

E - α -预不变凸区间值函数及最优性条件^{*}

彭健益, 彭再云, 邓春艳, 文 铭

(重庆交通大学 数学与统计学院, 重庆 400074)

摘要:在LU序关系下获得了一类新的广义凸区间值函数—— E - α -预不变凸区间值函数,并获得了相关性质及它的最优性条件。结合理论推导和例证,给出了例子验证 E - α -预不变凸区间值函数的存在性;并讨论关于 E - α -预不变凸区间值函数的基本性质,得到了 E -可微情形下的必要条件;最后获得了在区间值约束情形下 E - α -预不变凸区间值规划问题的最优性充分条件,并举例验证结论成立。研究将广义凸函数推广至 E - α -预不变凸区间值情形,在一定程度上丰富了广义凸函数的研究,使它的应用性更加广泛。

关键词: E - α -预不变凸区间值函数;区间值;最优性

中图分类号:O221

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)02-0007-09

在现实生活中,凸性在各个方面都有深刻的体现。凸函数和广义凸函数在金融、科技、交通等领域有着十分重要的应用,并且凸性与广义凸性在运筹学和经济学研究中扮演着重要的角色。在研究最优化问题时,凸性也拥有着不可或缺的地位,并起着十分重要的作用。众多学者对广义凸性及相关理论进行了分析与研究,取得了一系列较为丰富的成果。1981年,Hanson^[1]首先提出不变凸函数的基础概念及相关性质。1986年,Ben-Israel等人^[2]在文献[1]的基础上研究了可微情况下不变凸函数的性质。1988年,Weir等人^[3]给出了预不变凸性非线性规划问题的最优性条件和对偶结果。1999年,Youness^[4]提出了 E -凸集和 E -不变凸函数的定义,并得到了它们在 E -凸规划问题中的一些应用结果。2001年,Yang^[5]指出了文献[4]中的几个错误结论并进行了修正。2009年,Fulga等人^[6]在文献[3]研究的预不变凸基础上提出了 E -预不变凸函数的定义,得到了 E -预不变凸函数的几个性质,并获得了在非线性规划问题中的几个应用结果。2015年,杨新民等人^[7]较为系统地阐述了多类凸性与广义凸性及它们在经济学和运筹学中的应用;同年彭再云等人^[8]提出了一类新的广义凸函数—— G - E -半预不变凸函数,并获得 G - E -半预不变凸多目标规划问题的最优性结果。有关广义凸性及规划问题最优性研究可见文献[9-14]。2020年,陈雪静等人^[15]研究了 α - E -半预不变凸型函数的性质及 α - E -半预不变凸多目标规划问题的最优性充要条件。2021年,彭志莹等人^[16]提出了 α - D -半预不变凸映射,并获得 α - D -半预不变凸向量规划问题最优性充分条件。

在社会生活中,实际优化问题或多或少都存在着不确定性因素,因此不确定性优化问题得到了众多学者的关注与研究。在不确定性优化问题的研究中,由于区间值优化问题本身具有不确定性,所以用区间数形式表达的优化问题对于不确定性优化问题具有很好的适用性。因此,近些年来有关区间值函数的研究也成为了一个热点。2007年,Wu^[17]提出了区间值函数的概念,这是一类新的区间值优化问题。2014年,Zhang等人^[18]将实值函数的不变凸性和预不变凸性的概念推广到区间值函数的情形下,并研究了预不变凸区间值规划问题的KKT最优性条件与对偶性。2019年,Antczak等人^[19]建立了含有等式约束与不等式约束的多目标非凸向量优化问题,并得到该问题的 E -KKT最优性充分条件与必要条件。2021年,邓春艳等人^[20]提出了 E -预不变凸区间值函数的概念,在 E -可微假设下研究了 E -预不变凸区间值函数的最优性条件。

^{*} 收稿日期:2023-06-09 修回日期:2024-01-17 网络出版时间:2024-05-13T18:19

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 12271067);重庆市教育委员会科学技术研究计划重点项目(No. KJZD-202200704);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT21021);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2021jcyjmsxmX0080);重庆市研究生联合培养基地建设项目(No. JDLHPYJD2021016);重庆交通大学院级研究生科研创新基金(No. 2022ST006)

第一作者简介:彭健益,男,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail: pengjy892@163.com;通信作者:彭再云,男,教授,博士生导师,E-mail: pengzaiyun@126.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20240513.0943.010>

受已有文献^[17,20-22]启发,本文提出了一类新的区间值函数—— E - α -预不变凸区间值函数,讨论了该函数的重要性质,并研究了一类 E - α -预不变凸区间值规划问题的 KKT 最优性充分条件。

1 预备知识

用 I 来表示实数集 $\mathbf{R}$ 中所有闭区间构成的集族, $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间。设 $A = [a^L, a^U] \in I$ 是一个闭区间, a^L 表示区间的上界, a^U 表示区间的下界, 同理设闭区间 $B = [b^L, b^U] \in I$ 。相关运算定义如下: 1) $A + B = \{a + b; a \in A, b \in B\} = [a^L + b^L, a^U + b^U]$; 2) $-A = \{-a; a \in A\} = [-a^U, -a^L]$; 3) $kA = \{ka; a \in A\} = \begin{cases} [ka^L, ka^U], k \geq 0 \\ [ka^U, ka^L], k < 0 \end{cases}$ ($k \in \mathbf{R}$); 4) $A \times B = \{ab; a \in A, b \in B\} = [\min_{ab}, \max_{ab}]$ 。其中: $\min_{ab} = \min\{a^L b^L, a^L b^U, a^U b^L, a^U b^U\}$, $\max_{ab} = \max\{a^L b^L, a^L b^U, a^U b^L, a^U b^U\}$ 。此外, 根据运算规则还可以得到 $A - B = A + (-B) = [a^L - b^U, a^U - b^L]$ 。

