

具有恶化效应、资源分配、速率修正和松弛工期的排序问题^{*}

梁 媛, 赵玉芳

(沈阳师范大学 数学与系统科学学院, 沈阳 110034)

摘要:研究带有松弛工期指派的单机排序问题,工件的实际加工时间同时受到恶化效应、凸资源分配与一次机器速率修正活动的影响。为确定工件的最优排序、速率修正活动的最优位置、最优的公共容许流和最优的资源分配量,使 2 个约束目标函数极小化。第 1 个目标函数是在满足资源总量有限的条件下,极小化总惩罚费用,即提前、延误、公共容许流和时间表长的加权和;第 2 个目标函数是在总惩罚有限的条件下,极小化资源消耗总费用。将上述问题分别转化为指派问题。当速率修正活动位于不同的位置时,选取使得目标函数最小的解为最优解。对 2 个问题分别给出多项式时间算法,算法的复杂度为 $O(n^4)$,其中 n 为工件的数量。用数值算例分别验证 2 个算法,说明给出的求解算法比较有效。

关键词:单机排序;恶化效应;资源分配;速率修正活动;松弛工期指派

中图分类号:O223; O224

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)02-0042-14

在传统的排序问题中,一般假设工件的加工时间是固定的,但在实际情况下,工件的加工时间可能取决于在机器上加工的顺序,位置越靠后的工件,实际加工时间可能越长,这就是恶化效应。Browne 等人^[1]提出了带有恶化效应的排序问题。机器在任何时刻都可以加工工件,然而在实际生产中机器需要定期进行维修,且维修期间不能加工工件。速率修正活动是机器维修的一种情况,用来提高机器的生产效率,即排在机器维修后加工工件的加工时间会减少。工件的实际加工时间除了受到恶化效应和机器速率修正活动的影响以外,也依赖于资源的分配,即分配到的资源越多,工件的加工时间越短。一般的工期指派模型包括相同工期指派(common due date assignment, CON)、松弛工期指派(slack due date assignment, SLK)、公共工期窗口指派(common due date window assignment, CONW)与不受限的工期指派(unrestricted due date assignment, DIF)^[2]。张新功等人^[3]研究了带有公共工期的双代理单机排序问题,目标函数是总误工的加权和,给出了伪多项式时间算法。

对于带有恶化效应的排序问题, Wang^[4]考虑了带有学习与恶化效应的单机排序问题,目标函数为时间表长与总完工时间,分别给出多项式时间算法。而对于目标函数为加权总完工时间及最大延误,分别利用加权最短加工时间优先(weighted shortest processing time first, WSPT)和最早完工期限(earliest due date first, EDD)规则在某些特殊情况下给出工件的最优排序。王吉波等人^[5]研究了带有学习效应、恶化效应和公共工期指派的单机排序问题,目标函数为工件的提前、延误和公共工期的加权费用和,证明了问题是多项式时间可解的。Wang 等人^[6]将带有学习效应和资源分配的排序问题推广到带有截断学习效应、恶化效应与资源分配的排序问题。Qian 等人^[7]考虑带有恶化效应和递送时间的工期指派排序问题,证明了工件的加工时间是开始时间的简单恶化函数,目标函数是提前、延误和工期的加权总费用问题是多项式时间可解的。对于机器带有速率修正活动的问题, Lee 等人^[8]研究了目标函数分别为时间表长、总完工时间、加权总完工时间和最大延误的单机排序问题。Mosheiov 等人^[9]研究了带有工期指派的单机排序问题,目标函数是所有工件的提前、延误与公共工期加权费用之和,给出了多项式时间算法。Mosheiov 等人^[10]考虑了带有公共工期窗口指派的单机排序问题,目标函数是所有工件的提前、延误、工期窗口的开始时间与工期窗口长度的加权和,给出多项式时间算法。Jia 等人^[11]研究了带有恶化效应、恶化速率修正活动的单机松弛工期窗口指派排序问题,目的是确定恶化速率修正活动的最优位置、最优的公共容许流以及工件的最优排序使关于工期的目标函数极小,并给出了多项式时间算法。Yang^[12]考

* 收稿日期:2022-03-18 修回日期:2024-01-10 网络出版时间:2023-07-04T13:21

资助项目:教育部人文社会科学研究项目(No. 23yjc78001);国家自然科学基金青年科学基金项目(No. 12101417)

第一作者简介:梁媛,女,研究方向为组合最优化, E-mail: 3480738107@qq.com;通信作者:赵玉芳,女,副教授,博士, E-mail: yfzhao2004@163.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20230704.1130.004>

考虑了带有恶化效应、学习效应和恶化的多元速率修正活动的单机排序问题,确定最优的速率修正活动的次数、位置及工件的排序使时间表长和总完工时间极小,并给出多项式时间算法,其中速率修正活动的次数不能大于某个给定的值。对于带有资源分配的排序问题,姜昆等人^[13]研究了带有凸资源约束的工期指派问题,在共同工期和松弛工期指派模型下,资源总量有限时,确定工件的最优排序、最优的资源分配量和工件的工期,使得工件的提前、延误和工期费用之和最小。国峰等人^[14]考虑了带有拒绝和学习效应的单机排序问题,在线性和凸函数这 2 种资源分配模型下,分别利用指派问题算法和动态规划算法求出接受工件的集合、拒绝工件的集合以及接受工件的最优排序,使得工件的时间表长、总完工时间、资源消耗总费用以及拒绝工件惩罚的加权和最小。Shavtay 等人^[15]研究了带有资源分配的单机工期指派排序问题,工件的加工时间分别是分配到的资源的函数,给出了线性模型与凸函数模型,在 3 种工期(相同工期、松弛工期和无限制工期)指派模型下,目标函数是所有工件的提前、延误、工期和时间表长的加权和与资源消耗总费用总和,分别给出多项式时间算法。Wang 等人^[16]考虑了带有学习效应与资源分配的单机工期指派排序问题,其中工期指派包括相同工期指派与松弛工期指派,对于线性或凸资源分配模型,目标函数为加权总延误的绝对值、加权工期指派与加权资源分配总费用的线性组合的问题,分别证明了这些问题的多项式时间可解性;对于凸资源分配模型,也证明了在满足资源分配总费用有限条件下,极小化加权总延误的绝对值与加权工期指派之和是多项式时间可解的。Liu 等人^[17]将 Wang 等人^[16]的结果推广,在加权资源分配总费用有限条件下,目标函数为加权总延误的绝对值与加权工期指派之和,提出了启发式算法与分枝定界算法,并证明 2 个特殊情况是多项式时间可解的,而当加权总延误的绝对值与加权工期指派之和有限时,极小化加权资源分配总费用问题,他们证明了该情况是多项式时间可解的。Liu 等人^[18]同时考虑带有学习效应、资源分配和不断恶化的维修活动的单机排序问题,对于凸资源分配模型,当目标函数为双重标准函数时,给出求解最优资源分配、工件的最优排序的多项式时间算法。Ji 等人^[19]以及 Cheng 等人^[20]都考虑带有资源分配、恶化效应与不断恶化速率修正活动的工期窗口指派问题。Ji 等人^[21]考虑带有恶化效应、资源分配和速率修正活动的单机松弛工期指派问题,对于线性和凸资源分配模型,目标函数为所有工件的提前、延误、公共容许流和资源分配费用的加权总和问题,给出了多项式时间算法。Zhao 等人^[22]在 Ji 等人^[21]研究问题的基础上,研究在总资源有限条件下,目标函数为所有工件提前、延误和公共容许流的总惩罚的加权和,同时研究了在所有工件提前、延误和公共容许流的总惩罚加权和有限的条件下,极小化资源消耗总费用问题。对于上述的 2 个问题,给出多项式时间算法。

