

单机带有不可用区间的松弛工期的排序问题^{*}

唐小敏, 张新功

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:研究了在单机情形下具有不可用区间的松弛工期问题,不可用区间意味着在此区间不允许工件加工,且工件中断可恢复。松弛工期是工件加工时间加上1个给定的常数,这个常数为决策变量,排序的任务是给所有工件分配工期,同时确定工件的加工次序以使得目标函数值最小。目标函数值包括由于工件误工、提前及工期分配而导致的相关损失。根据不同的损失系数关系讨论了松弛工期的范围,提出动态规划算法。证明了动态规划的时间复杂性为 $O((P+T-p_{\min})nP^2)$ 。通过算例分析说明了算法的可行性。

关键词:不可用区间;松弛工期;提前损失;误工损失

中图分类号:O223

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)02-0037-05

在经典排序中,常常假设机器可以一直工作,但是在现实生产中,机器可能会突然发生故障或者需要定期维修,导致在一定时间段内不能加工任何工件,这个时间段称为不可用区间。对于机器带有不可用区间情形,Xu等人^[1]提出了一种启发式算法,用于解决固定柔性维修区间且工件不可中断的单机排序问题。Lee等人^[2]对于具有周期性维修区间的单机问题提出了一种启发式算法,目标是 minimized 误工工件数。Mor等人^[3]研究了单机带有维修区间的工期窗问题,并考虑维修区间大小为恒定值、维修区间大小为开始时间的非减函数以及维修区间大小依赖于位置这3种情况,并证明这些问题在多项式时间内可解。Sun等人^[4]研究了具有恶化效应和维修区间的单机排序问题,维修区间为固定值,目标为最大完工时间和工件完工时间之和,并证明这2个问题都是多项式时间可解的,并给出了相应的算法。

松弛工期问题是指所有工件带有共同的公共流 q ,即工件 j 的工期为 $d_j = p_j + q$ 。罗新成等人^[5]研究了具有公共工期窗口指派的凸资源单机排序问题,考虑在资源总量有上界的限制条件下,确定任务的最优排序、公共工期窗口位置和大小以及资源分配方案,使得最大费用最小,以及在最大费用有上界限制条件下,求出资源总量、任务排序、公共工期窗口位置和大小,使得资源总量最小,并证明了这2个问题均可以在多项式时间内求解,分别给出了多项式时间最优算法。Adamopoulos等人^[6]研究了单机松弛工期下费用函数问题,即确定公共流 q 与工件加工次序以使得费用函数最小,费用函数包括提前损失、误工损失以及工期分配费用,其中提前部分为 $E_j = d_j - S_j$,误工部分为 $T_j = C_j - d_j$ 。Shabtay^[7]研究了单机共同松弛工期下费用函数问题,包括提前损失、误工损失以及工期分配费用,证明若工期无界,则在线性时间内可求解;若工期有界,则在 $O(n \log n)$ 时间内可求解。对于共同工期窗口情况,Shabtay^[7]还证明当工期窗口的位置无界时,问题在 $O(n \log n)$ 时间内可求解;当它有界时提供了1个伪多项式时间算法来解决这个问题。Chen^[8]考虑了最小化提前、延迟、工期窗口开始时间和窗时费用问题和带有完工时间惩罚的最大公共工期时间问题,并得到一些最优性质,给出了多项式时间解。Gerstl等人^[9]研究了带有不可用区间的共同松弛工期问题,对于不允许机器空闲的情况提出了伪多项式动态规划算法,然后拓展到允许机器空闲的情况,并引入贪婪型启发式算法。张新功等人^[10]考虑共同工期下总权误工的单机双代理排序问题。通过动态规划方法分析了双代理模型,给出了最优性质、伪多项式时间算法以及时间复杂度分析。

^{*} 收稿日期:2022-11-17 修回日期:2023-12-20 网络出版时间:2023-10-07T14:54

资助项目:国家自然科学基金——重大项目(No. 11991022),面上项目(No. 11971443);重庆市教育委员会科学技术研究计划重点项目(No. KJZD-K202000501);重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2021jcyj-msxmX0229)

第一作者简介:唐小敏,女,研究方向为排序论,E-mail:3215953800@qq.com;通信作者:张新功,男,教授,博士,E-mail:zhangxingong@cqnu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20231006.1609.004

本文将不可用区间与松弛工期结合,研究单机带有不可用区间的松弛工期问题,工件允许中断。在确定松弛工期的同时,确定工件的加工次序以使得目标函数值最小,目标函数为提前损失、误工损失以及工期分配的和。提出了动态规划算法,并证明该问题可在 $O((P+T-p_{\min})nP^2)$ 时间内得到最优解。

