

多目标优化问题统一解的加权 Tchebycheff 标量化*

冯攀, 夏远梅, 赵克全
(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:为研究多目标优化问题 (C, ϵ) -型、 E -型统一解的标量化性质,利用 Bowman 等人提出的加权 Tchebycheff 标量化方法建立多目标优化问题 (C, ϵ) -弱有效解和 E -弱有效解的标量化结果。进一步,建立基于加权 Tchebycheff 标量化方法多目标优化问题 (C, ϵ) -有效解和 E -有效解的标量化结果。通过调整标量化模型参数范围得到了多目标优化问题 (C, ϵ) -(弱)有效解、 E -(弱)有效解的一些加权 Tchebycheff 标量化结果,为求解多目标优化问题的算法设计提供了理论基础。

关键词:多目标优化问题; (C, ϵ) -(弱)有效解; E -(弱)有效解; 加权 Tchebycheff 标量化方法

中图分类号: TB472; F273.4

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2024)02-0002-05

多目标优化问题是指在约束集上同时极大化或极小化一个向量值函数的问题,是数值最优化问题的推广。目前,关于多目标优化问题的研究已有大量的成果,见文献[1-5]。其中,多目标优化问题解的概念在多目标优化问题研究中扮演了十分基础且重要的作用, Pareto 有效解和 Pareto 弱有效解是最基础且经典的解概念。然而,由于多目标优化问题的有效解集和弱有效解集可能很大,且可能具有一些不太好的性质,一些学者进一步提出了各种类型的真有效解。1968 年, Geoffrion^[6]提出了 Geoffrion 真有效解的概念; 1977 年, Borwein^[7]利用切锥提出了 Borwein 真有效解的概念等。

在实际生产生活中,有效解与弱有效解的存在性通常需要集合的紧性,而多目标优化问题的近似解在很弱的条件下都可能存在。因此,多目标优化问题近似解的研究对于解决大量实际问题,促进最优化理论的发展具有十分重要的价值和意义。近些年来,关于多目标优化问题近似解的相关研究已有大量的研究成果出现^[8-11]。1979 年, Kutateladze^[12]首次提出了数值最优化问题的近似解概念—— $\bar{\epsilon}$ -近似解。1984 年, Loridan^[13]将 $\bar{\epsilon}$ -近似解的概念推广到多目标优化问题上。2006 年, Gutiérrez 等人^[14]利用 Co-radiant 集定义了多目标优化问题的 (C, ϵ) -有效解和 (C, ϵ) -弱有效解两类 (C, ϵ) -型统一解,并研究了它们与其它一些近似解概念之间的关系。2011 年, Chicco 等人^[15]在有限维空间中提出了改进集的概念,并利用改进集提出了多目标优化问题一类 E -型统一解概念—— E -有效解,进一步讨论了这类统一解的存在性等。随后, Gutiérrez^[16]等人将 E -有效解的概念推广到无限维空间,提出了另一类 E -型统一解—— E -弱有效解。此外, Zhao 和 Yang 等人提出了基于改进集的其他近似解概念及性质的一些成果^[17-19]。

多目标优化问题的标量化方法是指通过一定的方式将多目标优化问题转化为单目标优化问题,进而借助单目标优化问题已有的理论与方法研究多目标优化问题近似解的标量化性质。1976 年, Bowman 等人^[20]提出了加权 Tchebycheff 标量化方法。随后,一些学者利用该方法建立了弱有效解和有效解的标量化结果^[21-23]。2017 年,徐威娜等人^[24]利用该标量化模型对多目标优化问题近似解的标量化性质进行研究,建立了多目标优化问题 ϵ -弱有效解和 ϵ -真有效解的一些非线性标量化结果。2021 年,赵克全和夏远梅等人利用广义 Tchebycheff 范数的推广形式,提出了带松弛变量和剩余变量的一类广义 Tchebycheff 标量化方法,获得了多目标优化问题弱有效解、有效解、真有效解的等价刻画^[25-27]。

* 收稿日期: 2023-09-10 修回日期: 2024-01-30 网络出版时间: 2024-05-14 T13:34

资助项目: 国家自然科学基金——重大项目(No. 11991024), 面上项目(No. 12171063), 青年科学基金项目(No. 12101096); 重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014); 重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114, No. cstc2021jcyj-msxmX0280); 重庆市教育委员会科学技术研究青年项目(No. KJQN202100521)