设 $A = [a^L, a^U]$ 和 $B = [b^L, b^U]$ 是 $\mathbf{R}$ 上的 2 个闭区间, 序关系 $A \leq_{LU} B$ 成立当且仅当 $a^L \leq b^L$ 和 $a^U \leq b^U$ 。 $A <_{LU} B$ 成立当且仅当 $A \leq_{LU} B$ 且 $A \neq B$, 即下列情况之一成立: 1) $a^L < b^L$ 且 $a^U \leq b^U$; 2) $a^L \leq b^L$ 且 $a^U < b^U$; 3) $a^L < b^L$ 且 $a^U < b^U$ 。

下面给出 Hausdorff 度量的定义。设 $A \subset \mathbf{R}^n, B \subset \mathbf{R}^n$, 则 A 与 B 之间的 Hausdorff 度量的定义为:

$$d_H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} \inf_{b \in B} \|a - b\|, \sup_{b \in B} \inf_{a \in A} \|a - b\|\},$$

其中: $\|\cdot\|$ 是欧几里得范数, 定义为 $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$, $\forall x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^n$ 。

对于任意区间 $C = [c^L, c^U] \in \mathbf{R}, D = [d^L, d^U] \in \mathbf{R}$, Hausdorff 度量为: $d_H(C, D) = \max\{|c^L - d^L|, |c^U - d^U|\}$ 。

设有集合 $\{A_n\}$ 和 A 均属于 I , 如果 $\forall \epsilon > 0$, 这里 $\exists N > 0$, 使得当 $n > N$ 时, 有 $d_H(A_n, A) < \epsilon$, 则闭区间集合列 $\{A_n\}$ 收敛于 A , 用 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ 来表示。

命题 1^[17] 设 $\{A_n = [a_n^L, a_n^U]\}$ 和 $A = [a^L, a^U]$ 都是在 I 上的闭区间。称 $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = A$ 当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^L = a^L$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^U = a^U$ 。

f 是一个定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的区间值函数, 对任意 $x \in \mathbf{R}^n, f(x) = f(x_1, \cdots, x_n)$ 是在 $\mathbf{R}$ 上的闭区间, 即 $f(x) = [f^L(x), f^U(x)]$, 其中 f^L 和 f^U 是实值函数且满足 $f^L(x) \leq f^U(x)$ 。

定义 1^[23] 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的区间值函数, $A = [a^L, a^U]$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的闭区间, 对于 $c \in \mathbf{R}^n$, 若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $\|x - c\| < \delta$ 时, 有 $d_H(f(x), A) < \epsilon$, 则称区间值函数 $f(x)$ 收敛于 A , 记为 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ 。

命题 2^[17] 设 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的区间值函数, $A = [a^L, a^U]$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的区间, 则 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = A$ 当且仅当 $\lim_{x \rightarrow c} f^L(x) = a^L$ 和 $\lim_{x \rightarrow c} f^U(x) = a^U$ 成立。

根据命题 1 与命题 2 可得区间值函数连续性的如下性质。

命题 3^[17] 设区间值函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow I$, f 在 $x \in \mathbf{R}^n$ 处连续, 当且仅当 f^L 和 f^U 都在 x_0 处连续。

定义 2^[24] 设区间值函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow I, X \in \mathbf{R}^n$, 则: 1) 如果 f^L 和 f^U 都在 $x_0 \in X$ 处是可微的, 则称 f 在 $x_0 \in X$ 处是弱可微的; 2) 如果 f^L 和 f^U 都在 $x_0 \in X$ 处是连续可微的, 则称 f 在 $x_0 \in X$ 处是弱连续可微的。

下面回顾 E -可微实值函数与 E -可微区间值函数的定义。

定义 3^[19] 设实值函数 $F: \mathbf{R}^n \rightarrow I, x_0 \in \mathbf{R}, E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 称 F 在 x_0 处 E -可微当且仅当 $F(E(\cdot))$ 是一个可微实值函数, 即: $F(E(x)) = F(E(x_0)) + \nabla F(E(x))(x - x_0) + \theta(x_0, x - x_0) \|x - x_0\|$, 其中: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\theta(x_0, x - x_0) \rightarrow 0$ 。

定义 4^[19] 设区间值函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow I, x_0 \in \mathbf{R}, E: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$, 称 $f(x) = [f^L(x), f^U(x)]$ 在 x_0 处 E -可微当且仅当实值函数 $f^L(E(\cdot))$ 和 $f^U(E(\cdot))$ 是可微函数, 即:

$$f^L(E(x)) = f^L(E(x_0)) + \nabla f^L(E(x))(x - x_0) + \theta^L(x_0, x - x_0) \|x - x_0\|,$$

$$f^U(E(x)) = f^U(E(x_0)) + \nabla f^U(E(x))(x - x_0) + \theta^U(x_0, x - x_0) \|x - x_0\|,$$

其中: 当 $x \rightarrow x_0$ 时, $\theta^L(x_0, x - x_0) \rightarrow 0, \theta^U(x_0, x - x_0) \rightarrow 0$ 。

2 E - α -预不变凸区间值函数的定义及基本性质

本节用 LU 序关系定义了一类新的区间值函数—— E - α -预不变凸区间值函数,并给出它的定义及基本性质。在本文中,设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧几里得空间, K 为 $\mathbf{R}^n$ 的一个非空子集, $\alpha: K \times K \rightarrow \mathbf{R} \setminus \{0\}$ 为实值函数, $\eta: K \times K \rightarrow \mathbf{R}^n$ 为非零向量值函数, $E: K \rightarrow K$ 为映射。

