

鲁棒多目标优化问题的约束标量化方法^{*}

邓 纳, 赵克全

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:为了研究带约束鲁棒标量化问题的最优解与多目标优化问题的鲁棒有效解和鲁棒弱有效解之间的关系,获得鲁棒解的性质。利用鲁棒标量化方法将带约束的确定性多目标优化问题推广到鲁棒多目标优化问题,并在不同参数条件下,对鲁棒有效解和鲁棒弱有效解进行研究。建立了鲁棒有效解和鲁棒弱有效解的一些充分条件,并给出具体例子对主要结果进行解释。所得结果是对最近一些研究工作的改进与推广。

关键词:鲁棒多目标优化问题;鲁棒标量化问题;鲁棒弱有效解;鲁棒有效解

中图分类号:O221.6

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)03-0020-06

随着多目标优化理论与方法的不断发展,多目标优化各类解概念及其性质已成为多目标优化研究的重要基础^[1-7]。而在多目标优化问题的研究中,标量化方法对于解的性质研究有着十分重要的作用,并且标量化方法(包括线性标量化方法与非线性标量化方法)已经有了大量的研究^[8-11]。

鲁棒优化方法在实际问题中的应用非常广泛。因此,鲁棒多目标优化问题的有效解和弱有效解的研究对于促进多目标优化理论的发展及其在现实生活中的应用具有重要意义。近些年来,关于鲁棒优化问题的相关研究已有大量的成果,包括各类鲁棒解的定义、各类鲁棒解的性质以及鲁棒多目标优化问题标量化的一些性质。2014 年,Brurachik 等人^[12]在线性加权约束法的基础上,研究了非线性多目标优化问题的标量化方法的鲁棒有效解和鲁棒弱有效解与多目标优化问题最优解之间的关系。2015 年,Köbis 等人^[13]引入了无约束多目标优化问题,并得到了多目标优化问题的解的标量化性质,同时给出了严格鲁棒优化问题最优解的一个充分条件。2015 年,Zamani 等人^[14]将线性多目标优化问题推广到非线性情形,针对这类问题提出了新的鲁棒有效解的概念,并在可行集为紧性或凸性的条件下,研究了这类问题的鲁棒有效解和真有效解的一些最优性必要条件和充分条件。2016 年,Chuong^[15]针对包含非光滑/非凸实值函数的鲁棒多目标优化问题进行了研究,建立了鲁棒解的充要最优性条件,并解决了一个对偶鲁棒多目标问题,同时在广义凸性假设的前提下对它们之间的强弱对偶关系进行了研究。2020 年,Chuong^[16]利用先进的变分分析和广义微分技术,建立了不确定非光滑多目标优化问题的鲁棒最优性条件,并提出了一个对偶多目标优化问题,在(严格)广义凸性假设下研究了原始问题与其对偶问题之间的弱、强、逆对偶关系。2021 年,Hong 等人^[17]考虑了带有局部利普希茨函数的多目标优化问题,建立了鲁棒极大极小优化问题的(局部)最优解的最优性必要条件,并给出了鲁棒极大极小优化问题和鲁棒多目标优化问题的对偶性结果。2022 年,Kerdkaew 等人^[18]研究了一个包含非光滑非凸函数的不确定多目标优化问题,并引入了局部/全局鲁棒弱尖锐有效解的概念,建立了所考虑问题的局部/全局鲁棒弱尖锐有效解的充要条件。2023 年,Hoseinpour 等人^[19]在广义切比雪夫范数的基础上,加入松弛变量和剩余变量,提出了两类新的解决多目标优化问题的标量化方法,并建立了多目标优化问题的弱有效解、真有效解与两类标量化问题最优解之间的关系。2024 年,Thu 等人^[20]利用凸分析和 C-微分的先进技术,研究了不确定集合下不确定多目标优化问题的 KKT 型鲁棒最优性充要条件和鲁棒对偶性。

值得注意的是,目前关于带非负松弛约束和非负剩余约束的鲁棒标量化问题与多目标优化问题的鲁棒有效

^{*} 收稿日期:2023-12-27 修回日期:2024-05-12 网络出版时间:2024-06-07T15:27

资助项目:国家自然科学基金项目——重大项目(No. 11991024),自由申请项目(No. 12171063);重庆市高校创新研究群体项目(No. CXQT20014);重庆市自然科学基金项目(No. cstc2022ycjh-bgzxm0114)

第一作者简介:邓纳,女,研究方向为多目标优化理论与方法,E-mail:2505669360@qq.com;通信作者:赵克全,教授,博士生导师,E-mail:kequanz@163.com

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.N.20240607.1410.013

解与鲁棒弱有效解之间的关系研究还比较少。受此启发,本文主要将文献[21]中的结果推广到带约束的鲁棒多目标情形,建立这类约束多目标优化问题的鲁棒弱有效解和鲁棒有效解的一些结果,并给出具体例子进行了说明。