第一作者简介: 冯攀, 女, 研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail: 2021110510076@stu.cqnu.edu.cn; 通信作者: 赵克全, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: kequanz@163.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20240513.1345.012>

值得注意的是,目前还没有成果利用加权 Tchebycheff 标量化方法研究多目标优化问题的 (C, ϵ) -近似解和 E -近似解。受此启发,本文将在文献[20]的基础上,建立多目标优化问题的 (C, ϵ) -弱有效解、 (C, ϵ) -有效解、 E -弱有效解和 E -有效解的一些标量化结果。

1 预备知识

令 $\mathbf{R}^m$ 为 m 维欧氏空间,本文考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad & \min f(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})) \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in X \subset \mathbf{R}^n, \end{aligned}$$

其中: $X \subset \mathbf{R}^n$ 为非空子集, $f(\mathbf{x})$ 为 $X \rightarrow \mathbf{R}^m$ 的有界向量值函数。对于任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, 定义序关系: $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Rightarrow x_i < y_i, \forall i=1, 2, \dots, m$; $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \dots, m$; $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \dots, m$, 且至少有一个 i 使得 $x_i < y_i$ 。

定义 1^[14] 设 C 是 $\mathbf{R}^m$ 中的非空集合。若对任意 $\mathbf{d} \in C, \alpha > 1$, 有 $\alpha \mathbf{d} \in C$, 则称集合 C 为 Co-radiant 集。

定义 2^[14] 设 $\epsilon \geq 0, \hat{\mathbf{x}} \in X, C$ 为 $\mathbf{R}^m$ 中的 Co-radiant 集。则:

- 1) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解, 若 $(f(X) - f(\hat{\mathbf{x}})) \cap (-C(\epsilon)) \subset \{\mathbf{0}\}$;
- 2) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解, 若 $(f(X) - f(\hat{\mathbf{x}})) \cap (-\text{int}C(\epsilon)) = \emptyset$ 。

定义 3^[15] 设 E 为 $\mathbf{R}^m$ 中的非空集合。若 $E = E + \mathbf{R}_{\geq}^m$ 且 $\mathbf{0} \notin E$, 则称 E 为关于 $\mathbf{R}_{\geq}^m$ 的改进集。

定义 4^[15-16] 设 E 为 $\mathbf{R}^m$ 中关于 $\mathbf{R}_{\geq}^m$ 的改进集, 则:

- 1) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 E -有效解, 若 $(f(X) - f(\hat{\mathbf{x}})) \cap (-E) = \emptyset$;
- 2) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 E -弱有效解, 若 $(f(X) - f(\hat{\mathbf{x}})) \cap (-\text{int}E) = \emptyset$ 。

考虑如下标量化问题 (SOP):

$$(\text{SOP}) \quad \min_{\mathbf{x} \in X} \varphi(\mathbf{x}),$$

其中 $\varphi: X \rightarrow \mathbf{R}$ 。设 $\bar{\epsilon} > 0$ 且 $\hat{\mathbf{x}} \in X$, 若对任意 $\mathbf{x} \in X$, 都有 $\varphi(\mathbf{x}) \geq \varphi(\hat{\mathbf{x}}) - \bar{\epsilon}$, 则称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为问题 (SOP) 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解。进一步, 若对任意 $\mathbf{x} \in X$, 都有 $\varphi(\mathbf{x}) > \varphi(\hat{\mathbf{x}}) - \bar{\epsilon}$, 则称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为问题 (SOP) 的 $\bar{\epsilon}$ -严格最优解。

本文考虑如下标量化问题 (SOP) _{β} :

$$(\text{SOP})_{\beta} \quad \min_{\mathbf{x} \in X} \max_{1 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\mathbf{x}) - f_i^*),$$

其中: $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \in \mathbf{R}_{\geq}^m, \mathbf{f}^* = (f_1^*, f_2^*, \dots, f_m^*) \in \mathbf{R}^m$ 是 utopia 向量, $\mathbf{f}^*$ 满足 $f_i^* = \min_{\mathbf{x} \in X} f_i(\mathbf{x}) - \delta, \delta > 0, i=1, 2, \dots, m$ 。