定义 5^[21] 如果对任意 $x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$, 存在 η 和 α , 使得 $E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y)) \in K$, 则称 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集。

下面回顾 E - α -预不变凸实值函数的定义。

定义 6^[11] 设 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集。如果存在函数 $F: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 对任意 $x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$, 有: $f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) \leq \lambda F(E(x)) + (1-\lambda)F(E(y))$, 则称 F 是关于 η 和 α 的 E - α -预不变凸实值函数。

受已有文献^[11, 15, 18]启发, 下面给出 E - α -预不变凸区间值函数的定义。

定义 7 设 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集。如果存在区间值函数 $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$, 对任意 $x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$, 有: $f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y))$, 则称 f 是关于 η 和 α 的 E - α -预不变凸区间值函数。

注 1 f 是定义在 K 上关于 η 和 α 的 E - α -预不变凸区间值函数, 当且仅当 f^L 和 f^U 是定义在 K 上关于同一 η 和 α 的 E - α -预不变凸实值函数。

下面用例子来说明 E - α -区间值函数的存在性。

例 1 设 $K = [-2, -1] \cup [1, 2]$, $f(x) = [x + 3, x + 7]$, $\alpha(E(x), E(y)) = E(x) \cdot E(y)$, $E(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq \sqrt{2} \\ 1, & |x| > \sqrt{2} \end{cases}$, $\eta(E(x), E(y)) = \begin{cases} (E(x) - E(y)) / (E(x) \cdot E(y)), & xy > 0 \\ (1 - E(y)) / (E(x) \cdot E(y)), & xy < 0 \end{cases}$, 取任意 $x, y \in K, \lambda \in [0, 1]$ 。

验证 首先 K 是关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集, 这是显然成立的。下面将验证 f 是 E - α -预不变凸区间值函数。根据定义 7 可得 E - α -预不变凸函数有:

$$f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y)).$$

因为 f 是区间值函数, 所以可展开为区间形式, 下面分类进行讨论。

1) 当 $E(x) = x^2$ 且 $xy > 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) &= [(1-\lambda)y^2 + \lambda x^2 + 3, (1-\lambda)y^2 + \lambda x^2 + 7], \\ \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y)) &= [\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 + 3, \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 + 7]. \end{aligned}$$

根据注 1 可知, 在 $E(x) = x^2$ 且 $xy > 0$ 的情况下满足:

$$f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y)).$$

2) 当在 $E(x) = x^2$ 且 $xy < 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) &= [\lambda + (1-\lambda)y^2 + 3, \lambda + (1-\lambda)y^2 + 7], \\ \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y)) &= [\lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 + 3, \lambda x^2 + (1-\lambda)y^2 + 7]. \end{aligned}$$

由 $|x| \leq \sqrt{2}$, 有 $1 \leq x^2 \leq 2$, 则:

$$\begin{aligned} f^L(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) - (\lambda f^L(E(x)) + (1-\lambda)f^L(E(y))) &= \\ \lambda + (1-\lambda)y^2 + 3 - \lambda x^2 - (1-\lambda)y^2 - 3 &= \lambda - \lambda x^2 \leq 0, \\ f^U(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) - (\lambda f^U(E(x)) + (1-\lambda)f^U(E(y))) &= \\ \lambda + (1-\lambda)y^2 + 7 - \lambda x^2 - (1-\lambda)y^2 - 7 &= \lambda - \lambda x^2 \leq 0. \end{aligned}$$

所以, 在 $E(x) = x^2$ 且 $xy < 0$ 情形下满足:

$$f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y)).$$

3) 当 $E(x) = 1$ 且 $xy > 0$ 时, 有:

$$\begin{aligned} f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) &= [4, 8], \\ \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y)) &= [4, 8], \end{aligned}$$

则在 $E(x) = 1$ 且 $xy > 0$ 情形下满足:

$$f(E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) \leq_{LU} \lambda f(E(x)) + (1-\lambda)f(E(y)).$$

4) 当 $E(x)=1$ 且 $xy < 0$ 时, 同理可得类似结果。

综上所述, f 是 E - α -预不变凸区间值函数。

定理 1 设 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集。如果 F 是定义在 K 上的 E - α -预不变凸 E -可微函数, 则对任意 $x_1, x_2 \in K$, 有: $\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))\nabla F(E(x_2))^T \leq F(E(x_1)) - F(E(x_2))$ 。

证明 由 F 是定义在 K 上的 E - α -预不变凸 E -可微函数可得:

$$F(E(x_2) + \lambda\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))) \leq \lambda F(E(x_1)) + (1-\lambda)F(E(x_2)) = F(E(x_2)) + \lambda(F(E(x_1)) - F(E(x_2))),$$

则上式对任意 $\lambda > 0$, 有:

$$\frac{F(E(x_2) + \lambda\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))) - F(E(x_2))}{\lambda} \leq F(E(x_1)) - F(E(x_2)),$$

即:

$$\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2)) \cdot \frac{F(E(x_2) + \lambda\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))) - F(E(x_2))}{\lambda\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))} \leq F(E(x_1)) - F(E(x_2)).$$

求极限当 $\lambda \rightarrow 0^+$ 可得: $\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))\nabla F(E(x_2))^T \leq F(E(x_1)) - F(E(x_2))$ 。 证毕

定理 2 设 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集。如果 f 是定义在 K 上的 E - α -预不变凸 E -可微区间值函数, 则对任意 $x_1, x_2 \in K$, 有:

$$\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))\nabla f^L(E(x_2))^T \leq f^L(E(x_1)) - f^L(E(x_2)),$$

