

具有范数结构凸多目标优化问题的最优性条件^{*}

陈洁, 夏远梅, 赵克全

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要: 研究一类具有范数结构特殊多目标优化问题的最优性条件。通过计算该类问题目标函数的广义次微分, 系统论述了 Pareto 有效解的 FJ 最优性条件和 KKT 最优性条件, 并基于这些定理定义了新的 Pareto-FJ 稳定点和 Pareto-KKT 稳定点, 提出并证明了这 2 类稳定点的等价条件, 以及它们对应的几何最优性条件。针对带有一般约束和区间约束的一类具有范数结构凸多目标优化问题, 建立了 Pareto-FJ 最优性条件、Pareto-KKT 最优性条件等一系列定理。所得结果丰富了多目标优化理论, 为具有范数结构多目标优化问题的应用研究打下基础。

关键词: 多目标优化问题; 范数结构; 最优性条件

中图分类号: O221.6

文献标志码: A

文章编号: 1672-6693(2024)03-0001-08

众所周知, 多目标优化问题作为运筹学领域的研究热点之一, 涉及多个相互冲突的目标函数, 相关理论与方法已被广泛应用于多个领域, 如大数据分析、机器学习及经济管理等^[1-4]。多目标优化问题最早由 Pareto 在 1896 年提出, 到目前为止已取得了丰富的研究成果。例如: Marcenaro-Gutierrez 等人^[3]考虑了收入、工作保障、工作时间等多方面的预期满意度, 研究了西班牙工人的满意度水平; Härmäläinen 等人^[4]考虑纸张重量、纤维取向和机器方向速度分量, 研究了造纸机流浆箱的最优形状设计。与传统的单目标优化问题不同, 由于目标函数之间存在冲突, 多目标优化问题并不能总找到使所有目标函数同时达到最优的解。因此, 有效解、弱有效解、真有效解等多目标优化问题各类解的概念被研究者们相继提出, 他们还对解的性质进行了研究^[5-9]。

与非线性规划问题一样, 不同类别解的最优性条件在构造解决多目标优化问题的有效方法中发挥着至关重要的作用。这些条件能够判定一个可行解是否为所考虑问题的最优解, 同时它也是构造算法的理论基础。1974 年, Lin^[10]首次给出 Pareto 有效解的 Fritz-John 型必要条件, 以及在 Kuhn-Tucker 约束品性下的 Pareto 有效解的 Kuhn-Tucker 型必要条件。1994 年, Maeda^[11]利用线性锥和切锥, 提出了可微多目标规划 Kuhn-Tucker 型必要条件成立的约束品性。1999 年, Preda 等人^[12]利用广义方向导数引进了新的约束品性, 并给出了不可微规划问题的最优性条件。随后, Li^[13]通过引进有限个凸集并的核的概念, 给出了非光滑多目标 Kuhn-Tucker 条件成立的约束品性。2010 年, 赵克全等人^[14-15]研究了一类带等式和不等式约束的非光滑多目标优化问题和不可微多目标分式规划问题, 并给出了问题的 KKT 最优性必要及充分条件。最近, Liuzzi 等人^[16]给出了具有区间约束和非光滑约束的多目标优化问题的最优性条件。

此外, 在运用多目标优化理论与方法解决实际问题的过程中, 多类问题被发现具有范数形式特殊结构。例如, Oymak 等人^[17]在恢复结构化模型问题中, 研究了同时最小化多种范数的凸多目标优化问题; 谭豫琳等人^[18]研究了绩效分配中寻找指标基础分数问题和电力生产发电机分配问题, 并针对该类具有范数结构的多目标优化问题, 基于标量化思想提出了一种近似方法, 以获得问题的 Pareto 解。对这类特殊多目标优化问题进行深入研究分析, 有助于为解决相关实际问题提供数学理论基础, 进一步丰富和完善多目标优化理论。本文在已有文献基础上, 针对一类具有范数结构的特殊凸多目标优化问题进行研究, 得出并证明了该问题的若干最优性条件。

^{*} 收稿日期: 2023-10-05 修回日期: 2024-03-26 网络出版时间: 2024-06-07T14:59

资助项目: 国家自然科学基金——重大项目(No. 11991024), 面上项目(No. 12171063, No. 12101096); 重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014); 重庆市自然科学基金面上项目(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114, No. cstc2021jcyj-msxmX0280); 重庆市教育委员会科学技术研究项目(No. KJQN202100521)

第一作者简介: 陈洁, 女, 研究方向为多目标优化理论与方法, E-mail: 1005456955@qq.com; 通信作者: 赵克全, 男, 教授, 博士生导师, E-mail: kequan@163.com

网络出版地址: <https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20240607.1046.008>

1 预备知识

本文假设 $\mathbf{R}^n$ 为 n 维欧氏空间, $\mathbf{N}^+$ 为正整数集, X 为赋范线性空间。给定向量 $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 的第 i 个分量表示为 $(\mathbf{x})_i$ 。 $\|\cdot\|: X \rightarrow [0, +\infty)$ 为定义在 X 上的范数, 有 $\|\mathbf{x}\| = \sum_{i=1}^n |(\mathbf{x})_i|$, $\forall \mathbf{x} \in X$ 。对任意 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^n$, 定义如下序关系: $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x})_i < (\mathbf{y})_i, \forall i=1, 2, \dots, n$; $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow (\mathbf{x})_i \leq (\mathbf{y})_i, \forall i=1, 2, \dots, n$; $\mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Leftrightarrow \mathbf{x} \leq \mathbf{y}, \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ 。