本文在 Ji 等人^[21]和 Zhao 等人^[22]研究的基础上进行了推广,研究在恶化效应、凸资源分配、速率修正活动与松弛工期指派 4 个条件的限制下,目标函数分别是在总资源有限条件下,极小化所有工件提前、延误、公共容许流的加权总惩罚与时间表长的加权和,以及在所有工件提前、延误、公共容许流的加权总惩罚与时间表长的加权和有限条件下,极小化资源消耗总费用,并对 2 个问题给出多项式时间算法。

1 问题描述

本文研究的问题可以描述为:给定 1 台机器和 n 个工件 $J = \{J_1, J_2, \dots, J_n\}$, 假设 n 个工件都在 0 时刻到达。在同一时刻机器至多只能加工 1 个工件,而且工件的加工不可以中断。机器只带有 1 次速率修正活动即排在速率修正后的工件,对应的加工时间会减少。若速率修正活动发生在第 i 个位置,也就是从在机器加工的第 i 个工件完工之时开始,一直持续 t 个单位时间, $i = 0, 1, 2, \dots, n$ 。在这段时间内不能加工任何工件。若工件 J_j 所在位置 r 排在速率修正活动之前,即 $r \leq i$, 工件的加工时间不受速率修正活动的影响,工件的加工时间为:

$$p_{jr}(u) = \left(\frac{\bar{p}_j r^{a_j}}{u_j} \right)^k, j=1, 2, \dots, n, r=1, 2, \dots, i,$$

其中: $\bar{p}_j$ 为工件的基本加工时间, $a_j > 0$ 为工件 J_j 的恶化率, u_j 是可以分配给 J_j 的资源量, k 为给定的正实数; 否则, 若排在速率修正活动之后, 工件的加工时间则增加 1 个速率修正比率, 即加工时间为:

$$p_{jr}(u) = \left(\frac{\delta_j \bar{p}_j (r-i)^{a_j}}{u_j} \right)^k,$$

这时 $0 < \delta_j \leq 1$ 为 J_j 的速率修正比率。综上, 工件的加工时间可表示为:

$$p_{jr}(u) = \begin{cases} \left(\frac{\bar{p}_j r^{a_j}}{u_j} \right)^k, & j=1,2,\dots,n, r=1,2,\dots,i; \\ \left(\frac{\delta_j \bar{p}_j (r-i)^{a_j}}{u_j} \right)^k, & j=1,2,\dots,n, r=i+1,i+2,\dots,n. \end{cases}$$

在凸资源分配模型下,若 u_j 趋近于 0,则实际加工时间 $p_{jr}(u)$ 趋近于无穷大量,这与实际生产要求是不符合的。因此,令 $u_j \geq \underline{u}_j$,其中 $\underline{u}_j$ 为可以分配给 J_j 的资源量的下界。

对于任何排序 $\pi = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]})$, $J_{[j]}$, $j=1,2,\dots,n$ 表示排在第 j 个位置的工件,用 $p_{[j]}$ 和 $C_{[j]}$ 表示实际加工时间与完工时间。根据松弛工期指派模型,松弛工期为 $d_{[j]} = p_{[j]} + q_{\text{opt}}$, $j=1,2,\dots,n$,其中:公共容许流 q_{opt} (common flow allowance,也称为共同松弛交货期)^[13] 为需要确定的松弛变量^[22]。本文需要确定的是 q_{opt} 的值、速率修正活动 i 的最优位置、最优的资源分配量以及最优的工件加工顺序,在满足约束条件下使下面 2 个函数极小化:

1) 在总资源满足 $\sum_{j=1}^n G_j u_j \leq U$ 时,极小化 $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$, 其中: $E_j = \max\{0, d_j - C_j\}$, $T_j = \max\{0, C_j - d_j\}$, q_{opt} 和 $C_{\max}$ 为工件 J_j 的提前、延误、公共容许流和时间表长, α, β, γ 和 ρ 分别为他们的单位惩罚, G_j 为分配给资源 J_j 的单位费用,其中 $U > 0$ 为资源总量。

2) 在总惩罚 $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} \leq V$ 条件下,极小化加权资源分配总费用 $\sum_{j=1}^n G_j u_j$, 其中 $V > 0$ 是总惩罚。

使用 Graham 等人^[23]提出的三参数表示法,可以将 2 个问题描述如下:

问题 1: $1|rma, p_{jr} = \left(\frac{\bar{p}_j r^{a_j}}{u_j} \right)^k, \sum_{j=1}^n G_j u_j \leq U \mid \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$;

问题 2: $1|rma, p_{jr} = \left(\frac{\bar{p}_j r^{a_j}}{u_j} \right)^k, \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} \leq V \mid \sum_{j=1}^n G_j u_j$ 。

其中: rma 表示速率修正活动。

2 引理及证明

由于 $d_j = p_j + q_{\text{opt}}$,可以直接得到下面的 2 条引理。

引理 1 存在 1 个最优排序,若 $C_{[j]} \leq d_{[j]}$,则 $C_{[j-1]} \leq d_{[j-1]}$;否则 $C_{[j+1]} \geq d_{[j+1]}$ 。

引理 2 对于问题 1 和问题 2,都存在 1 个最优排序使得 q_{opt} 等于某工件的完工时间或速率修正活动结束之时。

证明 用反证法。假设存在 1 个最优排序,但 q_{opt} 不等于任何工件的完工时间及速率修正活动结束之时。速率修正活动发生在位置 i ,不妨设 q_{opt} 取在开区间 $(C_{[h-1]}, C_{[h]})$ 或 $(C_{[h-1]}, C_{[h-1]} + t)$ 或 $(C_{[h-1]} + t, C_{[h]})$ 内一点。下面分 $i < h-1$, $i = h-1$ 和 $i \geq h$ 这 3 种情况讨论。

1) 当 $i < h-1$,如图 1, $C_{[h-1]} < q_{\text{opt}} < C_{[h]}$,令 $x = q_{\text{opt}} - C_{[h-1]}$, $y = C_{[h]} - q_{\text{opt}}$,则有 $x = p_{[h]} - y$,因此 $q_{\text{opt}} = p_{[1]} + p_{[2]} + \dots + p_{[h-1]} + t + x$ 。

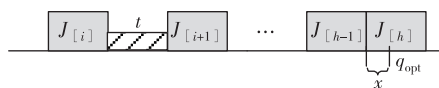


图 1 $i < h-1$ 的情况

Fig. 1 $i < h-1$

工件 $J_{[h]}$ 的完工时间为 $C_{[h]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \dots + p_{[h]} + t$,工期为:

$$d_{[h]} = q_{\text{opt}} + p_{[h]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \dots + p_{[h-1]} + p_{[h]} + t + x,$$

故 $d_{[h]} > C_{[h]}$, $J_{[h]}$ 提前,则由引理 1 可知,排在 $J_{[h]}$ 前的工件都提前。

工件 $J_{[h+1]}$ 的完工时间为 $C_{[h+1]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \dots + p_{[h-1]} + p_{[h]} + p_{[h+1]} + t$,工期为:

$$d_{[h+1]} = q_{\text{opt}} + p_{[h+1]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]} + p_{[h+1]} + t + x,$$