且

$$\alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))\nabla f^U(E(x_2))^T \leq f^U(E(x_1)) - f^U(E(x_2)).$$

证明 由 LU 序关系、注 1 和定理 2 可证。 证毕

条件 C^[21] 设 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集, 称 η 和 α 满足条件 C; 若对任意 $x, y \in K$, 任意 $\lambda \in [0, 1]$, 有:

$$(1-\lambda)\eta(E(x), E(y)) = \eta(E(x), E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))), \\ -\lambda\eta(E(x), E(y)) = \eta(E(y), E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))).$$

注 2 不难验证, η 和 α 满足条件 C 时, 非零向量函数 η 满足以下单射性质, 即对任意 $x, y \in K$, 有:

$$\eta(x, y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) = \eta(y, y + \lambda\alpha(x, y)\eta(x, y)) \Rightarrow x = y.$$

文献[21]得出了如下重要性质。

引理 1^[21] 设 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集, 且 $E(\cdot)$ 是满射。假设对任意 $x, y \in K$, 任意 $\lambda \in [0, 1]$, 有:

$$-\lambda\eta(E(x), E(y)) = \eta(E(y), E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))), \\ \alpha(E(x), E(y)) = \alpha(E(y), E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))),$$

则对任意 $\lambda_1, \lambda_2 \in (0, 1]$, 有:

$$\eta(E(y) + \lambda_1\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y)), E(y) + \lambda_2\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) = (\lambda_1 - \lambda_2)\eta(E(x), E(y)), \quad (1)$$

且

$$\alpha(E(y) + \lambda_1\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y)), E(y) + \lambda_2\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) = \alpha(E(x), E(y)). \quad (2)$$

受引理 1 启发可得如下引理。

引理 2 设 K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集。假设 η 和 α 满足引理 1 条件且满足条件 C, 则对任意 $x, y \in K$, 任意 $\lambda \in [0, 1]$, 有: $\alpha(E(x), E(y)) = \alpha(E(x), E(y) + \lambda\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y)))$ 。

证明 当式(1)中 $\lambda_1 = 1$ 时, 由引理 1 和条件 C 可得:

$$\eta(E(y) + \alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y)), E(y) + \lambda_2\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) = (1 - \lambda_2)\eta(E(x), E(y)) = \eta(E(x), E(y) + \lambda_2\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))).$$

通过上式与注 2 可知, $E(x) = E(y) + \alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))$ 。当式(2)中 $\lambda_1 = 1$ 且 $E(x) = E(y) +$

$\alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))$ 时, 有:

$$\alpha(E(x), E(y)) = \alpha(E(y) + \alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y)), E(y) + \lambda_2 \alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))) = \alpha(E(x), E(y) + \lambda_2 \alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y))),$$

所以 $\alpha(E(x), E(y)) = \alpha(E(x), E(y) + \lambda \alpha(E(x), E(y))\eta(E(x), E(y)))$ 成立。证毕

定理 3 设 $K \subset \mathbf{R}^n$ 是关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集, f 是定义在 K 上的 E -可微区间值函数。假设 η 和 α 满足条件 C 且满足引理 2 的假设, 对任意 $x_1, x_2 \in K$, 有:

$$\begin{aligned} \alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))\nabla f^L(E(x_2))^T &\leq f^L(E(x_1)) - f^L(E(x_2)), \\ \alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))\nabla f^U(E(x_2))^T &\leq f^U(E(x_1)) - f^U(E(x_2)), \end{aligned}$$

则 f 是关于同一 η 和 α 的 E - α -预不变凸区间值函数。

证明 设 $x_1, x_2 \in K, \lambda \in [0, 1]$, 且由 E - α -不变凸集的定义可得:

$$E(\bar{x}) = E(x_2) + \lambda \alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2)) \in K.$$

由定理 2 可知, 在 $E(x_1), E(\bar{x})$ 这 2 点处有:

$$\alpha(E(x_1), E(\bar{x}))\eta(E(x_1), E(\bar{x}))\nabla f^L(E(\bar{x}))^T \leq f^L(E(x_1)) - f^L(E(\bar{x})) \quad (3)$$

与

$$\alpha(E(x_1), E(\bar{x}))\eta(E(x_1), E(\bar{x}))\nabla f^U(E(\bar{x}))^T \leq f^U(E(x_1)) - f^U(E(\bar{x})). \quad (4)$$

同理, 在 $E(x_2), E(\bar{x})$ 这 2 点处有:

$$\alpha(E(x_2), E(\bar{x}))\eta(E(x_2), E(\bar{x}))\nabla f^L(E(\bar{x}))^T \leq f^L(E(x_2)) - f^L(E(\bar{x})) \quad (5)$$

与

$$\alpha(E(x_2), E(\bar{x}))\eta(E(x_2), E(\bar{x}))\nabla f^U(E(\bar{x}))^T \leq f^U(E(x_2)) - f^U(E(\bar{x})). \quad (6)$$

将式(3)乘以 λ 、式(5)乘以 $(1-\lambda)$, 然后相加可得:

$$\begin{aligned} \lambda f^L(E(x_1)) + (1-\lambda)f^L(E(x_2)) - f^L(E(\bar{x})) &\geq \\ \nabla f^L(E(\bar{x}))^T (\lambda \alpha(E(x_1), E(\bar{x}))\eta(E(x_1), E(\bar{x})) &+ (1-\lambda)\alpha(E(x_2), E(\bar{x}))\eta(E(x_2), E(\bar{x}))). \end{aligned}$$