1 问题描述及符号表示

存在有 n 个工件 $\{1, \dots, n\}$, 需要在 1 台机器上完成加工, 机器 1 次只能加工 1 个工件且工件允许中断, 所有工件在 0 时刻到达, p_j 为工件 j 的加工时间, S_j 为工件 j 的开始加工时间, $C_j = S_j + p_j$ 为工件 j 的完工时间, d_j 为工件 j 的工期, $P = \sum_{i=1}^n p_i$ 表示所有工件的加工时间之和。进一步, $[j]$ 表示第 j 个位置的工件, 则 $C_{[j]}$ 、 $S_{[j]}$ 、 p_j 分别表示第 j 个位置工件的完工时间、开始加工时间与加工时间。在松弛工期中, 所有工件存在 1 个公共流 q , 即工件 j 的工期为 $d_j = p_j + q$ 。令 $x^+ = \max\{0, x\}$, 当工期确定时, 工件会产生提前和误工, 即工件 j 在工期 d_j 之前完工的部分称为提前部分, 用 $Q_j = \min\{p_j, (d_j - S_j)^+\}$ 表示; 在工期 d_j 之后完工的部分称为误工部分, 用 $Y_j = \min\{p_j, (C_j - d_j)^+\}$ 表示。目标函数为:

$$\sum (\alpha Q_j + \beta Y_j + \gamma d_j) = \sum (\alpha Q_j + \beta Y_j + \gamma p_j) + n\gamma q,$$

其中: α, β, γ 为非负整数, 并被称为损失系数。在实际生活中, 由于机器可能会出现故障或需要定期维修与清洗, 故在一定时间内机器不允许加工任何工件, 这个时间段称为不可用区间, 记作 $[A_1, A_2]$, 其中 $A_2 > A_1 \geq 0$, $T = A_2 - A_1$ 表示不可用区间的大小。设 $A_1 < P$, 否则不可用区间对工件加工无影响。

工件允许中断分为中断可恢复与中断不可恢复 2 种, 下面是相应的定义。

定义 1 中断可恢复: 中断的工件在中断后立即从停止点开始在机器上继续加工。

定义 2 中断不可恢复: 若某个工件中途因机器停机而中断, 则工件在中断后立即重新开始加工。

本文讨论工件中断可恢复情况, 记为问题 NRSLK, 即问题 NRSLK 为带有不可用区间且工件中断可恢复问题。

2 问题 NRSLK 的最优解

以下讨论问题 NRSLK 的最优解, 即求出最优加工次序 σ 、公共流 q 及最优目标函数值 z^* , 问题 NRSLK 用三参数表示为 $1 | d_j = p_j + q, \text{rse}, [A_1, A_2] | \sum (\alpha Q_j + \beta Y_j + \gamma d_j)$ 。

对问题 NRSLK, 工件的工期为松弛工期, 在确定公共流 q 的同时要确定工件的加工次序以使得目标函数值最小, 与 q 有直接关系的是工期, 不同的 q 会使得工件的提前与误工部分不同。当 q 值达到某一值时, 会使得所有工件以任意次序加工都完全提前, 此时再增加 q , 一定会使得目标函数值增加, 因此为使得目标函数值最小, q 有上界, 记作 $\bar{q}$ 。由于工件中断可恢复, 故有以下性质。

性质 1 q 有界, 即 $0 \leq q \leq \bar{q}$, 其中 $\bar{q} = P + T - p_{\min}$ 。

结论显然成立, 在此不再证明。

当 q 值确定时, 工件的工期就确定了, 此时只需要确定工件的加工次序以使得目标函数值最小即可。记 z_q 为原问题的子问题, 其中由性质 1 可知 $q \in [0, P + T - p_{\min}]$ 。为求解问题 NRSLK 需要对每个子问题 z_q 求解。要求解子问题, 只需要找到最优排序 σ_q^* , 以使得目标函数值最小即可, 最优目标函数值记为 z_q^* 。故原问题的最优解为 $z^* = \min_{q \in \{1, \dots, \bar{q}\}} z_q^*$ 。以下将讨论子问题 z_q 的最优解。