又因为 $x < p_{[h]}$, 故 $d_{[h+1]} < C_{[h+1]}$, $J_{[h+1]}$ 延误, 由引理 1 可知, 排在 $J_{[h+1]}$ 后面的工件都延误。故有:

$$\begin{aligned} f(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^h (q_{\text{opt}} + p_{[j]} - C_{[j]}) + \beta \sum_{j=h+1}^n (C_{[j]} - (q_{\text{opt}} + p_{[j]})) + \gamma \sum_{j=1}^n (q_{\text{opt}}) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right) = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^i (q_{\text{opt}} + p_{[j]} - (p_{[1]} + \cdots + p_{[j]})) + \alpha \sum_{j=i+1}^h (q_{\text{opt}} + p_{[j]} - (p_{[1]} + \cdots + p_{[j]} + t)) + \\ &\quad \beta \sum_{j=h+1}^n (C_{[j]} - (q_{\text{opt}} + p_{[j]})) + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + t + x \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right) = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{h-1} j p_{[j]} + \alpha h x + \alpha i t + \beta \sum_{j=h}^n (n-j) p_{[j]} - \beta(n-h)x + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + t + x \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right). \end{aligned} \quad (1)$$

i) 若 q_{opt} 取在 $J_{[h-1]}$ 完工之时, 即 $q_{\text{opt}}^{(1)} = C_{[h-1]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]} + t$, 有:

$$\begin{aligned} f_1(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{h-1} j p_{[j]} + \alpha i t + \beta \sum_{j=h}^n (n-j) p_{[j]} + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + t \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right), \end{aligned}$$

则有:

$$f(d, \pi, u) - f_1(d, \pi, u) = x(\alpha h - \beta(n-h) + n\gamma). \quad (2)$$

将 $x = p_{[h]} - y$ 代入式(1)中, 则:

$$\begin{aligned} f'(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^h j p_{[j]} - \alpha h y + \alpha i t + \beta \sum_{j=h+1}^n (n-j) p_{[j]} + \beta(n-h)y + n\gamma \left(\sum_{j=1}^h p_{[j]} + t - y \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right). \end{aligned}$$

ii) 若 q_{opt} 取在 $J_{[h]}$ 完工之时, 即:

$$\begin{aligned} q_{\text{opt}}^{(2)} &= C_{[h]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]} + p_{[h]} + t, \\ f_2(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^h j p_{[j]} + \alpha i t + \beta \sum_{j=h+1}^n (n-j) p_{[j]} + n\gamma \left(\sum_{j=1}^h p_{[j]} + t \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right). \end{aligned}$$

则有:

$$f'(d, \pi, u) - f_2(d, \pi, u) = -y(\alpha h - \beta(n-h) + n\gamma). \quad (3)$$

对于式(2)、(3), 因为 $x, y > 0$, 当 $\alpha h - \beta(n-h) + n\gamma > 0$ 时, 有 $f(d, \pi, u) > f_1(d, \pi, u)$, 则 $q_{\text{opt}} = C_{[h-1]}$ 时更好, 与假设矛盾; 当 $\alpha h - \beta(n-h) + n\gamma < 0$ 时, 有 $f'(d, \pi, u) > f_2(d, \pi, u)$, 则 $q_{\text{opt}} = C_{[h]}$ 时更好, 也与假设矛盾; 当 $\alpha h - \beta(n-h) + n\gamma = 0$ 时, q_{opt} 取在 $[C_{[h-1]}, C_{[h]}]$ 闭区间内任意一点目标函数值都相等。

综上, 当 $i < h-1$ 时, q_{opt} 等于某工件的完工时间最优。

2) 当 $i = h-1$, 有以下 2 种情况, 如图 2。令 $x = q_{\text{opt}} - C_{[h-1]}$, $y = C_{[h]} - q_{\text{opt}}$, 则 $x = p_{[h]} + t - y$ 。



图 2 $i = h-1$ 的情况

Fig. 2 $i = h-1$

情况 1(图 2a): $q'_{\text{opt}} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]} + x$, 与 1) 的推导类似, $J_{[h-1]}$ 提前, $J_{[h]}$ 延误。故有:

$$g(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} =$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{h-1} j p_{[j]} + \alpha(h-1)x + \beta \sum_{j=h}^n (n-j) p_{[j]} + \beta(n-h+1)(t-x) + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + x \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right)。$$

i) 若 q_{opt} 取在 $J_{[h-1]}$ 完工之时, 即 $q_{\text{opt}}^{(3)} = C_{[h-1]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]}$, 有:

$$g_1(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} =$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{h-1} j p_{[j]} + \beta \sum_{j=h}^n (n-j) p_{[j]} + \beta(n-h+1)t + n\gamma \sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right)。$$

则:

$$g(d, \pi, u) - g_1(d, \pi, u) = x[\alpha(h-1) - \beta(n-h+1) + n\gamma]。 \quad (4)$$

ii) 若 q_{opt} 取在速率修正活动结束之时, 即: $q_{\text{opt}}^{(4)} = C_{[h-1]} + t = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]} + t$, 则:

$$g_2(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} =$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{h-1} j p_{[j]} + \alpha(h-1)t + \beta \sum_{j=h}^n (n-j) p_{[j]} + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + t \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right)。$$

则:

$$g(d, \pi, u) - g_2(d, \pi, u) = (x-t)[\alpha(h-1) - \beta(n-h+1) + n\gamma]。 \quad (5)$$

在式(4)、(5)中, 因为 $0 < x < t$, 当 $\alpha(h-1) - \beta(n-h+1) + n\gamma > 0$ 时, 即 $h > \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} + 1$, 有 $g(d, \pi, u) >$

$g_1(d, \pi, u)$, 则 $q_{\text{opt}} = C_{[h-1]}$ 时更好, 与假设矛盾; 当 $\alpha(h-1) - \beta(n-h+1) + n\gamma < 0$ 时, 即 $h < \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} + 1$, 有 $g(d, \pi, u) > g_2(d, \pi, u)$, 则 $q_{\text{opt}} = C_{[h-1]} + t$ 时更好, 也与假设矛盾; 当 $\alpha(h-1) - \beta(n-h+1) + n\gamma = 0$ 时, q_{opt} 取在 $[C_{[h-1]}, C_{[h-1]} + t]$ 闭区间内任意一点目标函数值都相等。

情况 2(图 2b): $q''_{\text{opt}} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]} + p_{[h]} + t - y$, 其中 $y = C_{[h]} - q_{\text{opt}}$ 。与情况 1 的推导类似, $J_{[h]}$ 提前, $J_{[h+1]}$ 延误。故有:

$$g'(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \alpha \sum_{j=1}^{h-1} j p_{[j]} + \alpha h(p_{[h]} + t - y) - \alpha t +$$

$$\beta \sum_{j=h}^n (n-j) p_{[j]} + \beta(n-h)(t - (p_{[h]} + t - y)) + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + (p_{[h]} + t - y) \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right)。$$

i) 若 q_{opt} 取在速率修正活动结束之时, 即 $q_{\text{opt}}^{(5)} = C_{[h-1]} + t = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h-1]} + t$, 则:

$$g_1(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} =$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{h-1} j p_{[j]} + \alpha h t - \alpha t + \beta \sum_{j=h}^n (n-j) p_{[j]} + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{h-1} p_{[j]} + t \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right)。$$