考虑如下多目标优化模型:

$$\begin{aligned} \min \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x})) \\ \text{s. t. } \mathbf{g}(\mathbf{x}) &\leq \mathbf{0}, \\ l &\leq \mathbf{x} \leq u. \end{aligned} \quad (1)$$

其中: $f_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^q \|\mathbf{x} - \mathbf{a}^{(k)}\|$, $f_2(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq k \leq q} \|\mathbf{x} - \mathbf{a}^{(k)}\|$, $\mathbf{a}^{(k)} \in X, k=1, 2, \dots, q, q \in \mathbf{N}^+$, $\mathbf{g} = (g_1, g_2, \dots, g_m): X \rightarrow \mathbf{R}^m, m \in \mathbf{N}^+$ 为非光滑函数, $l, u \in X$ 且 $l < u$ 。令 $S = \{\mathbf{x} \in X: l \leq \mathbf{x} \leq u\}$, $V = \{\mathbf{x} \in X: \mathbf{g}(\mathbf{x}) = (g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_m(\mathbf{x})) \leq \mathbf{0}\}$, $\mathcal{F} = V \cap S$ 为凸集。显然, 问题(1)是一个凸问题。引入一系列凸函数 $h_k(\mathbf{x}): X \rightarrow \mathbf{R}$, 定义为 $h_k(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{a}^{(k)}\|, k=1, 2, \dots, q$, 则 $f_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^q h_k(\mathbf{x})$, $f_2(\mathbf{x}) = \max_{1 \leq k \leq q} h_k(\mathbf{x})$ 。

对于任意向量 $\mathbf{x}^* \in X$, $B(\mathbf{x}^*, \rho) = \{\mathbf{y} \in X: \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq \rho\}$ 表示以 $\mathbf{x}^*$ 为中心, 常数 $\rho > 0$ 为半径的闭球域。对于任意非空集合 A , $\text{cl}(A)$ 代表集合 A 的闭包。下面给出多目标优化问题(1)的 Pareto 全局有效解和局部有效解的定义。

定义 1^[19] 设 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$, 如果不存在 $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ 使得 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$, 则称 $\mathbf{x}^*$ 是问题(1)的全局 Pareto 有效解。

定义 2^[19] 设 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$, 如果对于某一 $\rho > 0$, 不存在 $\mathbf{x} \in \mathcal{F} \cap B(\mathbf{x}^*, \rho)$ 使得 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{F}(\mathbf{x}^*)$, 则称 $\mathbf{x}^*$ 是问题(1)的局部 Pareto 有效解。

由于问题(1)为凸问题, 故它所有的局部 Pareto 有效解也是全局 Pareto 有效解。

定义 3^[20] 考虑多目标优化问题(1), $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ 处的极次梯度方向锥为:

$$H_0(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n: \mathbf{d} = \mathbf{0} \text{ 或对任意 } \xi_k \in \partial h_k(\mathbf{x}), k=1, 2, \dots, q, \text{ 都有 } \xi_k^T \mathbf{d} < 0\}.$$

定义 4^[20] 考虑多目标优化问题(1), $\mathbf{x} \in \mathcal{F}$ 处的极约束次梯度方向锥为:

$$G_0(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n: \mathbf{d} = \mathbf{0} \text{ 或对任意 } \eta_j \in \partial g_j(\mathbf{x}), j \in I_0(\mathbf{x}), \text{ 都有 } \eta_j^T \mathbf{d} < 0\},$$

其中: $I_0(\mathbf{x}) = \{j \in \{1, 2, \dots, m\}: g_j(\mathbf{x}) = 0\}$ 。

定义 5^[20] 令 $\mathbf{x} \in V$, 在 $\mathbf{x}$ 点处关于非空集合 V 的可行方向锥为:

$$G(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n: \text{存在 } \epsilon > 0, \text{ 使得对任意 } t \in (0, \epsilon], \text{ 都有 } \mathbf{x} + t\mathbf{d} \in V\}.$$

定义 6^[16] 给定点 $\mathbf{x} \in S$, 令:

$D(\mathbf{x}) = \{\mathbf{d} \in \mathbf{R}^n: (\mathbf{x})_i = (l)_i \text{ 时 } (d)_i \geq 0; (\mathbf{x})_i = (u)_i \text{ 时 } (d)_i \leq 0; (l)_i < (\mathbf{x})_i < (u)_i \text{ 时 } (d)_i \in \mathbf{R}, i=1, 2, \dots, n\}$ 为 $\mathbf{x}$ 点处关于集合 S 的可行方向锥。

本文给出以下引理用于之后的证明。

引理 1^[20] 设对任意 $i=1, 2, \dots, p$, 函数 $u_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为凸函数。令 $u(\mathbf{x}) = \max\{u_i(\mathbf{x}): i=1, 2, \dots, p\}$, $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\partial u(\mathbf{x}) = \text{conv}\{\partial u_i(\mathbf{x}): i \in I(\mathbf{x})\}$, 其中 $I(\mathbf{x}) = \{i \in \{1, 2, \dots, p\}: u_i(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})\}$ 。

引理 2^[20] 设对任意 $i=1, 2, \dots, p$, 函数 $u_i: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 为凸函数。令 $\lambda_i \geq 0, u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i u_i(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$, 则 $\partial u(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \partial u_i(\mathbf{x})$ 。