对子问题 z_q , 此时 q 值确定, 工件的工期也确定, 可通过动态规划算法求解子问题 z_q , 记作 DP_1 。描述如下。

令 j 表示当前考虑的位置, $j \in \{1, \dots, n\}$, ℓ_j 表示前 j 个位置的所有可能部分排序 $[F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j]$ 与对应部分序列的目标函数值 $F_j(t_1^j, t_2^j)$ 的集合, 其中: t_1^j 表示前 j 个位置的工件总提前, t_2^j 表示前 j 个位置的工件总误工损失。由于 $d_0 = S_0 = C_0 = 0$, 故有:

$$[F_0(t_1^0, t_2^0) = 0, t_1^0 = 0, t_2^0 = 0] \in \ell_0, M_1 = n\gamma q + \gamma P.$$

下面通过 ℓ_{j-1} 构造 ℓ_j , 其中 $j \in \{1, \dots, n\}$:

1) 若 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} \leq A_1$ 且 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} \leq A_1$, 则有:

$$\begin{aligned} t_1^j &= t_1^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, d_{[j]} - (t_1^{j-1} + t_2^{j-1})\}\}, \\ t_2^j &= t_2^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]}) - d_{[j]}\}\}, [F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j] \in \ell_j, \\ F_j(t_1^j, t_2^j) &= \alpha t_1^j + \beta t_2^j + M_1. \end{aligned}$$

2) 若 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} \leq A_1$ 且 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} > A_1$, 则有:

$$\begin{aligned} t_1^j &= t_1^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, d_{[j]} - (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + T)\}\}, \\ t_2^j &= t_2^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} + T) - d_{[j]}\}\}, [F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j] \in \ell_j, \\ F_j(t_1^j, t_2^j) &= \alpha t_1^j + \beta t_2^j + M_1. \end{aligned}$$

3) 若 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} > A_1$, 则有:

$$\begin{aligned} t_1^j &= t_1^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, d_{[j]} - (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + T)\}\}, \\ t_2^j &= t_2^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} + T) - d_{[j]}\}\}, [F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j] \in \ell_j, \\ F_j(t_1^j, t_2^j) &= \alpha t_1^j + \beta t_2^j + M_1. \end{aligned}$$

在构造 ℓ_j 时, 对于相同的 t_1^j, t_2^j 可能会产生不止 1 个 $[F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j] \in \ell_j$, 此时只保留最小值, 通过构造 ℓ_n 可求得最优解。

综上, 通过动态规划可求得子问题 z_q 的最优解。原问题的最优解为 $z^* = \min_{q \in \{1, \dots, \bar{q}\}} z_q^*$, 而子问题 $z_q, q \in \{0, \dots, \bar{q}\}$, 共有 $\bar{q} = P + T - p_{\min}$ 个子问题, 故要求解原问题则需要求解 $P + T - p_{\min}$ 个子问题。以下将通过讨论损失系数间的关系来减少对原问题的求解, 则有以下结果。

性质 2 若 $\alpha - \beta \geq 0$, 则有 $q^* = 0$ 。

证明 要证明 $q^* = 0$, 即证明对任意 $q > 0$, 有 $z_q^* > z_0^*$, 其中 z_q^*, z_0^* 分别表示公共流 q 与 q^* 对应的最优目标值。先将 q^* 增加 1, 则对目标的影响有 2 部分: 一是工期增加 $n\gamma$; 二是提前损失增加 1, 误工损失减少 1。由于 $d_j = p_j + q$, 至少对第 1 个工件无影响, 则目标函数值变化:

$$\Delta_1 = n\gamma + (n-1)(\alpha - \beta)。$$

由 $\alpha - \beta \geq 0$, 故 $\Delta_1 > 0$, 目标函数值会增加。即 q 增加目标函数值会变大, 故有 $q^* = 0$ 。证毕

性质 3 若 $\alpha - \beta < 0$ 且 $\gamma \geq \frac{n-1}{n}(\beta - \alpha)$, 则有 $q^* = 0$ 。

证明 要证明 $q^* = 0$, 即证明对任意 $q > 0$, 有 $z_q^* > z_0^*$, 其中 z_q^*, z_0^* 分别表示公共流 q 与 q^* 对应的最优目标值。先将 q^* 增加 1, 则对目标的影响有 2 部分: 一是工期增加 $n\gamma$; 二是提前损失增加 1, 误工损失减少 1。由于 $d_j = p_j + q$, 至少对第 1 个工件无影响, 则目标函数值变化:

$$\Delta_2 = n\gamma + (n-1)(\alpha - \beta)。$$

由 $\alpha - \beta < 0$ 且 $\gamma \geq \frac{n-1}{n}(\beta - \alpha)$, 故 $\Delta_2 > 0$, 目标函数值会增加。即 q 增加目标函数值会变大, 故有 $q^* = 0$ 。证毕