1 预备知识

本文考虑如下多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{MOP}) \quad & \min (f_1(\mathbf{x}, \mu_1), f_2(\mathbf{x}, \mu_2), \dots, f_p(\mathbf{x}, \mu_p)), \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in F_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid g_j(\mathbf{x}, v_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, l\}, \end{aligned}$$

其中 $f_i: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m_i} \rightarrow \mathbf{R} (i=1, 2, \dots, p)$ 与 $g_j: \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{m_j} \rightarrow \mathbf{R} (j=1, 2, \dots, l)$ 均为连续函数, $\mu_i \in U_i \subseteq \mathbf{R}^{m_i}, v_j \in V_j \subseteq \mathbf{R}^{m_j}$, 且 U_i 和 V_j 均为凸紧集。对于任意向量 $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{R}^m$, 定义序关系: $\mathbf{x} < \mathbf{y} \Rightarrow x_i < y_i, \forall i=1, 2, \dots, m; \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \dots, m; \mathbf{x} \leq \mathbf{y} \Rightarrow x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \dots, m$, 且至少有一个 i 使得 $x_i < y_i$ 。

考虑(MOP)的如下鲁棒多目标优化问题:

$$\begin{aligned} (\text{RMOP}) \quad & \min (\max_{\mu_1 \in U_1} f_1(\mathbf{x}, \mu_1), \max_{\mu_2 \in U_2} f_2(\mathbf{x}, \mu_2), \dots, \max_{\mu_p \in U_p} f_p(\mathbf{x}, \mu_p)), \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in F_1 = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n \mid \max_{v_j \in V_j} g_j(\mathbf{x}, v_j) \leq 0, j=1, 2, \dots, l\}. \end{aligned}$$

定义 1^[12] 1) 称(RMOP)的可行解 $\mathbf{x} \in F_1$ 为(MOP)的鲁棒可行解;

2) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为(MOP)的鲁棒弱有效解, 如果 $\hat{\mathbf{x}} \in F_1$ 为(RMOP)的弱有效解;

3) 称 $\hat{\mathbf{x}}$ 为(MOP)的鲁棒有效解, 如果 $\hat{\mathbf{x}} \in F_1$ 为(RMOP)的有效解。

考虑如下约束标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{P}_{\epsilon_{-k}}) \quad & \min f_k(\mathbf{x}, \mu_k), \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in F_2 = \{\mathbf{x} \in F_0 \mid f_i(\mathbf{x}, \mu_i) \leq \epsilon_i, i \neq k\}, \end{aligned}$$

其中: $\epsilon_{-k} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_p)^T \in \mathbf{R}^{p-1}, k \in \{1, 2, \dots, p\}$ 。

引入如下鲁棒标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{RP}_{\epsilon_{-k}}) \quad & \min \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\mathbf{x}, \mu_k), \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in F_3 = \{\mathbf{x} \in F_1 \mid \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, \mu_i) \leq \epsilon_i, i \neq k\}, \end{aligned}$$

其中: $\epsilon_{-k} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_p)^T \in \mathbf{R}^{p-1}, k \in \{1, 2, \dots, p\}$ 。受 Ehrgott 在文献[21]中研究工作的启发, 本文引入带非负松弛约束的鲁棒标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{RP}_{\epsilon_{-k}}^+) \quad & \min \left\{ \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\mathbf{x}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i s_i \right\}, \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in F_4 = \{\mathbf{x} \in F_1 \mid \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, \mu_i) + s_i \leq \epsilon_i, i \neq k; s_i \geq 0, i \neq k\}, \end{aligned}$$

其中: $\epsilon_{-k} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_p)^T \in \mathbf{R}^{p-1}, \lambda_i \geq 0, i \neq k$ 。

引入带非负剩余约束的鲁棒标量化问题:

$$\begin{aligned} (\text{RP}_{\epsilon_{-k}}^-) \quad & \min \left\{ \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\mathbf{x}, \mu_k) + \sum_{i \neq k} \gamma_i s_i \right\}, \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{x} \in F_5 = \{\mathbf{x} \in F_1 \mid \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\mathbf{x}, \mu_i) - s_i \leq \epsilon_i, i \neq k; s_i \geq 0, i \neq k\}, \end{aligned}$$

其中: $\epsilon_{-k} = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_{k-1}, \epsilon_{k+1}, \dots, \epsilon_p)^T \in \mathbf{R}^{p-1}, \gamma_i \geq 0, i \neq k$ 。

2 鲁棒多目标优化问题的标量化性质

定理 1 对所有的 $\epsilon_{-k} \in \mathbf{R}^{p-1}$, 下面两个结果成立:

1) 若 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(RP _{ϵ_{-k}})的最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解。