2 最优性条件

在建立问题(1)的最优性条件前, 本文先计算函数 f_1 和 f_2 的次微分。对函数 $h_k(\mathbf{x})$ 的次微分进行计算。根据本文中范数的定义可知:

$$h_k(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |(\mathbf{x})_i - (\mathbf{a}^{(k)})_i| = \max_{s \in \{-1, 1\}^n} s^T (\mathbf{x} - \mathbf{a}^{(k)}),$$

故对于任意点 $\mathbf{x} \in X$, 函数 $h_k(\mathbf{x})$ 的次微分为 $\partial h_k(\mathbf{x}) = J_1^{(k)} \times J_2^{(k)} \times \cdots \times J_n^{(k)}$, 其中:

$$J_i^{(k)} = \begin{cases} \{1\}, (\mathbf{x})_i > (\mathbf{a}^{(k)})_i, \\ \{-1\}, (\mathbf{x})_i < (\mathbf{a}^{(k)})_i, \\ [-1, 1], (\mathbf{x})_i = (\mathbf{a}^{(k)})_i. \end{cases} \quad (2)$$

现在计算点 $\mathbf{x} \in X$ 处, 关于 $f_1(\mathbf{x})$ 和 $f_2(\mathbf{x})$ 的次微分。由引理 2 得:

$$\partial f_1(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^q \partial h_k(\mathbf{x}). \quad (3)$$

由引理 1 得 $\partial f_2(\mathbf{x}) = \text{conv}\{\partial h_k(\mathbf{x}); k \in I_2(\mathbf{x})\}$, 其中 $I_2(\mathbf{x}) = \{k \in \{1, 2, \dots, q\}; h_k(\mathbf{x}) = f_2(\mathbf{x})\}$ 。由凸包定义^[20]得:

$$\text{conv}\{\partial h_k(\mathbf{x}); k \in I_2(\mathbf{x})\} = \sum_{k \in I_2(\mathbf{x})} \delta_k \partial h_k(\mathbf{x}),$$

其中: 任取不全为 0 的数 $\delta_k \geq 0, k \in I_2(\mathbf{x})$, 满足 $\sum_{k \in I_2(\mathbf{x})} \delta_k = 1$ 。当 $k \in \{1, 2, \dots, q\}$ 且 $k \notin I_2(\mathbf{x})$ 时, 令 $\delta_k = 0$, 则可得

得到 $\text{conv}\{\partial h_k(\mathbf{x}); k \in I_2(\mathbf{x})\} = \sum_{k=1}^q \delta_k \partial h_k(\mathbf{x})$ 。因此, 有:

$$\partial f_2(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^q \delta_k \partial h_k(\mathbf{x}), \quad (4)$$

其中: 对于任意 $k=1, 2, \dots, q$, 有 $\sum_{k=1}^q \delta_k = 1, \delta_k \geq 0$, 对于任意 $k \notin I_2(\mathbf{x})$, 有 $\delta_k = 0$ 。

根据文献[16], 本文现建立问题(1)的最优性必要条件。

定理 1 设 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的局部 Pareto 有效解, 则存在一组不全为 0 的数 $\sigma_1^*, \dots, \sigma_q^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbf{R}$ 满足 $\sigma_k^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* \geq 0, \lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0, j=1, 2, \dots, m$, 且存在向量

$$\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \partial g_j(\mathbf{x}^*),$$

使得对于任意 $\mathbf{d} \in D(\mathbf{x}^*)$ 都有 $\bar{\xi}^T \mathbf{d} \geq 0$ 。

证明 若 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的局部 Pareto 有效解, 则由文献[16]中定理 3.3 可得, 存在一组不全为 0 的数 $\sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ 满足 $\sigma_1 \geq 0, \sigma_2 \geq 0, \lambda_j \geq 0, \lambda_j g_j(\mathbf{x}^*) = 0, j=1, 2, \dots, m$, 且存在向量

$$\bar{\xi} \in \sigma_1 \partial f_1(\mathbf{x}^*) + \sigma_2 \partial f_2(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(\mathbf{x}^*),$$

使得对于任意 $\mathbf{d} \in D(\mathbf{x}^*)$ 都有 $\bar{\xi}^T \mathbf{d} \geq 0$ 。

由式(3)、(4)得:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \partial f_1(\mathbf{x}^*) + \sigma_2 \partial f_2(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(\mathbf{x}^*) &= \sigma_1 \sum_{k=1}^q \partial h_k(\mathbf{x}^*) + \sigma_2 \sum_{k=1}^q \delta_k \partial h_k(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(\mathbf{x}^*) = \\ &= \sum_{k=1}^q (\sigma_1 + \sigma_2 \delta_k) \partial h_k(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(\mathbf{x}^*), \end{aligned}$$

其中: 任取 $\delta_k \geq 0, \forall k=1, 2, \dots, q$, 且满足 $\sum_{k=1}^q \delta_k = 1, \delta_k = 0, \forall k \notin I_2(\mathbf{x})$ 。故存在 $\delta_k^*, k=1, 2, \dots, q$ 满足上述

条件使得向量 $\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q (\sigma_1 + \sigma_2 \delta_k^*) \partial h_k(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(\mathbf{x}^*), \bar{\xi}^T \mathbf{d} \geq 0$ 。

令 $\sigma_k^* = \sigma_1 + \sigma_2 \delta_k^*, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* = \lambda_j, j=1, 2, \dots, m$, 则 $\sigma_1^*, \dots, \sigma_q^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbf{R}$ 不全为 0, 满足对于任意 $k=1, 2, \dots, q$ 有 $\sigma_k^* \geq 0$, 且对于任意 $j=1, 2, \dots, m$ 有 $\lambda_j^* \geq 0, \lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0$ 。故结论成立。证毕