则:

$$g'(d, \pi, u) - g_1(d, \pi, u) = (p_{[h]} - y)[\alpha h + n\gamma - \beta(n-h)]。 \quad (6)$$

ii) 若 q_{opt} 取在 $J_{[h]}$ 完工之时, 即 $q_{\text{opt}}^{(6)} = C_{[h]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[h]} + t$, 则:

$$g_2(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} =$$

$$\alpha \sum_{j=1}^h j p_{[j]} + \alpha(h-1)t + \beta \sum_{j=h+1}^n (n-j) p_{[j]} + n\gamma \sum_{j=1}^h p_{[j]} + n\gamma t + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right)。$$

则:

$$g'(d, \pi, u) - g_2(d, \pi, u) = -y[\alpha h + n\gamma - \beta(n-h)]。 \quad (7)$$

对于式(6)、(7),因为 $0 < y < p_{[h]}$, 当 $ah + n\gamma - \beta(n-h) > 0$ 时, 即 $h > \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta}$, 有 $g'(d, \pi, u) > g_1(d, \pi, u)$, 则 $q_{\text{opt}} = C_{[h-1]} + t$ 时更好, 与假设矛盾; 当 $ah + n\gamma - \beta(n-h) < 0$ 时, 即 $h < \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta}$, 有 $g'(d, \pi, u) > g_2(d, \pi, u)$, 则 $q_{\text{opt}} = C_{[h]}$ 时更好, 也与假设矛盾; 当 $ah + n\gamma - \beta(n-h) = 0$ 时, q_{opt} 取在 $[C_{[h-1]} + t, C_{[h]}]$ 闭区间内任意一点目标函数值都相等。

综合以上2种情况, 当 $h \leq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta}$, $q_{\text{opt}} = C_{[h]}$ 更好; $\frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} \leq h \leq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} + 1$, $q_{\text{opt}} = C_{[h-1]} + t$ 更好; $h \geq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} + 1$, $q_{\text{opt}} = C_{[h-1]}$ 更好。故当 $i = h-1$ 时, q_{opt} 等于某工件的完工时间或速率修正活动结束后之时最优。

3) 当 $i \geq h$ 时, 情况与1)类似, 证明省略。

证毕

引理3 对于问题1和问题2, 都存在1个最优排序, 若机器的速率修正活动发生在第 i 位置, 且 $m = \left\lceil \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rceil$, 当 $i \neq m-1$ 时, 一定有 q_{opt} 等于工件 $J_{[m-1]}$ 的完工时间, 即 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]}$, 否则 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} + t$ 。

证明 不妨设 $i < m-1$, 当 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[m-1]} + t$ 时, 有:

$$\begin{aligned} Z(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{m-1} j p_{[j]} + \alpha it + \beta \sum_{j=m}^n (n-j) p_{[j]} + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{m-1} p_{[j]} + t \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right). \end{aligned} \quad (8)$$

若 $q_{\text{opt}}^{(1)} = C_{[m-1]} - \Delta_1$ ($0 \leq \Delta_1 \leq p_{[m-1]}$), 则有:

$$\begin{aligned} Z_1(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{m-1} j p_{[j]} + \alpha (it - (m-1)\Delta_1) + \beta \sum_{j=m}^n (n-j) p_{[j]} + \beta (n - (m-1))\Delta_1 + \\ &+ n\gamma \left(\sum_{j=1}^{m-1} p_{[j]} + t - \Delta_1 \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right). \end{aligned}$$

显然 $Z - Z_1 = \alpha(m-1)\Delta_1 - \beta(n - (m-1))\Delta_1 + n\gamma\Delta_1 \leq 0$, 故:

$$m \leq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} + 1. \quad (9)$$

若 $q_{\text{opt}}^{(2)} = C_{[m-1]} + \Delta_2$ ($0 \leq \Delta_2 \leq p_{[m]}$), 则有:

$$\begin{aligned} Z_2(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{m-1} j p_{[j]} + \alpha (it + m\Delta_2) + \beta \sum_{j=m}^n (n-j) p_{[j]} - \beta(n-m)\Delta_2 + n\gamma \left(\sum_{j=1}^{m-1} p_{[j]} + t + \Delta_2 \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right). \end{aligned}$$

显然 $Z - Z_2 = -\alpha m\Delta_2 + \beta(n-m)\Delta_2 - n\gamma\Delta_2 \leq 0$, 故:

$$m \geq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta}. \quad (10)$$

由式(9)、(10)得 $\frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} \leq m \leq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} + 1$, 因为 m 为整数, 故 $m = \left\lceil \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rceil$ 或 $m = \left\lfloor \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rfloor + 1$ 。

当 $q'_{\text{opt}} = C_{[m]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \cdots + p_{[m-1]} + p_{[m]} + t$, 有:

$$\begin{aligned} Z'(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^m j p_{[j]} + \alpha it + \beta \sum_{j=m+1}^n (n-j) p_{[j]} + n\gamma \left(\sum_{j=1}^m p_{[j]} + t \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right). \end{aligned} \quad (11)$$

用式(11)减去式(8), 有:

$$Z'(d, \pi, u) - Z(d, \pi, u) = \alpha m p_{[m]} + n\gamma p_{[m]} - \beta(n-m)p_{[m]} = (\alpha + \beta)m p_{[m]} + n(\gamma - \beta)p_{[m]}.$$

故 $\gamma > \beta$ 时, 因为 $\frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} < 0$, 与事实不符, 故舍去。当 $\gamma \leq \beta$ 时, 因为 $m \geq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta}$, 所以 $Z'(d, \pi, u) > Z(d, \pi, u)$, q_{opt} 取 $C_{[m-1]}$ 更好, 使得目标函数 $Z(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$ 较小。又因为 $\left\lceil \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rceil \leq \left\lfloor \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rfloor + 1$, 故取 $m = \left\lfloor \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rfloor$ 。当 $i > m-1$ 时, 同理可证。

特别地, 当机器的速率修正活动恰好发生在 $m-1$ 时, 为了与上述结论 $m = \left\lceil \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rceil$ 匹配, 对应到引理 2, $i = h-1$ 时, $\frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} \leq h \leq \frac{(\beta-\gamma)n}{\alpha+\beta} + 1$ 的情况, $q_{\text{opt}} = C_{[h-1]} + t$ 更好。

综上所述, 结论得证。

证毕

在引理 1~引理 3 的基础上, 假设速率修正活动排在位置 i , 根据 i 与 $m-1$ 的关系, 总惩罚费用 $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$ 可以由下面引理得到。

引理 4 若速率修正活动发生在第 i 个位置, 且 $m = \left\lceil \frac{n(\beta-\gamma)}{\alpha+\beta} \right\rceil$, 则总惩罚费用

$$f_i(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$$

可以表达如下:

1) 若 $i < m$, 则:

$$f_i(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \alpha i t + n \gamma t + \rho t, \quad (12)$$

其中:

$$\lambda_{[j]} = \begin{cases} (\alpha j + n \gamma + \rho) (j^{a_{[j]}})^k, & j = 1, 2, \dots, i; \\ (\alpha j + n \gamma + \rho) (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k, & j = i+1, \dots, m-1; \\ [\beta(n-j) + \rho] (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k, & j = m, \dots, n. \end{cases} \quad (13)$$

2) 若 $i \geq m$, 则:

$$f_i(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \beta(n-i)t + \rho t, \quad (14)$$