由 $E(\bar{x}) = E(x_2) + \lambda \alpha(E(x_1), E(x_2))\eta(E(x_1), E(x_2))$ 与条件 C 可知:

$$\begin{aligned} \lambda \alpha(E(x_1), E(\bar{x}))\eta(E(x_1), E(\bar{x})) &+ (1-\lambda)\alpha(E(x_2), E(\bar{x}))\eta(E(x_2), E(\bar{x})) = \\ \lambda \alpha(E(x_1), E(\bar{x}))(1-\lambda)\eta(E(x_1), E(x_2)) &+ (1-\lambda)\alpha(E(x_2), E(\bar{x}))(-\lambda)\eta(E(x_1), E(x_2)) = \\ \lambda(1-\lambda)\eta(E(x_1), E(x_2))(\alpha(E(x_1), E(\bar{x})) &- \alpha(E(x_2), E(\bar{x}))). \end{aligned}$$

由引理 1 与引理 2 可知 $\alpha(E(x_1), E(\bar{x})) - \alpha(E(x_2), E(\bar{x})) = 0$, 则有:

$$\lambda f^L(E(x_1)) + (1-\lambda)f^L(E(x_2)) - f^L(E(\bar{x})) \geq 0,$$

即 $\lambda f^L(E(x_1)) + (1-\lambda)f^L(E(x_2)) \geq f^L(E(\bar{x}))$ 。

同理, 将式(4)乘以 λ 、式(6)乘以 $(1-\lambda)$, 然后相加可得 $\lambda f^U(E(x_1)) + (1-\lambda)f^U(E(x_2)) \geq f^U(E(\bar{x}))$ 。

综上所述, f^L 和 f^U 都是关于同一 η 和 α 的 E - α -预不变凸实值函数。由注 1 可得, f 是关于同一 η 和 α 的 E - α -预不变凸区间值函数。证毕

3 E - α -预不变凸区间值优化问题最优性条件

本节主要研究一类 E - α -预不变凸区间值优化问题的最优性条件。本节中均假设 E 既是单射又是满射, K 为关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集, 在 E -可微的情形下建立如下优化问题(IVOPE):

$$(IVOPE) \quad \begin{cases} \min f(E(x)) = [f^L(E(x)), f^U(E(x))], \\ \text{s. t. } G_i(E(x)) \leq_{LU} [0, 0], i = 1, \dots, m, \\ x \in X_E, \end{cases}$$

其中: f 与 $G_i(E(x))$ 均为定义在 K 上的 E - α -预不变凸区间值函数, 约束条件 $G_i(E(x)) \leq_{LU} [0, 0]$, 由 LU 序关系可得 $G_i^L(E(x)) \leq 0$ 与 $G_i^U(E(x)) \leq 0 (i = 1, \dots, m)$ 。令 $g_i(E(x)) := G_i^L(E(x)) \leq 0, h_i(E(x)) := G_i^U(E(x)) \leq 0, g_i(E(x))$ 和 $h_i(E(x))$ 为 E - α -预不变凸实值函数, 则问题(IVOPE)的 E -可行集为:

$$X_E = \{x \in K : g_i(E(x)) \leq 0, h_i(E(x)) \leq 0, i = 1, \dots, m\},$$

其中: X_E 为 K 的 E - α -不变凸子集。

引理 3^[17] 给定 2 个矩阵 A, C , 下列 2 个系统中恰好有 1 个解. 系统 1: $Ax \leq 0, Ax \neq 0, Cx \leq 0, \exists x \in \mathbf{R}^n$, 系统 2: $A^T \lambda + C^T \mu = 0, \exists (\lambda, \mu), \lambda > 0, \mu \geq 0$.

定义 8 设 X_E 是非空可行集, $x^* \in \text{cl } X_E$ (X_E 的闭包). 如果存在 $\delta > 0$, 使得 $E(x^*) + \beta d \in X_E$, 对于所有 $\beta \in (0, \delta)$ 成立, 则称 $d \neq 0$ 为在 x^* 处的可行方向, D 称为可行方向集, 记作:

$$D = \{d \in \mathbf{R}^n : d \neq 0, \text{s. t. } E(x^*) + \beta d \in X_E, \forall \beta \in (0, \delta)\}.$$

由文献[17]中积极约束指标集的定义可类似得到如下命题.

命题 4 设 X_E 是非空可行集, 且 $x^* \in X_E$. 假设 G_i 在 x^* 处 E -可微, 对于所有 $i = 1, \dots, m$, 令 $J := \{i : g_i(E(x^*)) = 0, h_i(E(x^*)) = 0\}$ 为积极约束指标集, 则有:

$$D \subseteq \{d \in \mathbf{R}^n : \nabla g_i(E(x^*))^T d \leq 0, \nabla h_i(E(x^*))^T d \leq 0, \forall i \in J\}.$$

定义 9 如果不存在一可行点 $\bar{x} \in X_E$, 使得 $f(E(\bar{x})) <_{\text{LU}} f(E(x^*))$, 那么称 x^* 是问题(IVOPE)的有效解.

$X_E = \{x \in K : g_i(E(x)) \leq 0, h_i(E(x)) \leq 0, i = 1, \dots, m\}$ 为问题(IVOPE)的可行集且点 $x^* \in X_E$. 若 g_i, h_i 是定义在 K 上的 E - α -预不变凸实值函数, 并且对每个 $i = 1, \dots, m$ 在 x^* 处连续 E -可微, 则称实值函数 g_i, h_i 在 x^* 处满足 KKT 假设条件.

下面给出问题(IVOPE)的 KKT 最优性充分条件.