根据定理 1, 下面给出问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点定义。

定义 7 (Pareto-FJ 稳定点) 如果 $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的可行点, 且满足存在一组不全为 0 的数 $\sigma_1^*, \dots, \sigma_q^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbf{R}$ 使得 $\sigma_k^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* \geq 0, \lambda_j^* g_j(\mathbf{x}^*) = 0, j=1, 2, \dots, m$, 又存在向量 $\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \partial g_j(\mathbf{x}^*)$, 使得对于任意 $\mathbf{d} \in D(\mathbf{x}^*)$, 有 $\bar{\xi}^T \mathbf{d} \geq 0$, 则称 $\mathbf{x}^*$ 为问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点。

定理 2 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点当且仅当对于任意 $d \in D(x^*)$, 存在 $k_d \in \{1, 2, \dots, q\}$, 能够找到 $\xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*)$, 使得 $\xi_{k_d}^T d \geq 0$, 或者存在 $j_d \in I_0(x^*)$, 能够找到 $\eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*)$, 使得 $\eta_{j_d}^T d \geq 0$.

证明 首先, 证明当 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点时, 存在 $k_d \in \{1, 2, \dots, q\}$, 能找到 $\xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*)$, 使得 $\xi_{k_d}^T d \geq 0$; 或者存在 $j_d \in \{1, 2, \dots, m\}$, 能够找到 $\eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*)$, 使得 $\eta_{j_d}^T d \geq 0$. 由 Pareto-FJ 稳定点定义, 存在一组不全为 0 的乘子 $\sigma_k^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* \geq 0, j=1, 2, \dots, m$, 满足当 $g_j(x^*) < 0$ 时 $\lambda_j^* = 0$, 且存在向量 $\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(x^*) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \partial g_j(x^*)$, 使得对于任意 $d \in D(x^*)$, 都有 $\bar{\xi}^T d \geq 0$, 其中 $I_0(x^*) = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : g_j(x^*) = 0\}$. 故存在 $\xi_k \in \partial h_k(x^*), k=1, 2, \dots, q, \eta_j \in \partial g_j(x^*), j \in I_0(x^*)$, 使得 $\bar{\xi} = \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \xi_k + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \eta_j$, 且满足对于任意 $d \in D(x^*)$, $\bar{\xi}^T d \geq 0$, 即:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d) \geq 0. \quad (5)$$

反设存在 $d_0 \in D(x^*)$, 对于任意 $\xi_k \in \partial h_k(x^*), k=1, 2, \dots, q$ 都有 $\xi_k^T d_0 < 0$, 且对于任意 $\eta_j \in \partial g_j(x^*), j \in I_0(x^*)$ 都有 $\eta_j^T d_0 < 0$. 由于乘子 $\sigma_k^*, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^*, j \in I_0(x^*)$ 不全为 0, 下面分 2 种情况讨论.

第 1 种情况, 假设 $\sigma_k^*, k=1, 2, \dots, q$ 中存在不全为 0 的数, 这里不妨设 $\sigma_1^* > 0$. 可以推出 $\sigma_1^* \xi_1^T d_0 < 0$. 又由 $\sigma_k^*, \lambda_j^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q, j \in I_0(x^*)$ 得:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d_0) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d_0) = \sigma_1^* \xi_1^T d_0 + \sum_{k=2}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d_0) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d_0) < 0. \quad (6)$$

第 2 种情况, 假设 $\lambda_j^*, j \in I_0(x^*)$ 中存在不全为 0 的数 $\lambda_{j_1}^*$, 由于 $\lambda_{j_1}^* > 0$, 故 $\lambda_{j_1}^* \eta_{j_1}^T d_0 < 0$. 又由 $\sigma_k^*, \lambda_j^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q, j \in I_0(x^*)$ 得:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d_0) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d_0) = \sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d_0) + \lambda_{j_1}^* \eta_{j_1}^T d_0 + \sum_{j \in I_0(x^*), j \neq j_1} \lambda_j^* (\eta_j^T d_0) < 0. \quad (7)$$

由式(5)、(6)、(7)得矛盾.

现在证明在 $x^* \in \mathcal{F}$ 处, 若对于任意 $d \in D(x^*)$, 存在 $k_d \in \{1, 2, \dots, q\}$, 能够找到 $\xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*)$, 使得 $\xi_{k_d}^T d \geq 0$; 或者存在 $j_d \in I_0(x^*)$, 能够找到 $\eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*)$, 使得 $\eta_{j_d}^T d \geq 0$, 则 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点. 首先定义如下 2 个集合:

$$D_1(x^*) = \{d \in D(x^*) : \text{存在 } k_d \in \{1, 2, \dots, q\}, \text{能够找到 } \xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*), \text{使得 } \xi_{k_d}^T d \geq 0\},$$

$$D_2(x^*) = \{d \in D(x^*) : \text{存在 } j_d \in I_0(x^*), \text{能够找到 } \eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*), \text{使得 } \eta_{j_d}^T d \geq 0\},$$