2) 若 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(RP _{ϵ_{-k}})的唯一最优解, 则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证明 1) $\hat{\mathbf{x}}$ 是(RP _{ϵ_{-k}})的最优解, 则对任意的 $\mathbf{x} \in F_3$ 都有 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k) \leq \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\mathbf{x}, \mu_k)$, 并且对任意的 $\mu_i \in U_i, 1 \leq i \leq p, i \neq k, \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i) \leq \epsilon_i$ 。下证 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解。若不然, 则存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in F_1$ 使得对任

意的 $1 \leq i \leq p$, 有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) < \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i)$ 。故有 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k)$ 且 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) < \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i) \leq \epsilon_i, i=1, 2, \dots, p, i \neq k$ 。这与 $\hat{x}$ 是 $(RP_{\epsilon-k})$ 的最优解矛盾, 故 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的鲁棒弱有效解。

2) 假定 $\hat{x}$ 是 $(RP_{\epsilon-k})$ 的最优解, 则对任意的 $x \in F_3$ 都有 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k) \leq \max_{\mu_k \in U_k} f_k(x, \mu_k)$, 并且对任意的 $\mu_i \in U_i, 1 \leq i \leq p, i \neq k, \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i) \leq \epsilon_i$ 。下证 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的鲁棒有效解。若不然, 则存在 $\tilde{x} \in F_1$ 使得对任意的 $1 \leq i \leq p$, 有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i)$, 存在 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有 $\max_{\mu_j \in U_j} f_j(\tilde{x}, \mu_j) < \max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{x}, \mu_j)$ 。故有 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) \leq \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k)$ 且 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i) \leq \epsilon_i, i=1, 2, \dots, p, i \neq k$ 。这与 $\hat{x}$ 是 $(RP_{\epsilon-k})$ 的唯一最优解矛盾, 故 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的鲁棒有效解。证毕

例 1 令 $f_1 = x_1 - 1 + \mu_1, f_2 = x_2 + 1 + \mu_2, g_1 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + v_1$ 且 $\mu_1 \in U_1 = [-1, 1], \mu_2 \in U_2 = [-2, -1], v_1 \in V_1 = [-1, 0]$ 。

取 $k=1, \epsilon_2=1, \hat{x}=(2, 1)$ 是 $(RP_{\epsilon-k})$ 的最优解, 可以验证 $\hat{x}=(2, 1)$ 是 (MOP) 的鲁棒弱有效解。

例 2 令 $f_1 = x_1 - 1 + \mu_1, f_2 = -x_1 + x_2 + \mu_2, g_1 = (x_1 - 2)(x_2 - 2) + v_1$ 且 $\mu_1 \in U_1 = [-1, 1], \mu_2 \in U_2 = [-3, -2], v_1 \in V_1 = [-1, 0]$ 。

取 $k=1, \epsilon_2=1, \hat{x}=(-1, 2)$ 是 $(RP_{\epsilon-k})$ 的唯一最优解, 可以验证 $\hat{x}=(-1, 2)$ 是 (MOP) 的鲁棒有效解。

引理 1 设 $\lambda_{-k} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p) > 0$, 如果 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 有最优解, 则它的每一个最优解 $(\hat{x}, \hat{s})$ 使得对于所有的 $i \neq k$, 有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i) + \hat{s}_i = \epsilon_i$ 。

证明 由于 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解, 假设存在 $j \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{k\}$ 使得 $\max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{x}, \mu_j) + \hat{s}_j < \epsilon_j$ 。

令 $\delta = \epsilon_j - \max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{x}, \mu_j) - \hat{s}_j > 0$, 定义 $\tilde{s}_i = \begin{cases} \hat{s}_i, i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{j, k\} \\ \hat{s}_i + \delta, i = j \end{cases}$, 可知 $(\hat{x}, \tilde{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的可行点。

因为 $\tilde{s}_j > \hat{s}_j$ 且 $\lambda_{-k} > 0$, 则有 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \tilde{s}_i < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i$, 这与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解矛盾。证毕

定理 2 设 $\lambda_{-k} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p) \geq 0$, 若 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解, 则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的鲁棒弱有效解。

证明 令 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解且 $\lambda_{-k} \geq 0$ 。假设 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的鲁棒弱有效解, 则存在 $\tilde{x} \in F_1$ 使得对任意的 $1 \leq i \leq p$, 有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i)$ 。则 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) + \hat{s}_i \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i) + \hat{s}_i \leq \epsilon_i, i \neq k$, 即 $(\tilde{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的可行点, 并且 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k)$ 。这意味着 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i$, 与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解矛盾, 故 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的鲁棒弱有效解。证毕