其中:

$$\lambda_{[j]} = \begin{cases} (\alpha j + n \gamma + \rho) (j^{a_{[j]}})^k, & j = 1, 2, \dots, m-1; \\ [\beta(n-j) + \rho] (j^{a_{[j]}})^k, & j = m, \dots, i; \\ [\beta(n-j) + \rho] (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k, & j = i+1, \dots, n. \end{cases} \quad (15)$$

式中: $\lambda_{[j]}$ 表示排在第 j 个位置的工件。

证明 1) 若 $i < m$, 有 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \dots + p_{[m-1]} + t$, 则:

$$\begin{aligned} f_i(d, \pi, u) &= \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} = \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{m-1} j p_{[j]} + \alpha i t + \beta \sum_{j=m}^n (n-j) p_{[j]} + n \gamma \left(\sum_{j=1}^{m-1} p_{[j]} + t \right) + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right) = \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} (\alpha j + n \gamma + \rho) p_{[j]} + \sum_{j=m}^n [\beta(n-j) + \rho] p_{[j]} + \alpha i t + n \gamma t + \rho t = \\ &= \sum_{j=1}^i (\alpha j + n \gamma + \rho) \left(\frac{\bar{p}_{[j]} j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}} \right)^k + \sum_{j=i+1}^{m-1} (\alpha j + n \gamma + \rho) \left(\frac{\delta_{[j]} \bar{p}_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}} \right)^k + \\ &= \sum_{j=m}^n [\beta(n-j) + \rho] \left(\frac{\delta_{[j]} \bar{p}_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}} \right)^k + \alpha i t + n \gamma t + \rho t = \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^i (\alpha j + n\gamma + \rho) (j^{a_{[j]}})^k \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \sum_{j=i+1}^{m-1} (\alpha j + n\gamma + \rho) (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k +$$

$$\sum_{j=m}^n [\beta(n-j) + \rho] (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \alpha it + n\gamma t + \rho t = \sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \alpha it + n\gamma t + \rho t。$$

其中:

$$\lambda_{[j]} = \begin{cases} (\alpha j + n\gamma + \rho) (j^{a_{[j]}})^k, j=1, 2, \dots, i; \\ (\alpha j + n\gamma + \rho) (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k, j=i+1, \dots, m-1; \\ [\beta(n-j) + \rho] (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k, j=m, \dots, n。 \end{cases}$$

2) 若 $i \geq m$, 有 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} = p_{[1]} + p_{[2]} + \dots + p_{[m-1]}$, 则:

$$f_i(d, \pi, u) = \sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max} =$$

$$\alpha \sum_{j=1}^{m-1} j p_{[j]} + \beta \sum_{j=m}^n (n-j) p_{[j]} + \beta(n-i)t + n\gamma \sum_{j=1}^{m-1} p_{[j]} + \rho \left(\sum_{j=1}^n p_{[j]} + t \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} (\alpha j + n\gamma + \rho) p_{[j]} + \sum_{j=m}^n [\beta(n-j) + \rho] p_{[j]} + \beta(n-i)t + \rho t =$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} (\alpha j + n\gamma + \rho) \left(\frac{\bar{p}_{[j]} j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}} \right)^k + \sum_{j=m}^i [\beta(n-j) + \rho] \left(\frac{\bar{p}_{[j]} j^{a_{[j]}}}{u_{[j]}} \right)^k +$$

$$\sum_{j=i+1}^n [\beta(n-j) + \rho] \left(\frac{\delta_{[j]} \bar{p}_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}}}{u_{[j]}} \right)^k + \beta(n-i)t + \rho t =$$

$$\sum_{j=1}^{m-1} (\alpha j + n\gamma + \rho) (j^{a_{[j]}})^k \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \sum_{j=m}^i [\beta(n-j) + \rho] (j^{a_{[j]}})^k \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k +$$

$$\sum_{j=i+1}^n [\beta(n-j) + \rho] (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \beta(n-i)t + \rho t = \sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \beta(n-i)t + \rho t。$$

$$\text{其中: } \lambda_{[j]} = \begin{cases} (\alpha j + n\gamma + \rho) (j^{a_{[j]}})^k, j=1, 2, \dots, m-1; \\ [\beta(n-j) + \rho] (j^{a_{[j]}})^k, j=m, \dots, i; \\ [\beta(n-j) + \rho] (\delta_{[j]} (j-i)^{a_{[j]}})^k, j=i+1, \dots, n。 \end{cases}$$

证毕

3 问题 1

在这节中, 研究在 $\sum_{j=1}^n G_j u_j \leq U$ 条件下, 极小化函数 $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$ 。根据引理 4, i 任取 2 种情况的其中 1 个, $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$ 都是 u_j 的递减函数, 因此资源的分配量越多越好, 则当 $\sum_{j=1}^n G_j u_j = U$ 时, $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\max}$ 可以取到极小值。下面给出在 $\sum_{j=1}^n G_j u_j = U$ 的条件下, 分配给各个工件的资源量。

引理 5 对于给定的排序 $\pi = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]})$, 有问题 1 的最优资源分配为:

$$u_{[j]}^* = \frac{U (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]})^{-\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}}{\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}}, j=1, 2, \dots, n。 \quad (16)$$

证明 对于 1 个给定的排序 $\pi = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]})$, 下面用拉格朗日乘数法进行证明。令 η 表示拉格朗日乘子, 那么根据引理 4 有下面 2 种情况。

1) 若 $i < m$, 问题 1 的拉格朗日函数表示为:

$$L(u, \eta) = f_i(d, \pi, u) + \eta \left(\sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} - U \right) =$$

$$\sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \alpha i t + n \gamma t + \rho t + \eta \left(\sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} - U \right); \quad (17)$$

2) 若 $i \geq m$, 问题 1 的拉格朗日函数表示为:

$$L(u, \eta) = f_i(d, \pi, u) + \eta \left(\sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} - U \right) = \sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \beta(n-i)t + \rho t + \eta \left(\sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} - U \right). \quad (18)$$

式(17)、(18)分别对 $u_{[j]}$ 与 η 求偏导数, 得到:

$$\frac{\partial L(u, \eta)}{\partial u_{[j]}} = \eta G_{[j]} - \frac{k \lambda_{[j]} (\bar{p}_{[j]})^k}{(u_{[j]})^{k+1}} = 0, \quad \frac{\partial L(u, \eta)}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} - U = 0.$$

由上式可得:

$$u_{[j]} = \left(\frac{k \lambda_{[j]}}{\eta G_{[j]}} \right)^{\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}, \quad (19)$$

$$\eta^{\frac{1}{k+1}} = \frac{\sum_{j=1}^n (k \lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}}{U}. \quad (20)$$

将式(20)代入式(19)中, 得到 $u_{[j]}^* = \frac{U (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]})^{-\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}}{\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}}$, 其中: 当 $i < m$ 时, $\lambda_{[j]}$ 取式(13); 当 $i \geq m$ 时, $\lambda_{[j]}$ 取式(15)。

证毕

同时考虑引理 4 和引理 5, 总惩罚费用可以表示如下:

1) 当 $i < m$, $\lambda_{[j]}$ 取式(13), 将式(16)代入式(12)得:

$$f_i(d, \pi, u^*) = U^{-k} \left[\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right]^{k+1} + \alpha i t + n \gamma t + \rho t; \quad (21)$$