则 $D(x^*) \subseteq D_1(x^*) \cup D_2(x^*)$. 对于任意 $d \in D_1(x^*)$, 假设在 $k_d \in \{1, 2, \dots, q\}$ 处, 存在 $\xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*)$, 使得 $\xi_{k_d}^T d \geq 0$. 令 $\sigma_{k_d}^* = 1$, 其余乘子全为 0, 则该组乘子满足 Pareto-FJ 稳定点中对乘子的要求, 且:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d) = \sigma_{k_d}^* \xi_{k_d}^T d \geq 0,$$

即存在 $\bar{\xi} = \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \xi_k + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \eta_j \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(x^*) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \partial g_j(x^*)$, 使得 $\bar{\xi}^T d \geq 0$. 对于任意 $d \in$

$D_2(x^*)$, 假设在 $j_d \in I_0(x^*)$ 处, 存在 $\eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*)$, 使得 $\eta_{j_d}^T d \geq 0$. 令 $\lambda_{j_d}^* = 1$, 其余乘子全为 0, 则该组乘子满足 Pareto-FJ 稳定点中对乘子的要求, 且:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d) = \lambda_{j_d}^* \eta_{j_d}^T d \geq 0,$$

即存在 $\bar{\xi} = \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \xi_k + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \eta_j \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(x^*) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \partial g_j(x^*)$, 使得 $\bar{\xi}^T d \geq 0$.

综上所述, x^* 为问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点.

证毕

下面通过具体算例说明如何利用定理 2 寻找问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点.

例1 多目标优化问题(1)中,取 $n=1, q=5, m=1, a^{(1)}=1, a^{(2)}=1.5, a^{(3)}=3, a^{(4)}=10, a^{(5)}=21$ 。令 $l=0, u=4$, 函数 $g(x)=x^2+2x^{\frac{3}{2}}-40$ 。显然, $g(x)$ 在 $[0, 4]$ 上可微, 对它求导得 $g'(x)=2x+3\sqrt{x}$ 。由于 $g'(x)$ 在 $[0, 4]$ 上大于等于 0, 故 $g(x)$ 在 $[0, 4]$ 上单调递增。且 $g(4)=-8<0$, 因此, 该优化问题的可行域 $\mathcal{F}=[0, 4]$ 。下面判断可行域上哪些点为问题的 Pareto-FJ 稳定点。

当 $x=0$ 时, $g'(0)=0$, 对任意 $d \in D(x)$, 即任意 $d \geq 0$, 都有 $g'(0)^T d = 0$ 。因此, $x=0$ 是问题的 Pareto-FJ 稳定点。

当 $x \in (0, 1)$ 时, 对于任意 $d \geq 0$, $g'(x) > 0$, 此时 $g'(x)^T d \geq 0$; 对于任意 $d < 0$, 存在 $\xi = -1, \xi \in \partial(\|x-1\|)$, 使得 $\xi^T d > 0$ 。因此, $x \in (0, 1)$ 是问题的 Pareto-FJ 稳定点。

当 $x \in [1, 4)$ 时, 对于任意 $d \geq 0$, 存在 $\xi = 1, \xi \in \partial(\|x-1\|)$, 使得 $\xi^T d \geq 0$; 对于任意 $d < 0$, 存在 $\xi = -1, \xi \in \partial(\|x-10\|)$, 使得 $\xi^T d > 0$ 。因此, $x \in [1, 4)$ 是问题的 Pareto-FJ 稳定点。

当 $x=4$ 时, 对任意 $d \in D(x)$, 即任意 $d \leq 0$, 存在 $\xi = -1, \xi \in \partial(\|x-10\|)$, 使得 $\xi^T d \leq 0$ 。因此, $x=4$ 是问题的 Pareto-FJ 稳定点。

综上所述, 该问题的 Pareto-FJ 稳定点为 $[0, 4]$ 上所有点。

推论1 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点等价于在 x^* 处满足 $D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \{0\}$ 。

证明 先证明充分性。反设存在非零向量 $d_0 \in D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap G_0(x^*)$ 。由定义3及定义4知, 对于任意 $\xi_k \in \partial h_k(x)$, $k=1, 2, \dots, q$, 都有 $\xi_k^T d_0 < 0$, 且对于任意 $\eta_j \in \partial g_j(x)$, $j \in I_0(x)$, 都有 $\eta_j^T d_0 < 0$ 。故由定理2得, $x^* \in \mathcal{F}$ 不是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点, 与条件矛盾。

现在证明必要性。由于在 $x^* \in \mathcal{F}$ 处, $D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \{0\}$ 。反设 $x^* \in \mathcal{F}$ 不是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点, 则存在 $d_0 \in D(x^*)$, 对于任意 $\xi_k \in \partial h_k(x)$, $k=1, 2, \dots, q$, 都有 $\xi_k^T d_0 < 0$, 且对于任意 $\eta_j \in \partial g_j(x)$, $j \in I_0(x)$, 都有 $\eta_j^T d_0 < 0$ 。从而得 $d_0 \neq 0$, 且 $d_0 \in D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap G_0(x^*)$, 矛盾。证毕

推论2 若 $x^* \in \mathcal{F}$ 满足 $D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \{0\}$, 则 x^* 是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点。

证明 由文献[20]知 $G_0(x^*) \subseteq G(x^*)$, 故由条件得 $D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap G_0(x^*) = \{0\}$ 。由推论1知 x^* 是问题(1)的 Pareto-FJ 稳定点。证毕