2 主要结果

本节建立了多目标优化问题 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解、 E -弱有效解、 (C, ϵ) -有效解和 E -有效解的标量化结果。

定理 1 令 $\epsilon > 0, C \subset \mathbf{R}_{\geq}^m$ 是 Co-radiant 集, $\beta \in \mathbf{R}_{\geq}^m$, 若 $I = \{i \mid \beta_i \neq 0\}, \mu = \inf\{\beta_i \epsilon_{c_i} \mid \mathbf{c} \in \text{int}C, i \in I\}, 0 \leq \bar{\epsilon} \leq \max\left\{0, \frac{\mu}{2}\right\}$, 且 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (SOP) _{β} 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解。

证明 反证法。假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解, 则:

$$(f(X) - f(\hat{\mathbf{x}})) \cap (-\text{int}C(\epsilon)) \neq \emptyset.$$

即存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in X, \mathbf{c} \in \text{int}C$ 使得 $f_i(\tilde{\mathbf{x}}) - f_i(\hat{\mathbf{x}}) = -\epsilon_{c_i}$, 其中 $\epsilon_{c_i} > 0, i=1, 2, \dots, m$, 则:

$$\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{\mathbf{x}}) - f_i^*) = \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i^* - \epsilon_{c_i}).$$

令 $\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i^* - \epsilon_{c_i}) = \beta_k (f_k(\hat{\mathbf{x}}) - f_k^*) - \beta_k \epsilon_{c_k}$ 。由 $\beta \in \mathbf{R}_{\geq}^m, f_i(\tilde{\mathbf{x}}) - f_i^* > 0$ 可得:

$$0 < \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{\mathbf{x}}) - f_i^*) = \beta_k (f_k(\hat{\mathbf{x}}) - f_k^*) - \beta_k \epsilon_{c_k} \leq \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i^*) - \beta_k \epsilon_{c_k}.$$

又由 $\beta_k > 0$ 可知 $\beta_k \epsilon_{c_k} > 0$, 下证 $\bar{\epsilon} < \beta_k \epsilon_{c_k}$ 。

- 1) 当 $\mu = 0$ 时, $\bar{\epsilon} = 0$, 则 $\bar{\epsilon} < \beta_k \epsilon_{c_k}$;

2) 当 $\mu > 0$ 时, 由 $\mu \leq \beta_k \epsilon c_k$ 和 $\bar{\epsilon} \leq \frac{\mu}{2}$ 可得 $\bar{\epsilon} < \beta_k \epsilon c_k$ 。

因此, $\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{x}) - f_i^*) < \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^*) - \bar{\epsilon}$, 这与 $\hat{x}$ 是 $(SOP)_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解矛盾, 故 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解。

注 1 若 $C \not\subset \mathbf{R}_\infty^m$, 则定理 1 在 C 是凸 Co-radiant 集条件下也不一定成立。

例 1 考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (f_1(x), f_2(x)) = (x_1, 2x_2), \\ \text{s. t. } x &\in X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, -3 \leq x_2 \leq 0\}. \end{aligned}$$

令 $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 3\}$ 。此时 C 为凸的 Co-radiant 集, 且 $C \not\subset \mathbf{R}_\infty^m$ 。取 $\epsilon = 1, \beta = (1, 0)$, 则 $C(\epsilon) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \mathbf{R}, x_2 \geq 3\}, \bar{\epsilon} = 0$, 其中 $f(X) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, -6 \leq x_2 \leq 0\}$, 显然 $\hat{x} = (0, 0)$ 是 $(SOP)_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解, 又由 $(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-\text{int} C(\epsilon)) \neq \emptyset$ 可知 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的 (C, ϵ) -弱有效解。

推论 1 令 $E \subset \mathbf{R}_\infty^m$ 是关于 $\mathbf{R}_\infty^m$ 的改进集, $\beta \in \mathbf{R}_\infty^m$, 若 $I = \{i \mid \beta_i \neq 0\}, \mu = \inf\{\beta_i \epsilon e_i \mid e \in \text{int} E, i \in I\}, 0 \leq \bar{\epsilon} \leq \max\{0, \frac{\mu}{2}\}$, 且 $\hat{x}$ 是 $(SOP)_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解, 则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 E -弱有效解。