2) 当 $i \geq m$, $\lambda_{[j]}$ 取式(15), 将式(16)代入式(14)得:

$$f_i(d, \pi, u^*) = U^{-k} \left[\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right]^{k+1} + \beta(n-i)t + \rho t. \quad (22)$$

对于给定的 i , 式(21)中的 $\alpha i t + n \gamma t + \rho t$ 与式(22)中的 $\beta(n-i)t + \rho t$ 都是常数, 不失一般性, 令:

$$A_{jr} = (\lambda_{jr})^{\frac{1}{k+1}} (G_j \bar{p}_j)^{\frac{k}{k+1}}, \quad (23)$$

其中: λ_{jr} 表示工件 j 排在第 r 个位置。于是求解问题 1 可以转化为下面的指派问题。

指派问题

$$\begin{aligned} \min & \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^n A_{jr} x_{jr}, \\ \text{s. t.} & \sum_{j=1}^n x_{jr} = 1, \quad r = 1, 2, \dots, n, \\ & \sum_{r=1}^n x_{jr} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n, \\ & x_{jr} \in \{0, 1\}, \quad j, r = 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (24)$$

其中: 第 1 个约束条件保证每个位置只能排 1 个工件; 第 2 个约束条件保证每个工件只能排在 1 个位置上; 第 3 个约束条件表示 x_{jr} 为二元变量, 若 $x_{jr} = 1$, 表示工件 J_j 排在位置 r ; 否则 $x_{jr} = 0$, 表示工件 J_j 排在 r 以外的位置。

基于上述讨论, 给出解决问题 1 的多项式时间算法。

算法 1 第 1 步, 计算 $m = \left\lceil \frac{n(\beta - \gamma)}{\alpha + \beta} \right\rceil, i = 0$ 。

第 2 步, 根据式(23)计算 $A_{jr}, j, r = 1, 2, \dots, n$, 在 $i < m, i \geq m$ 时分别用式(13)、(15)计算 λ_{jr} 。

第 3 步, 通过指派问题(24), 得到工件的依赖位置 i 的最优排序 $\pi(i)$; 再由式(21)、(22)计算总惩罚费用

$$f(i) = f_i(d, \pi, u^*).$$

第4步,令 $i = i + 1$ 。若 $i > n$, 进行第5步, 否则返回第2步。

第5步,取 $f^* = \min\{f(i), i = 1, 2, \dots, n\}$, 对应的排序和速率修正的位置为最优排序 π^* 和速率修正的最优位置 i^* 。计算工件的实际加工时间和 q_{opt} (当 $i^* \neq m - 1$ 时, $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]}$; 否则 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} + t$), 再利用式(16)计算最优的资源分配。

定理1 算法1的复杂度为 $O(n^4)$ 。

证明 第3步,对于1个给定的 i , 指派问题的复杂度为 $O(n^3)$; 第4步,速率修正的位置 i 是1个变量,从0取值到 n , 故有 $n + 1$ 种取法; 其他的步骤复杂性为 $O(n)$, 故总的算法复杂度为 $O(n^4)$ 。证毕

下面给出问题1的1个算例,并用算法1进行求解。

例1 令 $n = 7$, 假设常数 $k = 1$, 提前、延误、公共容许流和时间表长的单位惩罚为 $\alpha = 1, \beta = 5, \gamma = 2, \rho = 2$, 速率修正活动持续的时间 $t = 1$ 。工件的基本加工时间为:

$$\bar{p}_1 = 3, \bar{p}_2 = 5, \bar{p}_3 = 4, \bar{p}_4 = 2, \bar{p}_5 = 6, \bar{p}_6 = 8, \bar{p}_7 = 5;$$

工件的恶化为:

$$a_1 = 0.2, a_2 = 0.5, a_3 = 0.3, a_4 = 0.6, a_5 = 0.4, a_6 = 0.1, a_7 = 0.25;$$

速率修正系数为:

$$\delta_1 = 0.4, \delta_2 = 0.6, \delta_3 = 0.7, \delta_4 = 0.5, \delta_5 = 0.8, \delta_6 = 0.2, \delta_7 = 0.4;$$

资源分配的单位费用为:

$$G_1 = 1, G_2 = 3, G_3 = 4, G_4 = 2, G_5 = 5, G_6 = 8, G_7 = 1。$$

设分配给各个工件的资源量的下界是 $\underline{u}_j = 1, j = 1, 2, \dots, 6$, 资源总量的上界是 $U = 50$ 。

第1步,计算 $m = \left\lceil \frac{n(\beta - \gamma)}{\alpha + \beta} \right\rceil = 4$ 。

第2步,对于每个 i 值,利用式(23)计算 $A_{jr}, i = 0, 1, \dots, 7$ 。当 $i = 0$ 时,有:

$$A_{jr} = \begin{bmatrix} 4.5166 & 4.9812 & 5.3294 & 5.1883 & 4.4574 & 3.4670 & 1.8820 \\ 12.3693 & 15.1361 & 17.2099 & 17.4929 & 15.5401 & 12.4225 & 6.9010 \\ 13.7986 & 15.7543 & 17.2010 & 16.9880 & 14.7586 & 11.5846 & 6.3371 \\ 5.8310 & 7.3869 & 8.5709 & 8.8381 & 7.9396 & 6.4049 & 3.5856 \\ 20.1990 & 23.8752 & 26.6015 & 26.6528 & 23.4148 & 18.5475 & 10.2245 \\ 14.7513 & 15.7142 & 16.4755 & 15.8100 & 13.4321 & 10.3529 & 5.5767 \\ 5.8310 & 6.5430 & 7.0718 & 6.9342 & 5.9907 & 4.6809 & 2.5507 \end{bmatrix}。$$

第3步,通过指派问题求解,得到当前工件的最优排序为 $\pi(0) = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5)$, 指派问题的最优值为 $Z(0) = 67.2575$, 总惩罚费用为 $f(0) = 106.4714$ 。对于 i 取其他值,有下面的结果:

$$\pi(1) = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5), Z(1) = 70.8569, f(1) = 117.4140;$$

$$\pi(2) = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5), Z(2) = 73.9166, f(2) = 127.2733;$$

$$\pi(3) = (J_2, J_4, J_1, J_7, J_6, J_3, J_5), Z(3) = 77.0172, f(3) = 137.6330;$$

$$\pi(4) = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5), Z(4) = 81.0413, f(4) = 148.3538;$$

$$\pi(5) = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_3, J_6, J_5), Z(5) = 84.0174, f(5) = 153.1785;$$

$$\pi(6) = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_3, J_5, J_6), Z(6) = 89.7534, f(6) = 168.1135;$$

$$\pi(7) = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_3, J_5, J_6), Z(7) = 96.6465, f(7) = 188.8109。$$

根据算法1,总体的最优排序为 $\pi^* = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5)$, 速率修正的最优位置为 $i^* = 0$, 总惩罚费用为 $f^* = 106.4714$ 。在最优排序下,资源分配情况为:

$$u_{[j]}^* = (3.0652, 2.7457, 5.2573, 3.8570, 1.2482, 2.1530, 1.5202);$$

工件的实际加工时间为:

$$p_{[j]} = (0.9787, 0.5520, 0.5007, 0.4105, 1.5057, 2.2262, 6.8767);$$

公共容许流 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} = C_{[3]} = p_{[1]} + p_{[2]} + p_{[3]} + t = 3.0314$ 。

