZHONG X L, WU C P, et al. Machine tool spindle performance degradation reliability study based on acoustic emission monitoring[J]. Journal of Mechanical Strength, 2017, 39(5): 1086-1091.
- [4] 袁容. 基于性能退化分析的可靠性方法研究[D]. 成都:电子科技大学, 2015.
YUAN R. Research on reliability modeling and analysis methods based on the performance degradation[D]. Chengdu: University of Electronic Science and Technology of China, 2015.
- [5] MEEKER W Q, ESCOBAR L A. Statistical methods for reliability data[M]. New York: Wiley, 1998.
- [6] 郭琦. 基于性能退化数据的可靠性评估方法研究[D]. 广州:华南理工大学, 2015.
GUO Q. Research on reliability assessment methods based on performance degradation data[D]. Guangzhou: South China University of Technology, 2015.
- [7] TAO T, ZIO E, ZHAO W. A novel support vector regression method for online reliability prediction under multi-state varying operating conditions[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2018, 177: 35-49.
- [8] 王国锋,董毅,杨凯,等. 基于深度学习与粒子滤波的刀具寿命预测[J]. 天津大学学报(自然科学与工程技术版), 2019, 52(11): 1109-1116.

- WANG G F, DONG Y, YANG K, et al. Tool life prediction based on deep learning and particle filtering[J]. Journal of Tianjin University (Science and Technology), 2019, 52(11): 1109-1116.
- [9] 周亚同, 陈子一, 马尽文. 从高斯过程到高斯过程混合模型: 研究与展望[J]. 信号处理, 2016, 32(8): 960-972.
- ZHOU Y T, CHEN Z Y, MA J W. From Gaussian processes to the mixture of Gaussian processes: a survey[J]. Journal of Signal Processing, 2016, 32(8): 960-972.
- [10] 邓爱民, 陈循, 张春华, 等. 基于性能退化数据的可靠性评估[J]. 宇航学报, 2006, 27(3): 546-552.
- DENG A M, CHEN X, ZHANG C H, et al. Reliability assessment based on performance degradation data[J]. Journal of Astronautics, 2006, 27(3): 546-552.
- [11] 官浩. 空间谐波减速器性能退化与寿命分析研究[D]. 重庆: 重庆大学, 2014.
- GUAN H. Research on performance degradation and life analysis of space harmonic driver[D]. Chongqing: Chongqing University, 2014.
- [12] GADDAFEE M, CHINCHANIKAR S. An experimental investigation of cutting tool reliability and its prediction using Weibull and Gamma models: a comparative assessment[J]. Materials Today: Proceedings, 2020, 24(2): 1478-1487.
- [13] MEKONNEN Y, ABURBU A, SARWAT A. Life cycle prediction of sealed lead acid batteries based on a Weibull model[J]. Journal of Energy Storage, 2018, 18: 467-475.
- [14] BAE S J, KVAM P H. A change-point analysis for modeling incomplete burn-in for light displays[J]. IEEE Transactions, 2006, 38(6): 489-498.
- [15] 鄢伟安, 宋保维, 段桂林, 等. 基于两阶段维纳退化过程的液力耦合器可靠性评估[J]. 系统工程与电子技术, 2014, 36(9): 1882-1886.
- YAN W A, SONG B W, DUAN G L, et al. Reliability evaluation of LCD based on two-phase wiener degradation process[J]. System Engineering and Electronics, 2014, 36(9): 1882-1886.
- [16] AGRAWAL G P, DUTTA N K, ANTHONY P J. Line width of distributed feedback semiconductor lasers with partially reflecting facets[J]. Applied Physics Letters, 1986, 48(7): 457-459.
- [17] WANG P P, TANG Y C, BAE S J, et al. Bayesian analysis of two-phase degradation data based on change-point Wiener process[J]. Reliability Engineering & System Safety, 2017, 170(2): 244-256.
- [18] 张晔, 王治华, 赵振平, 等. 两阶段非线性 Wiener 过程退化建模与可靠性分析[J]. 系统工程与电子技术, 2020, 42(4): 954-959.
- ZHANG A, WANG Z H, ZHAO Z P, et al. Two-phase nonlinear Wiener process for degradation modeling and reliability analysis[J]. Systems Engineering and Electronics, 2020, 42(4): 954-959.
- [19] 黄金波, 孔德景, 崔利荣. 多阶段可校正系统退化建模与可靠性评估[J]. 系统工程与电子技术, 2016, 38(4): 966-969.
- HUANG J B, KONG D J, CUI L R. Degradation modeling and reliability assessment of multi-stage system with calibrations[J]. Systems Engineering and Electronics, 2016, 38(4): 966-969.
- [20] 李玉亚. 可靠性数学[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1990.
- LI Y Y. Reliable mathematics[M]. Wuhan: Huazhong University of Science & Technology Press, 1990.
- [21] TSENG S-T, HAMADA M, CHIAO C-H. Using degradation data to improve fluorescent lamp reliability[J]. Journal of Quality Technology, 1995, 27(4): 363-369.
- [22] 黎明. 带随机拐点的退化失效建模与分析方法研究[D]. 长沙: 国防科学技术大学, 2009.
- LI M. Research on the degradation-failure modeling and analysis methods of degradation path with random change-points[D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2009.
- [23] 赵华玲. 逐段线性回归中变点问题的统计推断[D]. 武汉: 武汉大学, 2011.
- ZHAO H L. On the statistical inference on change-point problem in segmented linear regression models[D]. Wuhan: Wuhan University, 2011.
- [24] CHEN J H, GUPTA A, PAN J M. Information criterion and change point problem for regular models[J]. Sankhya, 2006, 67(2): 252-282.
- [25] CHEN J H, PAN J M. U-Statistic based modified information criterion for change point problems[J]. Communication in Statistics-Theory and Methods, 2008, 37(17): 2687-2712.
- [26] AKAIKE A. A new look at the statistical model identification[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1974, 19(6): 716-723.