证明 由 $E \subset \mathbf{R}_\infty^m$ 是关于 $\mathbf{R}_\infty^m$ 的改进集易证 E 是 Co-radiant 集, 从而由定理 1 可得 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 E -弱有效解。

定理 2 令 $\epsilon > 0, C \subset \mathbf{R}_\infty^m$ 是 Co-radiant 集, $\beta \in \mathbf{R}_\infty^m$, 若 $I = \{i \mid \beta_i \neq 0\}, \mu = \inf\{\beta_i \epsilon c_i \mid c \in C \setminus \{0\}, i \in I\}, 0 \leq \bar{\epsilon} \leq \max\{0, \frac{\mu}{2}\}$, 且 $\hat{x}$ 是 $(SOP)_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -严格最优解, 则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解。

证明 反证法, 假设 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解, 则:

$$(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-C(\epsilon)) \not\subset \{0\}.$$

即存在 $\tilde{x} \in X, c \in C \setminus \{0\}$ 使得 $f_i(\tilde{x}) - f_i(\hat{x}) = -\epsilon c_i$, 其中 $\epsilon c_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$, 则:

$$\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{x}) - f_i^*) = \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^* - \epsilon c_i).$$

令 $\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^* - \epsilon c_i) = \beta_k (f_k(\hat{x}) - f_k^*) - \beta_k \epsilon c_k$, 由 $\bar{\epsilon} \leq \frac{\mu}{2}$ 可得:

$$\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{x}) - f_i^*) = \beta_k (f_k(\hat{x}) - f_k^*) - \beta_k \epsilon c_k \leq \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^*) - \mu \leq \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^*) - \bar{\epsilon}.$$

这与 $\hat{x}$ 是 $(SOP)_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -严格最优解矛盾, 故 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解。

推论 2 令 $E \subset \mathbf{R}_\infty^m$ 是关于 $\mathbf{R}_\infty^m$ 的改进集, $\beta \in \mathbf{R}_\infty^m$, 若 $I = \{i \mid \beta_i \neq 0\}, \mu = \inf\{\beta_i \epsilon e_i \mid e \in E \setminus \{0\}, i \in I\}, 0 \leq \bar{\epsilon} \leq \max\{0, \frac{\mu}{2}\}$, 且 $\hat{x}$ 是 $(SOP)_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -严格最优解, 则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 E -有效解。

证明 由 $E \subset \mathbf{R}_\infty^m$ 是 Co-radiant 集和定理 2 可得 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 E -有效解。

定理 3 令 $\epsilon > 0, C \subset \mathbf{R}_\infty^m$ 是 Co-radiant 集, $\beta \in \mathbf{R}_\infty^m$, 若 $I = \{i \mid \beta_i \neq 0\}, \mu = \inf\{\beta_i \epsilon c_i \mid c \in C, i \in I\}, 0 \leq \bar{\epsilon} \leq \max\{0, \frac{\mu}{2}\}$, 且 $\hat{x}$ 是 $(SOP)_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解, 则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解。

证明 反证法。假设 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解, 则:

$$(f(X) - f(\hat{x})) \cap (-C(\epsilon)) \not\subset \{0\}.$$

即存在 $\tilde{x} \in X, c \in C \setminus \{0\}$ 使得 $f_i(\tilde{x}) - f_i(\hat{x}) = -\epsilon c_i$, 其中 $\epsilon c_i > 0, i = 1, 2, \dots, m$, 则:

$$\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{x}) - f_i^*) = \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^* - \epsilon c_i).$$

令 $\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^* - \epsilon c_i) = \beta_k (f_k(\hat{x}) - f_k^*) - \beta_k \epsilon c_k$ 。则:

$$0 < \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{x}) - f_i^*) = \beta_k (f_k(\hat{x}) - f_k^*) - \beta_k \epsilon c_k \leq \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{x}) - f_i^*) - \beta_k \epsilon c_k.$$

又由 $\beta_k > 0$ 可知 $\beta_k \epsilon c_k > 0$, 下证 $\bar{\epsilon} < \beta_k \epsilon c_k$ 。

1) 当 $\mu = 0$ 时, $\bar{\epsilon} = 0$, 则 $\bar{\epsilon} < \beta_k \epsilon c_k$;