定理3 设 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的局部 Pareto 有效解, 且存在方向 $d \in D(x^*)$ 使得对于任意 $j \in \{1, 2, \dots, m: g_j(x^*)=0\}$ 满足以下条件:

$$\eta_j^T d < 0, \forall \eta_j \in \partial g_j(x^*), \quad (8)$$

则存在 $\sigma_1^*, \dots, \sigma_q^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbf{R}$, 使得 $\sigma_k^* \geq 0, \sigma_k^* \neq 0, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* \geq 0, \lambda_j^* g_j(x^*)=0, j=1, 2, \dots, m$,

且存在向量 $\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \partial g_j(x^*)$, 使得对于任意 $d \in D(x^*)$ 都有 $\bar{\xi}^T d \geq 0$ 。

证明 若 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的局部 Pareto 有效解, 则由文献[16]中定理3.4可得, 存在一组乘子 $\sigma_1, \sigma_2, \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbf{R}$ 满足 $\sigma_k \geq 0, \sigma_k \neq 0, k=1, 2, \lambda_j \geq 0, \lambda_j g_j(x^*)=0, j=1, 2, \dots, m$, 且存在向量

$$\bar{\xi} \in \sigma_1 \partial f_1(x^*) + \sigma_2 \partial f_2(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(x^*),$$

使得对于任意 $d \in D(x^*)$, 都有 $\bar{\xi}^T d \geq 0$ 。

由式(3)、(4)得:

$$\begin{aligned} \sigma_1 \partial f_1(x^*) + \sigma_2 \partial f_2(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(x^*) &= \sigma_1 \sum_{k=1}^q \partial h_k(x^*) + \sigma_2 \sum_{k=1}^q \delta_k \partial h_k(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(x^*) = \\ &= \sum_{k=1}^q (\sigma_1 + \sigma_2 \delta_k) \partial h_k(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(x^*), \end{aligned}$$

其中:任取 $\delta_k \geq 0, k=1, 2, \dots, q$, 且满足 $\sum_{k=1}^q \delta_k = 1$, 对于任意 $k \notin I_2(x)$, $\delta_k = 0$ 。故存在 $\delta_k^*, k=1, 2, \dots, q$ 满足上述条件使得向量:

$$\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q (\sigma_1 + \sigma_2 \delta_k^*) \partial h_k(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j \partial g_j(x^*), \bar{\xi}^T d \geq 0.$$

令 $\sigma_k^* = \sigma_1 + \sigma_2 \delta_k^*, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* = \lambda_j, j=1, 2, \dots, m$, 则对于任意 $k=1, 2, \dots, q$ 都有 $\sigma_k^* \geq 0, \sigma^*$ 不全为 0, 且对于任意 $j=1, 2, \dots, m$ 都有 $\lambda_j^* \geq 0, \lambda_j^* g_j(x^*) = 0$. 结论成立. 证毕

根据定理 3, 下面给出问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点定义.

定义 8 (Pareto-KKT 稳定点) 如果 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的可行点, 且满足存在 $\sigma_1^*, \dots, \sigma_q^*, \lambda_1^*, \dots, \lambda_m^* \in \mathbf{R}$, 使得 $\sigma_k^* \geq 0, \sigma^* \neq 0, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* \geq 0, \lambda_j^* g_j(x^*) = 0, j=1, 2, \dots, m$, 存在向量 $\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(x^*) + \sum_{j=1}^m \lambda_j^* \partial g_j(x^*), \bar{\xi}^T d \geq 0, d \in D(x^*)$, 则称 x^* 为问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点.

定理 4 $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点当且仅当对于任意 $d \in D(x^*), d \neq 0$, 存在 $k_d \in \{1, 2, \dots, q\}$, 能够找到 $\xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*)$, 使得 $\xi_{k_d}^T d \geq 0$; 或者存在 $j_d \in I_0(x^*)$, 能够找到 $\eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*)$, 使得 $\eta_{j_d}^T d > 0$.

证明 由 Pareto-KKT 稳定点定义, 存在乘子 $\sigma_k^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q, \lambda_j^* \geq 0, j=1, 2, \dots, m$ 满足当 $g_j(x^*) < 0$ 时 $\lambda_j^* = 0$, 其中 $\sigma_1^*, \dots, \sigma_q^*$ 不全为 0. 存在向量 $\bar{\xi} \in \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \partial h_k(x^*) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \partial g_j(x^*)$, 使得对于任意 $d \in D(x^*)$, 都有 $\bar{\xi}^T d \geq 0$, 其中 $I_0(x^*) = \{j \in \{1, 2, \dots, m\} : g_j(x^*) = 0\}$. 上述表述等价于存在 $\xi_k \in \partial h_k(x^*), k=1, 2, \dots, q, \eta_j \in \partial g_j(x^*), j \in I_0(x^*)$ 使得 $\bar{\xi} = \sum_{k=1}^q \sigma_k^* \xi_k + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* \eta_j$, 满足对于任意 $d \in D(x^*), \bar{\xi}^T d \geq 0$, 即:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d) \geq 0. \quad (9)$$

先证充分性. 反设存在 $d_0 \in D(x^*)$, 对任意 $\xi_k \in \partial h_k(x^*), k=1, 2, \dots, q$, 都有 $\xi_k^T d_0 < 0$, 且对任意 $\eta_j \in \partial g_j(x^*), j \in I_0(x^*)$, 都有 $\eta_j^T d_0 \leq 0$, 则对于任意不全为 0 的 $\sigma_k^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q$, 任意 $\lambda_j^* \geq 0, j \in I_0(x^*)$, 且:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d_0) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d_0) < 0. \quad (10)$$

由于式(9)、(10)矛盾, 故结论成立.