- [27] SCHWARZ G E. Estimating the dimension of a model[J]. The Annals of Statistics, 1978, 6(2): 30-34.
- [28] OWEN A. Empirical likelihood for linear models[J]. Annals of Statistics, 1991, 19(4): 1725-1747.
- [29] WILKS S S. The large-sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypotheses[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1938, 9(1): 60-62.

Reliability Statistical Inference Model for Multi-Stage Degraded Products

ZHOU Zihan¹, FAN Hongmei¹, MIAO Siqiao¹, TANG Jiayin^{1,2}

(1. Department of Statistics, School of Mathematics, Southwest Jiaotong University;

2. National Engineering Laboratory of Integrated Transportation Big Data Application Technology,
Southwest Jiaotong University, Chengdu 611756, China)

Abstract: Based on regression statistical fitting of performance degradation response data, a reliability assessment model of variable speed complex degradation was established for multi-stage degraded products. First, piecewise regression fitting was used to model performance degradation data, and the maximum likelihood function of change point distribution was derived. Secondly, due to the complexity of the model, the maximum likelihood estimation of change point estimation cannot be displayed. Therefore, layered Bayes model is used for modeling, and Gibbs sampling technique in Markov chain Monte Carlo algorithm is used for parameter diagnosis of the model. The change point of the model is estimated and verified by using Schwarz information criterion criterion and empirical likelihood ratio. Finally, according to the definition of product failure degradation, the reliability function of the product under the failure mode is derived. Based on Mate30 game performance data modeling and analysis, the multi-stage degradation model is proved to be highly adaptable and feasible. Compared with traditional two-stage modeling, multi-stage degradation modeling reduces unnecessary data waste and improves reliability of product reliability evaluation.

Keywords: multi-stage degradation model; changing point; Schwarz information criterion; Gibbs sampling; reliability

(责任编辑 方 兴)