2) 当 $\mu > 0$ 时, 由 $\mu \leq \beta_k \epsilon c_k$ 和 $\bar{\epsilon} \leq \frac{\mu}{2}$ 可得 $\bar{\epsilon} < \beta_k \epsilon c_k$ 。

因此, $\max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\tilde{\mathbf{x}}) - f_i^*) < \max_{0 \leq i \leq m} \beta_i (f_i(\hat{\mathbf{x}}) - f_i^*) - \bar{\epsilon}$, 这与 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 $(\text{SOP})_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解矛盾, 故 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解。

注 2 当 $C \subset \mathbf{R}_{\geq}^m$ 时, 定理 3 在 C 是凸 Co-radiant 集条件下也不一定成立。

例 2 考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) = (x_1, x_2) \\ \text{s. t. } \mathbf{x} \in X &= \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, -4 \leq x_2 \leq 0\}. \end{aligned}$$

令 $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 1\}$ 。此时 C 为凸 Co-radiant 集, 且 $C \subset \mathbf{R}_{\geq}^m$ 。取 $\epsilon = 1, \beta = (1, 0)$, 则 $C(\epsilon) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 1\}, \bar{\epsilon} = 0$, 其中 $f(X) = \{(x_1, x_2) \mid x_1 = 0, -4 \leq x_2 \leq 0\}$, 显然 $\hat{\mathbf{x}} = (0, 0)$ 是 $(\text{SOP})_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解, 又由 $(f(X) - f(\hat{\mathbf{x}})) \cap (-C(\epsilon)) \not\subset \{\mathbf{0}\}$ 可知 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是 (MOP) 的 (C, ϵ) -有效解。

推论 3 令 $E \subset \mathbf{R}_{>}^m$ 是关于 $\mathbf{R}_{>}^m$ 的改进集, $\beta \in \mathbf{R}_{>}^m$, 若 $I = \{i \mid \beta_i \neq 0\}, \mu = \inf_{i \in I} \{\beta_i \epsilon e_i \mid e \in E\}, 0 \leq \bar{\epsilon} \leq \max\left\{0, \frac{\mu}{2}\right\}$, 且 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 $(\text{SOP})_\beta$ 的 $\bar{\epsilon}$ -最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 E -有效解。

证明 由 $E \subset \mathbf{R}_{>}^m$ 是关于 $\mathbf{R}_{>}^m$ 的改进集易证 E 是 Co-radiant 集, 从而由定理 3 可得 $\hat{\mathbf{x}}$ 是 (MOP) 的 E -有效解。

注 3 定理 1~3 推广了文献[21-23]中的相应结果到 (C, ϵ) -近似解和 E -近似解。事实上, 若 $\epsilon = 0, \mathbf{R}_{\geq}^m = C(0) \cup \{\mathbf{0}\}$, 则 (C, ϵ) -有效解退化为有效解; 若 $\epsilon = 1, C = \mathbf{R}_{\geq}^m + \epsilon$, 则 (C, ϵ) -弱有效解退化为弱有效解。

参考文献:

- [1] LUC D T. Theory of vector optimization[M]. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [2] JAHN J. Vector optimization: Theory, applications, and extensions[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2004.
- [3] CHEN G Y, HUANG X, YANG X. Vector optimization: Set-valued and variational analysis[M]. Berlin: Springer-Verlag, 2005.
- [4] 林铨云, 董家礼. 多目标最优化的方法与理论[M]. 吉林: 吉林教育出版社, 1992.
- [5] LIN C Y, DONG J L. Method and Theory of Multi-objective optimization[M]. Jilin: Jilin Education Press, 1992.
- [6] ZHAO K Q, YANG X M. Characterizations of efficient and weakly efficient points in nonconvex vector optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2015, 61(3): 575-590.
- [7] BENSON H P. An improved definition of proper efficiency for vector maximization with respect to cones[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1979, 71(1): 232-241.
- [8] BORWEIN J M, ZHUANG D. Super efficiency in vector optimization[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1993, 338(1): 105-122.
- [9] RONG W D, MAY. ϵ -properly efficient solutions of vector optimization problems with set-valued maps[J]. OR Transactions, 2000, 4(4): 21-32.
- [10] LIU J C. ϵ -properly efficient solutions to nondifferentiable multiobjective programming problems[J]. Applied Mathematics Letters, 1999, 12(6): 109-113.
- [11] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. On approximate efficiency in multiobjective programming[J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2006, 64(1): 165-185.
- [12] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. A unified approach and optimality conditions for approximate solutions of vector optimization problems[J]. SIAM Journal on Optimization, 2006, 17(3): 688-710.
- [13] KUTATELADZE S. Convex ϵ -programming[J]. Soviet Mathematics Doklady, 1979, 20: 391-393.
- [14] LORIDAN P. ϵ -solutions in vector minimization problems[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1984, 43(2): 265-276.
- [15] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Optimality conditions via scalarization for a new ϵ -efficiency concept in vector optimization problems[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 201(1): 11-22.
- [16] CHICCO M, MIGNANEGO F, PUSILLO L, et al. Vector optimization problems via improvement sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2011, 150(3): 516-529.
- [17] GUTIÉRREZ C, JIMÉNEZ B, NOVO V. Improvement sets and vector optimization[J]. European Journal of Operational Research, 2012, 223(2): 304-311.
- [18] ZHAO K Q, YANG X M, PENG J W. Weak ϵ -optimal solution in vector optimization[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(4): 1287-1302.