4 问题 2

在这节中,研究在 $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\text{max}} \leq V$ 条件下,极小化资源消耗总费用 $\sum_{j=1}^n G_j u_j$ 。根据引理 4, $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\text{max}}$ 也是 u_j 的递减函数,所以 $\sum_{j=1}^n G_j u_j$ 要取到极小值,则令 $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\text{max}}$ 取最大值 V 。下面给出当 $\sum_{j=1}^n (\alpha E_j + \beta T_j + \gamma q_{\text{opt}}) + \rho C_{\text{max}} = V$ 时,分配给各个工件的最优资源。

引理 6 对于给定的排序 $\pi = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]})$, 有问题 2 的最优资源分配为:

$$u_{[j]}^* = \begin{cases} (V - \alpha i t - n \gamma t - \rho t)^{-\frac{1}{k}} (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]})^{-\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k}}, & i < m; \\ (V - \beta(n-i)t - \rho t)^{-\frac{1}{k}} (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]})^{-\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k}}, & i \geq m. \end{cases} \quad (25)$$

证明 对于给定的排序 $\pi = (J_{[1]}, J_{[2]}, \dots, J_{[n]})$, 下面用拉格朗日乘数法进行证明。令 η 表示拉格朗日乘子,那么根据引理 4 有 2 种情况。

1) 若 $i < m$, 则拉格朗日函数表示为:

$$L(u, \eta) = \sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} + \eta(f_i(d, \pi, u)) = \sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} + \eta \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \alpha i t + n \gamma t + \rho t - V \right); \quad (26)$$

2) 若 $i \geq m$, 则拉格朗日函数表示为:

$$L(u, \eta) = \sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} + \eta(f_i(d, \pi, u)) = \sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]} + \eta \left(\sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \beta(n-i)t + \rho t - V \right). \quad (27)$$

式(26)、(27)分别对 $u_{[j]}$ 与 η 求偏导数,同时得到:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(u, \eta)}{\partial u_{[j]}} &= G_{[j]} - \frac{\eta k \lambda_{[j]} (\bar{p}_{[j]})^k}{(u_{[j]})^{k+1}} = 0; \\ \frac{\partial L(u, \eta)}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \alpha i t + n \gamma t + \rho t - V = 0, i < m; \\ \frac{\partial L(u, \eta)}{\partial \eta} &= \sum_{j=1}^n \lambda_{[j]} \left(\frac{\bar{p}_{[j]}}{u_{[j]}} \right)^k + \beta(n-i)t + \rho t - V = 0, i \geq m. \end{aligned}$$

再由上述 3 个式子得到:

$$u_{[j]} = \left(\frac{\eta k \lambda_{[j]}}{G_{[j]}} \right)^{\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}, \quad (28)$$

$$(\eta k)^{\frac{k}{k+1}} = \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}}{V - \alpha i t - n \gamma t - \rho t}, & i < m; \\ \frac{\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}}}{V - \beta(n-i)t - \rho t}, & i \geq m. \end{cases} \quad (29)$$

将式(29)代入式(28)中,得到:

$$u_{[j]}^* = \begin{cases} (V - \alpha i t - n \gamma t - \rho t)^{-\frac{1}{k}} (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]})^{-\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k}}, & i < m; \\ (V - \beta(n-i)t - \rho t)^{-\frac{1}{k}} (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]})^{-\frac{1}{k+1}} (\bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \left(\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right)^{\frac{1}{k}}, & i \geq m. \end{cases}$$

若 $i < m$, 则 $\lambda_{[j]}$ 取式(13); 若 $i \geq m$, 则 $\lambda_{[j]}$ 取式(15)。

证毕

同时考虑引理 4 和引理 6, 资源消耗总费用可以表示如下。

1) 当 $i < m$, $\lambda_{[j]}$ 取式(13), 将式(25)代入 $\sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]}(\pi, u^*(\pi))$, 得到:

$$Z_i(\pi, u^*) = \sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]}(\pi, u^*(\pi)) = (V - \alpha i t - n \gamma t - \rho t)^{-\frac{1}{k}} \left[\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right]^{\frac{1}{k+1}}; \quad (30)$$

2) 当 $i \geq m$, $\lambda_{[j]}$ 取式(15), 将式(25)代入 $\sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]}(\pi, u^*(\pi))$, 得到:

$$Z_i(\pi, u^*) = \sum_{j=1}^n G_{[j]} u_{[j]}(\pi, u^*(\pi)) = (V - \beta(n-i)t - \rho t)^{-\frac{1}{k}} \left[\sum_{j=1}^n (\lambda_{[j]})^{\frac{1}{k+1}} (G_{[j]} \bar{p}_{[j]})^{\frac{k}{k+1}} \right]^{\frac{1}{k+1}}. \quad (31)$$

基于上述讨论, 类似于第 3 节将问题转化为指派问题, 本节问题也同样转化为指派问题, 下面给出解决问题 2 的多项式时间算法。

算法 2 第 1 步, 计算 $m = \left\lceil \frac{n(\beta - \gamma)}{\alpha + \beta} \right\rceil$ 。

第 2 步, 根据式(23)计算 A_{jr} , $j, r = 1, 2, \dots, n$, 在 $i < m, i \geq m$ 时分别利用式(13)、(15)计算 λ_{jr} 。

第 3 步, 通过指派问题(24), 得到工件的依赖于 i 的位置的最优排序 $\pi(i)$; 再由式(30)、(31)计算资源消耗总费用 $Z(i) = Z_i(\pi, u^*)$ 。

第 4 步, 令 $i = i + 1$ 。若 $i > n$, 进行第 5 步, 否则返回第 2 步。

第 5 步, 取 $Z^* = \min\{Z(i), i = 1, 2, \dots, n\}$, 对应的排序和速率修正的位置为工件的最优排序 π^* 和速率修正的最优的位置 i^* 。计算工件的实际加工时间和 q_{opt} (当 $i^* \neq m - 1$ 时, $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]}$; 否则 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} + t$), 再利用式(25)计算最优的资源分配。

定理 2 算法 2 的复杂度为 $O(n^4)$ 。

下面给出问题 2 的 1 个算例, 并用算法 2 进行求解。

例 2 条件与例题 1 相同, 总惩罚费用的上界为 $V = 70$ 。速率修正活动在不同的位置上, 有如下的结果:

$$\begin{aligned} \pi(0) &= (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5), Z(0) = \sum_{j=1}^n G_j u_j = 83.7698; \\ \pi(1) &= (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5), Z(1) = 94.7302; \\ \pi(2) &= (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5), Z(2) = 105.0705; \\ \pi(3) &= (J_2, J_4, J_1, J_7, J_6, J_3, J_5), Z(3) = 116.3068; \\ \pi(4) &= (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5), Z(4) = 123.9187; \\ \pi(5) &= (J_2, J_4, J_7, J_1, J_3, J_6, J_5), Z(5) = 121.7056; \\ \pi(6) &= (J_2, J_4, J_7, J_1, J_3, J_5, J_6), Z(6) = 127.8678; \\ \pi(7) &= (J_2, J_4, J_7, J_1, J_3, J_5, J_6), Z(7) = 137.3610. \end{aligned}$$