下证必要性. 定义如下 2 个集合:

$$D_1(x^*) = \{d \in D(x^*) : \text{存在 } k_d \in \{1, 2, \dots, q\}, \text{能够找到 } \xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*), \text{使得 } \xi_{k_d}^T d \geq 0\},$$

$$D_2(x^*) = \{d \in D(x^*) : \text{存在 } j_d \in I_0(x^*), \text{能够找到 } \eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*), \text{使得 } \eta_{j_d}^T d > 0\},$$

则 $D(x^*) \subseteq D_1(x^*) \cup D_2(x^*)$. 对于任意 $d \in D_1(x^*)$, 假设在 $k_d \in \{1, 2, \dots, q\}$ 处, 存在 $\xi_{k_d} \in \partial h_{k_d}(x^*)$, 使得 $\xi_{k_d}^T d \geq 0$. 令 $\sigma_{k_d}^* = 1$, 其余乘子全为 0, 则该组乘子满足 Pareto-KKT 稳定点中对乘子的要求, 且:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d) = \sigma_{k_d}^* \xi_{k_d}^T d \geq 0.$$

对于任意 $d \in D_2(x^*)$, 假设在 $j_d \in I_0(x^*)$, 存在 $\eta_{j_d} \in \partial g_{j_d}(x^*)$, 使得 $\eta_{j_d}^T d > 0$. 对于任意不全为 0 的 $\sigma_k^* \geq 0, k=1, 2, \dots, q$, 当 $\lambda_{j_d}^*$ 取充分大时, 有:

$$\sum_{k=1}^q \sigma_k^* (\xi_k^T d) + \sum_{j \in I_0(x^*)} \lambda_j^* (\eta_j^T d) \geq 0.$$

故由式(9)知, $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点. 证毕

下面通过具体算例说明如何利用定理 4 寻找问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点.

例 2 多目标优化问题(1)中, 取 $n=1, q=5, m=1, a^{(1)}=1, a^{(2)}=1.5, a^{(3)}=3, a^{(4)}=10, a^{(5)}=21$. 令 $l=0, u=4$, 函数 $g(x) = x^2 + 2x^{\frac{3}{2}} - 40$. 由例 1 知, 该优化问题的可行域 $\mathcal{F} = [0, 4]$. 下面判断可行域上哪些点为问题的 Pareto-KKT 稳定点.

当 $x=0$ 时, 取 $d_0=1$, 显然 $d_0 \in D(x)$ 且 $d_0 \neq 0$. 对任意 $\xi_k \in \partial(\|x - a^{(k)}\|), k=1, 2, \dots, 5$, 都有 $\xi_k = -1$, 故 $\xi_k^T d = -1 < 0$. 又 $g'(0)=0$, 故 $g'(0)^T d = 0$. 因此, $x=0$ 不是问题的 Pareto-KKT 稳定点.

当 $x \in (0, 1)$ 时, 对于任意 $d > 0, g'(x) > 0$, 此时 $g'(x)^T d > 0$; 对于任意 $d < 0$, 存在 $\xi = -1, \xi \in \partial(\|x - 1\|)$, 使得 $\xi^T d > 0$. 因此, $x \in (0, 1)$ 是问题的 Pareto-KKT 稳定点.

当 $x \in [1, 4)$ 时, 对于任意 $d > 0$, 存在 $\xi = 1, \xi \in \partial(\|x - 1\|)$, 使得 $\xi^\top d > 0$; 对于任意 $d < 0$, 存在 $\xi = -1, \xi \in \partial(\|x - 10\|)$, 使得 $\xi^\top d > 0$ 。因此, $x \in [1, 4)$ 是问题的 Pareto-KKT 稳定点。

当 $x = 4$ 时, 对任何 $d \in D(x)$, 即任意 $d < 0$, 存在 $\xi = -1, \xi \in \partial(\|x - 10\|)$, 使得 $\xi^\top d < 0$ 。因此, $x = 4$ 是问题的 Pareto-KKT 稳定点。

综上所述, 该问题的 Pareto-KKT 稳定点为 $(0, 4]$ 上所有点。

推论 3 (几何最优性条件) $x^* \in \mathcal{F}$ 是问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点等价于:

$$D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap \text{cl}(G_0(x^*)) = \{0\}.$$

证明 由定义 4 得 $\text{cl}(G_0(x^*)) = \{d \in \mathbf{R}^n : d = 0 \text{ 或对任意 } \eta_j \in \partial g_j(x), j \in I_0(x), \eta_j^\top d \leq 0\}$ 。

先证明充分性。反设存在非零向量 $d_0 \in D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap \text{cl}(G_0(x^*))$ 。由集合定义知, 对于任意 $\xi_k \in \partial h_k(x), k = 1, 2, \dots, q$, 都有 $\xi_k^\top d_0 < 0$, 且对于任意 $\eta_j \in \partial g_j(x), j \in I_0(x)$, 都有 $\eta_j^\top d_0 \leq 0$ 。故由定理 4 得, $x^* \in \mathcal{F}$ 不是问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点, 与条件矛盾。