- [18] ZHAO K Q, YANG X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2015, 64(4): 739-752.
- [19] XIA Y M, ZHANG W L, ZHAO K Q. Characterizations of improvement sets via quasi interior and applications in vector optimization[J]. Optimization Letters, 2016, 10(4): 769-780.
- [20] BOWMAN JR V J. On the relationship of the Tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives[C]// Multiple Criteria Decision Making: Proceedings of a Conference Jouy-en-Josas, Berlin, Heidelberg; Springer Berlin Heidelberg, 1976: 76-86.
- [21] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin; Springer-Verlag, 2005.
- [22] KASIMBEYLI R, OZTURK Z K, YALCIN G D, et al. Comparison of some scalarization methods in multiobjective optimization [J]. Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society, 2019, 42(5): 1875-1905.
- [23] KLAMROTH K, JORGEN T. Constrained optimization using multiple objective programming [J]. Journal of Global Optimization, 2007, 37(3): 325-355.
- [24] 徐威娜, 朱巧, 赵克全. 多目标优化近似解的一些非线性标量化性质[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(6): 7-10.
XU W N, ZHU Q, ZHAO K Q. Nonlinear scalarization characterizations of approximate solutions in multi-objective optimization[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(6): 7-10.
- [25] XIA Y M, YANG X M, ZHAO K Q. A combined scalarization method for multi-objective optimization problems [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2021, 17(5): 2669-2683.
- [26] 赵克全, 杨新民, 夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(2): 411-424.
ZHAO K Q, YANG X M, XIA Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems [J]. Science China: Mathematica, 2021, 51(2): 411-424.
- [27] 夏远梅. 多目标优化问题的标量化方法及其在机器学习中的应用[D]. 上海: 上海大学, 2020.
XIA Y M. Scalarization methods of multi-objective optimization problems and its applications in machine learning [D]. Shanghai; Shanghai University, 2020.

Special Topics on Optimization Theory and Algorithm

Weighted Tchebycheff Scalarization for Unified Solutions of Multi-Objective Optimization Problems

FENG Pan, XIA Yuanmei, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The scalarization properties of (C, ϵ) -type and E -type unified solutions for multi-objective optimization problems are studied. First, the weighted Tchebycheff scalarization method proposed by Bowman et al. is employed to establish the scalarization results of (C, ϵ) -weakly efficient solutions and E -weakly efficient solutions for multi-objective optimization problems. Furthermore, based on the weighted Tchebycheff scalarization method, the scalarization results of (C, ϵ) -efficient solutions and E -efficient solutions for multi-objective optimization problems are established. Some weighted Tchebycheff scalarization results of (C, ϵ) -(weakly) efficient solutions and E -(weakly) efficient solutions for multi-objective optimization problems are obtained by adjusting parameters range of the scalarization model. The obtained scalarization results are an extension of some existing work and provide a theoretical basis for algorithm design for solving multi-objective optimization problems.

Keywords: multi-objective optimization problems; (C, ϵ) -(weakly) efficient solutions; E -(weakly) efficient solutions; weighted Tchebycheff scalarization method

(责任编辑 陈 乔)