根据算法 2, 总体的最优排序为 $\pi^* = (J_2, J_4, J_7, J_1, J_6, J_3, J_5)$, 速率修正的最优位置为 $i^* = 0$, 资源消耗总费用为 $Z^* = 83.7698$ 。在最优排序下, 资源分配情况为:

$$u_{[j]}^* = (5.1354, 4.6002, 8.8080, 6.4620, 2.0912, 3.6072, 2.5469);$$

工件的实际加工时间为:

$$p_{[j]} = (0.5842, 0.3295, 0.2988, 0.2450, 0.8987, 1.3287, 4.1046);$$

公共容许流为 $q_{\text{opt}} = C_{[m-1]} = C_{[2]} = p_{[1]} + p_{[2]} + p_{[3]} + t = 2.2125$ 。

5 结论

本文研究了带有松弛工期指派的单机排序问题, 工件的实际加工时间同时受到恶化效应、资源分配与机器

的速率修正活动的影响,在 2 种目标函数下极小化。即在满足总的资源有限时,极小化提前、延误、公共容许流和时间表长的总惩罚费用之和;或在总惩罚有限时,极小化资源消耗总费用。对于这 2 个问题给出了多项式时间算法,并利用算法给出了速率修正活动的最优位置、最优的工件排序,最优的公共容许流和最优的资源分配。

参考文献:

- [1] BROWNE S, YECHIALI U. Scheduling deteriorating jobs on a single processor[J]. *Operations Research*, 1990, 38(3): 495-498.
- [2] SHABTAY D, GASPAR N, YEDIDSON L. A bicriteria approach to scheduling a single machine with job rejection and positional penalties[J]. *Journal of Combinatorial Optimization*, 2012, 23(4): 395-424.
- [3] 张新功, 崔同欣. 共同工期下的总权误工单机双代理排序问题[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2022, 39(1): 35-40.
ZHANG X G, CUI T X. Single-machine two-agent scheduling problem with common due date to minimize total weighted tardiness[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2022, 39(1): 35-40.
- [4] WANG J B. Single machine scheduling problems with the effects of learning and deterioration[J]. *Omega*, 2007, 35(4): 397-402.
- [5] 王吉波, 梁茜茜, 张博. 带有学习与恶化效应的共同工期指派问题[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2019, 36(3): 1-6.
WANG J B, LIANG X X, ZHANG B. Common due date assignment problem with learning and deterioration effects[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2019, 36(3): 1-6.
- [6] WANG J B, LIU M Q, YIN N, et al. Scheduling jobs with controllable processing time, truncated job-dependent learning and deterioration effects[J]. *Journal of Industrial & Management Optimization*, 2017, 13(2): 1025-1039.
- [7] QIAN J, HAN H Y. The due date assignment scheduling problem with the deteriorating jobs and delivery time[J]. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, 2021, 68: 2173-2186.
- [8] LEE C Y, LEON V J. Machine scheduling with a rate-modifying activity[J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 128(1): 119-128.
- [9] MOSHEIOV G, ORON D. Due-date assignment and maintenance activity scheduling problem[J]. *Mathematical and Computer Modelling*, 2006, 44(11/12): 1053-1057.
- [10] MOSHEIOV G, SARIG A. Scheduling a maintenance activity and due-window assignment on a single machine[J]. *Computers & Operations Research*, 2009, 36(9): 2541-2545.
- [11] JIA X, LV D Y, HU Y, et al. Slack due-window assignment scheduling problem with deterioration effects and a deteriorating maintenance activity[J]. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2022, 39(6): 2250005.
- [12] YANG S J. Single-machine scheduling problems simultaneously with deterioration and learning effects under deteriorating multi-maintenance activities consideration[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2012, 62(1): 271-275.
- [13] 姜昆, 耿新娜, 王吉波. 具有资源约束的工期指派排序问题[J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(19): 46-52.
JIANG K, GENG X N, WANG J B. Due date assignment scheduling problems with resource constraints[J]. *Mathematics In Practice and Theory*, 2012, 62(1): 271-275.
- [14] 国峰, 王吉波. 带有拒绝工件和学习效应的资源约束排序问题研究[J]. *重庆师范大学学报(自然科学版)*, 2021, 38(1): 114-120.
GUO F, WANG J B. Research on resource constraint scheduling with job rejection and learning effect[J]. *Journal of Chongqing Normal University (Natural Science)*, 2021, 38(1): 114-120.
- [15] SHABTAY D, STEINER G. The single-machine earliness-tardiness scheduling problem with due date assignment and resource-dependent processing times[J]. *Annals of Operations Research*, 2008, 159(1): 25-40.
- [16] WANG J B, GENG X N, LIU L, et al. Single machine CON/SLK due date assignment scheduling with controllable processing time and job-dependent learning effects[J]. *The Computer Journal*, 2018, 61(9): 1329-1337.
- [17] LIU W W, JIANG C. Due-date assignment scheduling involving job-dependent learning effects and convex resource allocation[J]. *Engineering Optimization*, 2020, 52(1): 74-89.
- [18] LIU Z S, WANG Z Y, LU Y Y. A bicriteria approach for single machine scheduling with resource allocation, learning effect and a deteriorating maintenance activity[J]. *Asia-Pacific Journal of Operational Research*, 2017, 34(4): 1750011.
- [19] JI M, GE J J, CHEN K, et al. Single-machine due-window assignment and scheduling with resource allocation, aging effect, and a deteriorating rate-modifying activity[J]. *Computers & Industrial Engineering*, 2013, 66(4): 952-961.
- [20] CHENG B, CHENG L. Note on "Single-machine due-window assignment and scheduling with resource allocation, aging effect,

- and a deteriorating rate-modifying activity"[J]. Computers & Industrial Engineering, 2014, 78: 320-322.
- [21] JI M, YAO D L, YANG Q Y, et al. Single-machine common flow allowance scheduling with aging effect, resource allocation, and a rate-modifying activity[J]. International Transactions in Operational Research, 2015, 22(6): 997-1015.
- [22] ZHAO X L, XU J, WANG J B, et al. Bicriteria common flow allowance scheduling with aging effect, convex resource allocation, and a rate-modifying activity on a single machine[J]. Asia-Pacific Journal of Operational Research, 2022, 39(5): 2150046.
- [23] GRAHAM R L, LAWLER E L, LENSTRA J K, et al. Optimization and approximation in deterministic sequencing and scheduling: a survey[J]. Annals of Discrete Mathematics, 1979, 5: 287-326.

Special Topics on Scheduling Theory

Scheduling Problems with Deterioration Effects, Resource Allocation, Rate-Modifying Activity and Slack Due Date Assignment

LIANG Yuan, ZHAO Yufang

(College of Mathematics and Systems Science, Shenyang Normal University, Shenyang 110034, China)

Abstract: Single machine scheduling problem with slack due date assignment is studied. The actual processing time of a job is determined by deterioration effects, convex resource allocation and a rate-modifying activity on the machine. The problem is to determine the optimal job sequence, the optimal position of the rate-modifying activity, the optimal common flow allowance and the amount of resource allocation such that the two constrained optimization objective cost functions are minimized. One is the weighted penalties for the sum of earliness, tardiness, common flow allowance and maximum completion time subject to an upper bound on the total resource cost, the other is minimizing the total resource cost subject to an upper bound on the total penalty cost. Transform the two problems into assignment problems. When the rate-modifying activity is located in different positions, select the optimal solution such that minimizes the objective function. It is proved that these problems remain polynomial solvable under the proposed algorithms and the time complexity are $O(n^4)$, where n is the number of jobs. Numerical examples show that the proposed algorithms are effective.

Keywords: single machine scheduling; deterioration effect; resource allocation; rate-modifying activity; slack due date assignment

(责任编辑 黄 颖)