定理 4 设 f 是定义在 K 上的 E -可微 E - α -预不变凸区间值函数, $g_i, h_i, i = 1, \dots, m$ 在 x^* 处满足 KKT 假设条件. 如果存在拉格朗日乘子 $0 < \lambda^L, \lambda^U \in \mathbf{R}$ 且 $0 \leq \mu_i^L, \mu_i^U \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, m$, 有:

$$\lambda^L \nabla f^L(E(x^*)) + \sum_{i=1}^m \mu_i^L \nabla g_i(E(x^*)) = 0, \quad (7)$$

$$\lambda^U \nabla f^U(E(x^*)) + \sum_{i=1}^m \mu_i^U \nabla h_i(E(x^*)) = 0, \quad (8)$$

$$\mu_i^L g_i(E(x^*)) = 0, i = 1, \dots, m, \quad (9)$$

$$\mu_i^U h_i(E(x^*)) = 0, i = 1, \dots, m, \quad (10)$$

则 x^* 是问题(IVOPE)的有效解.

证明 假设 x^* 不是问题(IVOPE)的有效解, 则存在 $\bar{x} \neq x^*$, 使得 $f(E(\bar{x})) <_{\text{LU}} f(E(x^*))$. 由 $f(E(\bar{x})) <_{\text{LU}} f(E(x^*))$ 可知: $f^L(E(\bar{x})) < f^L(E(x^*)), f^U(E(\bar{x})) < f^U(E(x^*)),$ 或者 $f^L(E(\bar{x})) \leq f^L(E(x^*)), f^U(E(\bar{x})) < f^U(E(x^*)),$ 或 $f^L(E(\bar{x})) < f^L(E(x^*)), f^U(E(\bar{x})) \leq f^U(E(x^*)).$

不妨考虑 $f^L(E(\bar{x})) < f^L(E(x^*)), f^U(E(\bar{x})) < f^U(E(x^*))$ 的情形, 其他 2 种情况类似证明. 因为 f 是 E - α -预不变凸 E -可微区间值函数, 则由定理 2 可得:

$$0 > f^L(E(\bar{x})) - f^L(E(x^*)) \geq \nabla f^L(E(x^*))^T \alpha(E(\bar{x}), E(x^*)) \eta(E(\bar{x}), E(x^*)), \quad (11)$$

$$0 > f^U(E(\bar{x})) - f^U(E(x^*)) \geq \nabla f^U(E(x^*))^T \alpha(E(\bar{x}), E(x^*)) \eta(E(\bar{x}), E(x^*)). \quad (12)$$

令 $d := \lambda \alpha(E(\bar{x}), E(x^*)) \eta(E(\bar{x}), E(x^*))$. 由于 X_E 为 E - α -不变凸子集且 $\bar{x}, x^* \in X_E$, 可得对任意 $\beta \in [0, 1], E(x^*) + \beta d = E(x^*) + \beta \lambda \alpha(E(\bar{x}), E(x^*)) \eta(E(\bar{x}), E(x^*)) \in X_E$. 因为 $E(x^*) + \beta d \in X_E$, 则有 $d \in D$.

由命题 4 可知 $\nabla g_i(E(x^*))^T d \leq 0, \nabla h_i(E(x^*))^T d \leq 0, \forall i \in J$. 将式(11)、(12)的两边同时乘以 $\beta \lambda > 0$, 有:

$$0 > \nabla f^L(E(x^*))^T \beta \lambda \alpha(E(\bar{x}), E(x^*)) \eta(E(\bar{x}), E(x^*)),$$

$$0 > \nabla f^U(E(x^*))^T \beta \lambda \alpha(E(\bar{x}), E(x^*)) \eta(E(\bar{x}), E(x^*)).$$

令 $x_0 := \beta \lambda \alpha(E(\bar{x}), E(x^*)) \eta(E(\bar{x}), E(x^*))$. 下面分 2 种情形进行考虑:

1) 首先讨论区间下界 L 情形, 令 $A := \nabla f^L(E(x^*))^T, C := \nabla g_i(E(x^*))^T$, 可得 $Ax_0 < 0, Cx_0 \leq 0$, 则由引理 3 知系统 2 无解, 即不存在 $\lambda^L > 0, 0 \leq \mu_i^L \in \mathbf{R}, i \in J$, 使得:

$$\lambda^L \nabla f^L(E(x^*))^T + \sum_{i \in J} \mu_i^L \nabla g_i(E(x^*))^T = 0. \quad (13)$$

由式(9)可得 $i = 1, \dots, m, \mu_i^L g_i(E(x^*)) = 0$, 当 $i \notin J$, 有 $g_i(E(x^*)) \neq 0$, 即在 $i \notin J$ 时, $\mu_i^L = 0$, 所以有:

$$\sum_{i \in J} \mu_i^L \nabla g_i(E(x^*))^T = \sum_{i=1}^m \mu_i^L \nabla g_i(E(x^*))^T. \quad (14)$$

将式(14)代入式(13), 则不存在 $\lambda^L > 0, 0 \leq \mu_i^L \in \mathbf{R}, i = 1, \dots, m$, 使得 $\lambda^L \nabla f^L(E(x^*))^T + \sum_{i=1}^m \mu_i^L \nabla g_i(E(x^*))^T = 0$,

这与式(7)矛盾。

2) 对于区间上界 U 情形,令 $\mathbf{B} := \nabla f^U(E(x^*))^T, \mathbf{D} := \nabla h_i(E(x^*))^T$,可得 $\mathbf{B}x_0 < 0, \mathbf{D}x_0 \leq 0$,类似可由引理 3 知系统 2 无解,即不存在 $\lambda^U > 0, 0 \leq \mu_i^U \in \mathbf{R}, i \in J$,使得

$$\lambda^U \nabla f^U(E(x^*))^T + \sum_{i \in J} \mu_i^U \nabla h_i(E(x^*))^T = 0. \quad (15)$$