现在证明必要性。由于在 $x^* \in \mathcal{F}$ 处, $D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap \text{cl}(G_0(x^*)) = \{0\}$ 。反设 $x^* \in \mathcal{F}$ 不是问题(1)的 Pareto-KKT 稳定点, 则存在 $d_0 \in D(x^*)$, 对于任意 $\xi_k \in \partial h_k(x), k = 1, 2, \dots, q$, 都有 $\xi_k^\top d_0 < 0$, 且对于任意 $\eta_j \in \partial g_j(x), j \in I_0(x)$, 都有 $\eta_j^\top d_0 \leq 0$ 。故 $d_0 \neq 0$, 且 $d_0 \in D(x^*) \cap H_0(x^*) \cap \text{cl}(G_0(x^*))$, 矛盾。证毕

3 结论

本文研究了一类具有范数结构的特殊凸多目标优化问题, 讨论了同时带区间约束和非光滑约束情况下问题的最优性条件, 给出了相应稳定点定义及等价条件。深入研究具有范数结构的多目标优化问题有着重要意义, 能够为相关领域的实际应用提供理论基础。

参考文献:

- [1] SAMANLIOGLU F. A multi-objective mathematical model for the industrial hazardous waste location-routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 2013, 226(2): 332-340.
- [2] MORADIJOZ M, MOGHADDAM M P, HAGHIFAM M R, et al. A multi-objective optimization problem for allocating parking lots in a distribution network[J]. International Journal of Electrical Power & Energy Systems, 2013, 46: 115-122.
- [3] MARCENARO-GUTIERREZ O D, LUQUE M, RUIZ F. An application of multiobjective programming to the study of workers' satisfaction in the Spanish labour market[J]. European Journal of Operational Research, 2010, 203(2): 430-443.
- [4] HÄMÄLÄINEN J P, MIETTINEN K, TARVAINEN P, et al. Interactive solution approach to a multiobjective optimization problem in a paper machine headbox design[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2003, 116(2): 265-281.
- [5] GUERRAGGIO A, MOLHO E, ZAFFARONI A. On the notion of proper efficiency in vector optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 82: 1-21.
- [6] GEOFFRION A M. Proper efficiency and the theory of vector maximization[J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1968, 22(3): 618-630.
- [7] BORWEIN J. Proper efficient points for maximizations with respect to cones[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 1977, 15(1): 57-63.
- [8] BENSON H P. Vector maximization with two objective functions[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1979, 28(2): 253-257.
- [9] ZHAO K Q, YANG X M. Characterizations of efficient and weakly efficient points in nonconvex vector optimization[J]. Journal of Global Optimization, 2015, 61(3): 575-590.
- [10] LIN J G. Maximal vectors and multi-objective optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1976, 18(1): 41-64.
- [11] MAEDA T. Constraint qualifications in multiobjective optimization problems: differentiable case[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1994, 80(3): 483-500.
- [12] PREDA V, CHITESCU I. On constraint qualification in multiobjective optimization problems: semidifferentiable case[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1999, 100(2): 417-433.
- [13] LI X F. Constraint qualifications in nonsmooth multiobjective optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 106(2): 373-398.

- [14] 赵克全,唐莉萍,杨新民. 一类非光滑优化问题的最优性与对偶[J]. 运筹学学报,2010,14(2):45-54.
ZHAO K Q,TANG L P,YANG X M. Optimality and duality for a class of nonsmooth optimization problems[J]. Operations Research Transactions,2010,14(2):45-54.
- [15] 赵克全,唐莉萍. 一类不可微多目标分式规划问题的最优性条件[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2010,27(4):1-4.
ZHAO K Q,TANG L P. Optimality conditions for a class of non-differentiable multi-objective fractional programming problem [J]. Journal of Chongqing Normal University(Natural Science),2010,27(4):1-4.
- [16] LIUZZI G,LUCIDI S,RINALDI F. A derivative-free approach to constrained multiobjective nonsmooth optimization[J]. SIAM Journal on Optimization,2016,26(4):2744-2774.
- [17] OYMAK S,JALALI A,FAZEL M,et al. Simultaneously structured models with application to sparse and low-rank matrices [J]. IEEE Transactions on Information Theory,2015,61(5):2886-2908.
- [18] 谭豫琳,杨春蓉,赵克全. 具有范数结构多目标优化问题的近似方法及应用[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版),2023,40(2):28-33.
TAN Y L,YANG C R,ZHAO K Q. An approximate method for multi-objective optimization problems with norm structure and its application[J]. Journal of Chongqing Normal University (Natural Science),2023,40(2):28-33.
- [19] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin:Springer,2005.
- [20] BAGIROV A,KARIMITSA N,MÄKELÄ M M. Introduction to nonsmooth optimization: theory, practice and software[M]. Cham:Springer International Publishing,2014.

Operations Research and Cybernetics

Optimality Conditions for Convex Multi-Objective Optimization Problems with Norm Structure

CHEN Jie, XIA Yuanmei, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The aim is to investigate the optimality conditions for a specific class of multi-objective optimization problems with a norm structure. The Fritz-John and Kuhn-Tucker necessary optimality conditions for the Pareto optimum are systematically examined by calculating the subdifferential of the objective functions of these problems. Theorems are utilized to establish the definitions of novel Pareto-FJ and Pareto-KKT stationary points. Additionally, equivalence conditions for these stationary points, together with their related geometric optimality conditions, are presented and then proven. Several theorems such as the Pareto-FJ optimality condition and the Pareto-KKT optimality condition are established for a class of norm-structured convex multi-objective optimization problems with general constraints and interval constraints. The results obtained enrich the theory of multi-objective optimization and provide a foundational basis for the applied research of multi-objective optimization problems with a normative structure.

Keywords: multi-objective optimization problems; norm structures; optimality conditions

(责任编辑 黄 颖)