综上, 当 $\alpha - \beta \geq 0$ 或 $\alpha - \beta < 0$ 且 $\gamma \geq \frac{n-1}{n}(\beta - \alpha)$ 时, 由性质 2、性质 3 可得 $q^* = 0$, 此时有 $z^* = z_0^*$ 。但当 $\alpha - \beta < 0$ 且 $\gamma < \frac{n-1}{n}(\beta - \alpha)$ 时, 上述结果不成立。事实上, 假设将 q 增加 1 或者减少 1, 不能得到 $\Delta \geq 0$ 或者 $\Delta \leq 0$ 。

由于 $z^* = \min_{q \in \{1, \dots, \bar{q}\}} z_q^*$, 此时要求解原问题, 只需将 q 遍历即可求得最优解。

算法 1 问题 NRSLK 的最优解:

输入: $[A_1, A_2], p = (p_1, \dots, p_n), \alpha, \beta, \gamma$ 。

初始化: $[F_0(t_1^0, t_2^0) = 0, t_1^0 = 0, t_2^0 = 0] \in \ell_0$, 有:

第 1 步, 若 $\alpha - \beta \geq 0$, 则令 $q = 0$ 执行第 4 步, 否则执行第 2 步;

第 2 步, 若 $\gamma \geq \frac{n-1}{n}(\beta - \alpha)$, 则令 $q = 0$ 执行第 4 步, 否则执行第 3 步;

第 3 步, $q = 0$ 到 $\bar{q} = P + T - p_{\min}$;

第 4 步, 构造 ℓ_j 。

1) 若 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} \leq A_1$ 且 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} \leq A_1$, 则有:

$$t_1^j = t_1^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, d_{[j]} - (t_1^{j-1} + t_2^{j-1})\}\}, t_2^j = t_2^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]}) - d_{[j]}\}\},$$

$$[F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j] \in \ell_j, F_j(t_1^j, t_2^j) = \alpha t_1^j + \beta t_2^j + M_1;$$

2) 若 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} \leq A_1$ 且 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} > A_1$, 则有:

$$t_1^j = t_1^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, d_{[j]} - (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + T)\}\},$$

$$t_2^j = t_2^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} + T) - d_{[j]}\}\}, [F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j] \in \ell_j,$$

$$F_j(t_1^j, t_2^j) = \alpha t_1^j + \beta t_2^j + M_1;$$

3) 若 $t_1^{j-1} + t_2^{j-1} > A_1$, 则有:

$$t_1^j = t_1^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, d_{[j]} - (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + T)\}\},$$

$$t_2^j = t_2^{j-1} + \min\{p_{[j]}, \max\{0, (t_1^{j-1} + t_2^{j-1} + p_{[j]} + T) - d_{[j]}\}\}, [F_j(t_1^j, t_2^j), t_1^j, t_2^j] \in \ell_j,$$

$$F_j(t_1^j, t_2^j) = \alpha t_1^j + \beta t_2^j + M_1.$$

第 5 步, 通过构造 ℓ_n , 保留最小值, 可得最优解 $[F_n(t_1^n, t_2^n), t_1^n, t_2^n] \in \ell_n$, 则 $z_q^* = F_n(t_1^n, t_2^n)$ 。

第 6 步, $z^* = \min\{z_q^*\}$ 。

定理 1 问题 NRSLK 由算法 1 可在 $O((P+T-p_{\min})nP^2)$ 时间内求得最优解。

证明 定理 1 的正确性由算法 1 可得。接下来考虑算法 1 的复杂性, 算法 1 的第 5 步构造 ℓ_n 在 $O(nP^2)$ 内可得到, 由第 3 步可知最多构造 $P+T-p_{\min}$ 次 ℓ_n , 因此问题 NRSLK 在 $O((P+T-p_{\min})nP^2)$ 时间内求得最优解。证毕

综上, 问题 NRSLK 可求解。以下给出 1 个算例说明动态规划的可行性。

算例 1 工件集 $\{J_1, J_2, J_3, J_4, J_5, J_6, J_7, J_8\}$ 的加工时间为:

$$p_1=33, p_2=26, p_3=25, p_4=46, p_5=30, p_6=49, p_7=35, p_8=39,$$

不可用区间为 $[A_1, A_2] = [45, 53]$, 工件中断可恢复, 根据算法 1 给出提前损失与误工损失分别为: 当 $\alpha=1, \beta=2, \gamma=0.05$ 时, 当 $\alpha=2, \beta=1, \gamma=0.05$ 时的最优排序:

1) 当 $\alpha=1, \beta=2, \gamma=0.05$ 时, 由于 $\alpha-\beta < 0$ 且 $\gamma < \frac{n-1}{n}(\beta-\alpha) = 0.875$, 由性质 3 可知要求该问题需要对每个子问题都求解, 又因为 $z^* = \min\{z_q^*\}$, 故有 $z^* = 393.95, q^* = 242$, 工件的加工次序为 $\sigma = J_8 \rightarrow J_7 \rightarrow J_5 \rightarrow J_4 \rightarrow J_3 \rightarrow J_2 \rightarrow J_1 \rightarrow J_6$;

2) 当 $\alpha=2, \beta=1, \gamma=0.05$ 时, 因 $\alpha-\beta \geq 0$, 由性质 2 可得 $q^* = 0$, 此时只需要确定工件的加工次序以使得目标函数值最小即可, 求得最优解为 $z^* = 323.15, q^* = 0$, 工件的加工次序为 $\sigma = J_3 \rightarrow J_2 \rightarrow J_8 \rightarrow J_7 \rightarrow J_6 \rightarrow J_5 \rightarrow J_4 \rightarrow J_1$ 。

3 结束语

本文研究了单机下带有不可用区间的松弛工期排序问题, 工件允许中断且中断可恢复, 松弛工期是加工时间加上 1 个决策变量——公共流 q 。目标函数为提前损失、误工损失和松弛工期。通过分析公共流 q 的范围以及损失系数和松弛工期的单位费用之间的关系, 通过设计动态规划算法给出了 1 个伪多项式时间。

在接下来的研究中, 可以考虑工件允许中断且中断不可恢复情况; 也可以关注工期窗的情形, 分析问题的复杂性以及近似算法; 还可以拓展到平行机或者流水作业等更加复杂的机器环境。

参考文献:

- [1] XU D H, YIN Y Q, LI H X. A note on "scheduling of nonresumable jobs and flexible maintenance activities on a single machine to minimize makespan"[J]. European Journal of Operational Research, 2009, 197(2): 825-827.
- [2] LEE J Y, KIM Y D. Minimizing the number of tardy jobs in a single-machine scheduling problem with periodic maintenance[J]. Computers & Operation Research, 2012, 39(9): 2196-2205.
- [3] MOR B, MOSHEIOV G. Scheduling a maintenance activity and due-window assignment based on common flow allowance[J]. International Journal of Production Economics, 2012, 135(1): 222-230.
- [4] SUN X Y, GENG X N. Single-machine scheduling with deteriorating effects and machine maintenance[J]. International Journal of Production Research, 2019, 57(10): 3186-3199.

- [5] 罗成新,张庚. 工期窗口指派可控处理时间资源约束最大费用最小化排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2020,37(1):52-59.
LUO C X, ZHANG G. Minmax scheduling problem with common due-date and controlled processing times and resources restriction[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2020,37(1):52-59.
- [6] ADAMOPOULOS G I, PAPPIS C P. Single machine scheduling with flow allowances[J]. Journal of the Operational Research Society,1996,47(10):1280-1285.
- [7] SHABTAY D, MOSHEIOV G, ORON D. Single machine scheduling with common assignable due date/due window to minimize total weighted early and late work[J]. European Journal of Operational Research,2022,303(1):66-77.
- [8] XU C, XU Y F, ZHENG F F, et al. Multitasking scheduling problems with a common due-window[J]. RAIRO-Operations Research,2021,55(3):1787-1798.
- [9] GERSTL E, MOSHEIOV G. The single machine CON problem with unavailability period[J]. International Journal of Production Research,2021,59(3):824-838.
- [10] 张新功,崔同欣. 共同工期下的总权误工单机双代理排序问题[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2022,39(1):35-40.
ZHANG X G, CUI T X. Single-machine two-agent scheduling problem with common due date to minimize total weighted tardiness[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2022,39(1):35-40.

Special Topics on Scheduling Theory

Single-Machine Scheduling Problem with Unavailability Period for Slack Due Date

TANG Xiaomin, ZHANG Xingong

(School of Mathematical Science, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The single-machine problem with unavailability period for slack due date is studied. Unavailability period means that the processing job is not allowed in this period. Slack due date means that the due date is equal to its processing time plus a constant, where the constant is the decision variable. The aim is to assign the slack due and minimize the objective function. The objective function includes the early work, late work and slack due date. It discusses the range of slack due date by cost coefficients, and designs a dynamic programming algorithm to solve this problem. It is prove that the optimal solution can be obtained in $O((P + T - P_{\min})nP^2)$ time. Finally, a numerical example is presented to illustrate the feasibility of the algorithms.

Keywords: the unavailability period; slack due date; early work; late work

(责任编辑 黄 颖)