同理,由式(10)可得 $i=1, \dots, m, \mu_i^U h_i(E(x^*))=0$,有:

$$\sum_{i \in J} \mu_i^U \nabla h_i(E(x^*))^T = \sum_{i=1}^m \mu_i^U \nabla h_i(E(x^*))^T. \quad (16)$$

将式(16)代入式(15),可知与式(8)矛盾。

综上所述,优化问题假设均不成立,故 x^* 是问题(IVOPE)的有效解。

证毕

例 2 考虑以下区间值目标规划问题:

$$\begin{aligned} \min f(E(x)) &= [f^L(E(x)), f^U(E(x))], \\ \text{s. t. } g_i(E(x)) &\leq 0, i=1, \dots, m, \\ h_i(E(x)) &\leq 0, i=1, \dots, m, \\ x &\in K, \end{aligned}$$

其中: $K = [-4, -1] \cup [1, 4], E(x) = \begin{cases} x^2, & |x| \leq 2, \\ 1, & |x| > 2, \end{cases}, g_1(x) = x - 5, h_i(x) = x - 1, f(x) = [x + 3, x + 7],$

$$\eta(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{xy}, & xy > 0 \\ \frac{1-y}{xy}, & xy < 0 \end{cases}, \alpha(x, y) = xy.$$

验证 当 $E(x)=1$ 时,相应的目标函数 $f(E(x))=[4, 8]$,约束函数为 $g_1(E(x))=-2, h_i(E(x))=0$ 。当 $E(x)=x^2$ 时,对任意 $x, y \in K$,通过计算可得 $g_i(E(x))=x^2-5, h_i(E(x))=x^2-1, f(E(x))=[x^2+3, x^2+7]$ 。

易证 K 是关于 η 和 α 的 E - α -不变凸集。由例 1 证明类似可得到 $f(x)$ 是 E - α -预不变凸区间值函数, $g_i(x)$ 、 $h_i(x)$ 是 E - α -预不变凸实值函数,通过计算可得: $f^L(E(x))=x^2+3, f^U(E(x))=x^2+7$,满足定理 4 条件,即: $\lambda^L 2x + \mu_1 = 0, \lambda^U 2x - \mu_2 = 0, \mu_1 g_i(E(x)) = \mu_1(x^2-5) = 0, \mu_2 h_i(E(x)) = \mu_2(x^2-1) = 0$ 。

由 $\mu_2 x^* - \mu_2 = 0$ 可知 $x = \pm 1$ 。当 $x = -1$ 时,不存在 $\lambda > 0$,则只有当 x 的取值为 1 时,存在 $\lambda_1 = \frac{1}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \mu_1 = 0, \mu_2 = 1$ 满足条件。即 $x = 1$ 时,定理 4 中式(7)、(8)、(9)和(10)均可满足,则由定理 4 可知 $x = 1$ 是区间值目标规划问题的有效解,分别如图 1(阴影部分即为目标函数部分)和图 2(阴影部分即为满足条件的约束函数部分)所示。

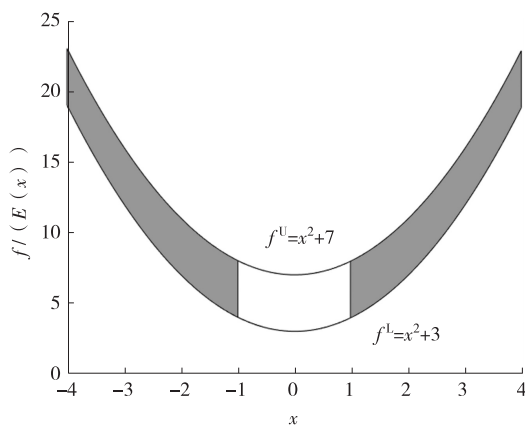


图 1 目标函数图像

Fig. 1 Objective function image

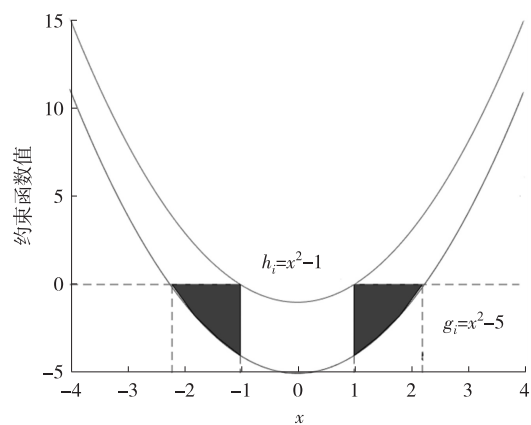


图 2 约束函数图像

Fig. 2 Constraint function image

参考文献:

- [1] HANSON M A. On sufficiency of the Kuhn-Tucker conditions[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1981, 80(2): 545-550.
- [2] BEN-ISRAEL A, MOND B. What is invexity?[J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 1986, 28(1): 1-9.
- [3] WEIR T, MOND B. Preinvex functions in multiple objective optimization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1988, 136(1): 29-38.
- [4] YOUNESS E A. E -convex sets, E -convex functions, and E -convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 102(2): 439-450.
- [5] YANG X M. On E -convex sets, E -convex functions, and E -convex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2001, 109(3): 699-704.
- [6] FULGA C, PREDA V. Nonlinear programming with E -preinvex and local E -preinvex functions[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 192(3): 737-743.
- [7] 杨新民, 戎卫东. 广义凸性及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2016.
- YANG X M, RONG W D. Generalized concavity and applications[M]. Beijing: Science Press, 2016.
- [8] 彭再云, 秦南南, 李科科. G - E -半预不变凸型多目标规划的 Wolfe 型对偶[J]. 应用数学学报, 2015, 38(6): 1103-1114.
- PENG Z Y, QIN N N, LI K K. Wolf type duality of G - E -semi-preinvex type multiobjective programming problems[J]. Acta Mathematica Applicata Sinica, 2015, 38(6): 1103-1114.
- [9] 彭再云, 周选林, 赵勇. 强 G -预不变凸函数的性质及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2012, 29(4): 12-17.
- PENG Z Y, ZHOU X L, ZHAO Y. Characteristics and applications of strongly G -preinvex functions[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2012, 29(4): 12-17.
- [10] 李科科, 彭再云, 刘亚威, 等. 半预拟不变凸性的性质与应用注记[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2017, 34(1): 12-22.
- LI K K, PENG Z Y, LIU Y W, et al. Notes on characterizations and applications of semi-prequasi-invexity[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2017, 34(1): 12-22.
- [11] 彭再云, 王子元, 周亚聪, 等. 一类 E - α -预不变拟凸性与数学规划[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2018, 35(3): 9-16.
- PENG Z Y, WANG Z Y, ZHOU Y C, et al. A class of E - α -prequasi-invexity and mathematical programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2018, 35(3): 9-16.
- [12] PENG Z Y, LI K K, ZHOU J T, et al. Semi-prequasi-invex type multiobjective optimization and generalized fractional programming problems[J]. Journal of Nonlinear Science and Applications, 2016, 9(12): 6142-6152.
- [13] PENG Z Y, CHANG S S. Some properties of semi- G -preinvex functions[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(3): 873-884.
- [14] LI K K, PENG Z Y, LIU Y W, ZENG J. Further study on semi-prequasi-invex type programming[J]. Journal of Advances in Applied Mathematics, 2017, 2(1): 55-62.
- [15] 陈雪静, 彭再云, 邵重阳, 等. α - E -半预不变凸型函数的性质与多目标规划的最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2020, 37(1): 91-98.
- CHEN X J, PENG Z Y, SHAO C Y, et al. Properties of α - E -semi-preinvex convex functions and optimality conditions for multi-objective programming[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2020, 37(1): 91-98.
- [16] 彭志莹, 彭再云, 陈雪静, 等. α - D -半预不变凸映射与最优化[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2022, 39(1): 9-18.
- PENG Z Y, PENG Z Y, CHEN X J, et al. α - D -Semi-preinvex mappings and optimization[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2022, 39(1): 9-18.
- [17] WU H C. The Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 176(1): 46-59.
- [18] ZHANG J K, LIU S Y, LI L F, et al. The KKT optimality conditions in a class of generalized convex optimization problems with an interval-valued objective function[J]. Optimization Letters, 2014, 8(2): 607-631.
- [19] ANTCHAK T, ABDULALEEM N. Optimality conditions for E -differentiable vector optimization problems with the multiple interval-valued objective function[J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2017, 13(5): 1-19.
- [20] 邓春艳, 彭再云, 陈雪静, 等. E -预不变凸区间值函数及其在数学规划中的应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2021, 38(1): 30-38.

- DENG C Y, PENG Z Y, CHEN X J, et al. E -Preinvex interval-valued function and its application in mathematical programming [J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science), 2021, 38(1): 30-38.
- [21] 王子元, 王涇晶, 彭再云, 等. E -拟 α -预不变型凸函数与最优化[J]. 西南大学学报(自然科学版), 2019, 41(9): 77-86.
- WANG Z Y, WANG J J, PENG Z Y, et al. E - α -prequasiinvex-type functions and their optimization[J]. Journal of Southwest University (Natural Science Edition), 2019, 41(9): 77-86.
- [22] ANTCHAK T, ABDULALEEM N. E -differentiable minimax programming under E -convexity [J]. Annals of Operations Research, 2021, 300: 1-22.
- [23] 黎君, 陈加伟, 邓光菊. 广义凸区间值优化问题的最优性条件[J]. 运筹学学报, 2020, 24(4): 25-38.
- LI J, CHEN J W, DENG G J. Optimality conditions of generalized convex interval valued optimization problems[J]. Operations Research Transactions, 2020, 24(4): 25-38.
- [24] 张建科. 广义凸不确定规划的最优性与对偶性[D]. 西安: 西安电子科技大学, 2012.
- ZHANG J K. Optimality and duality for generalized convex uncertain programming[D]. Xi'an: Xidian University, 2012.

Special Topics on Optimization Theory and Algorithm

E - α -Preinvex Interval Valued Function and Optimization Conditions

PENG Jianyi, PENG Zaiyun, DENG Chunyan, WEN Ming

(College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing 400074, China)

Abstract: A new class of generalized convex interval valued functions, E - α -preinvex interval valued functions, is obtained under the LU order relationship, and related properties and optimality conditions are obtained. Combining theoretical deduction and examples, an example is provided to verify the existence of E - α -preinvex interval valued functions, and the basic properties of E - α -preinvex interval valued functions are discussed. The necessary conditions for E -differentiable cases are obtained. Finally, the optimality sufficient conditions for the E - α -preinvex interval valued programming problem under interval valued constraints are obtained, and an example is given to verify the conclusion. This study extends generalized convex function to the case of E - α -preinvex interval valued function, which to some extent enriches the study of generalized convex functions and makes their applications more widespread.

Keywords: E - α -preinvex interval valued functions; interval value; optimality

(责任编辑 方 兴)