例 3 令 $f_1 = x_1 - 1 + \mu_1, f_2 = x_2 + 1 + \mu_2$ 且 $\mu_1 \in U_1 = [-1, 1], \mu_2 \in U_2 = [-2, -1]$, 令 $g_1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + v_1, g_2 = -x_1 - 1 + v_2, g_3 = x_1 - 3 + v_3, g_4 = -x_2 - 1 + v_4, g_5 = x_2 - 3 + v_5$ 且 $v_1 \in V_1 = [-1, 0], v_2 \in V_2 = [-1, 0], v_3 \in V_3 = [-3, 0], v_4 \in V_4 = [-1, 0], v_5 \in V_5 = [-3, 0]$ 。

取 $k=1, \lambda_2=0, \epsilon_2=0$, 则 $(\hat{x}, \hat{s}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{s}_2) = (1, 0, 0)$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解, 可以验证 $\hat{x}=(1, 0)$ 是 (MOP) 的鲁棒弱有效解。

定理 3 设 $\lambda_{-k} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p) \geq 0$, 若 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解, 如果 $\hat{x}$ 是唯一的, 则 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的鲁棒有效解。

证明 令 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的最优解且 $\lambda_{-k} \geq 0$ 。假设 $\hat{x}$ 不是 (MOP) 的鲁棒有效解, 则存在 $\tilde{x} \in F_1$ 使得对任意的 $1 \leq i \leq p$, 有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i)$ 且存在 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$, 有 $\max_{\mu_j \in U_j} f_j(\tilde{x}, \mu_j) < \max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{x}, \mu_j)$ 。则 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) + \hat{s}_i \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i) + \hat{s}_i \leq \epsilon_i, i \neq k$, 即 $(\tilde{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的可行点, 并且 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k)$ 。这意味着 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i$, 与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^+)$ 的唯一最

优解矛盾,故 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证毕

例4 令 $f_1 = x_1 - 1 + \mu_1, f_2 = x_2 + 1 + \mu_2$ 且 $\mu_1 \in U_1 = [-1, 1], \mu_2 \in U_2 = [-2, -1]$,令 $g_1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + v_1, g_2 = -x_1 - 1 + \nu_2, g_3 = x_1 - 3 + \nu_3, g_4 = -x_2 - 1 + \nu_4, g_5 = x_2 - 3 + \nu_5$ 且 $\nu_1 \in V_1 = [-1, 0], \nu_2 \in V_2 = [-1, 0], \nu_3 \in V_3 = [-3, 0], \nu_4 \in V_4 = [-1, 0], \nu_5 \in V_5 = [-3, 0]$ 。

取 $k=1, \lambda_2=1, \varepsilon_2=0$,则 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{s}_2) = (1, -1, 1)$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^+)$ 的唯一最优解,可以验证 $\hat{\mathbf{x}} = (1, -1)$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

定理4 设 $\lambda_{-k} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_p) > 0$,若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^+)$ 的最优解,则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证明 令 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^+)$ 的最优解且 $\lambda_{-k} > 0$ 。假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是(MOP)的鲁棒有效解,则存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in F_1$ 使得对任意的 $1 \leq i \leq p$,有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_i) \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i)$ 且存在 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$,有 $\max_{\mu_j \in U_j} f_j(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_j) < \max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{\mathbf{x}}, \mu_j)$ 。

1) 当 $j=k$ 时, $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_i) + \hat{s}_i \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i) + \hat{s}_i = \varepsilon_i, i \neq k$,即 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^+)$ 的可行点,且 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_k) < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k)$ 。这意味着 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i$,与 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^+)$ 的最优解矛盾,故 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

2) 当 $j \neq k$ 时,则对任意的 $1 \leq i \leq p$,有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_i) + \hat{s}_i \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i) + \hat{s}_i$,且 $\max_{\mu_j \in U_j} f_j(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_j) + \hat{s}_j < \max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{\mathbf{x}}, \mu_j) + \hat{s}_j$ 。则存在 $\delta_j > 0$,使得 $\hat{s}_j + \delta_j \geq 0$ 且 $\max_{\mu_j \in U_j} f_j(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_j) + \hat{s}_j + \delta_j \leq \max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{\mathbf{x}}, \mu_j) + \hat{s}_j$ 。

令 $\tilde{s}_i = \begin{cases} \hat{s}_i, & i \in \{1, 2, \dots, p\} \setminus \{j, k\} \\ \hat{s}_i + \delta, & i = j \end{cases}$,故 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_i) + \tilde{s}_i \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i) + \hat{s}_i = \varepsilon_i, i \neq k$,即 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})$ 是

$(RP_{\varepsilon_{-k}}^+)$ 的可行点。又 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_k) \leq \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k)$,因此由 $\lambda_{-k} > 0$ 和 $\delta_j > 0$ 可得:

$$\begin{aligned} \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \tilde{s}_i &\leq \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \tilde{s}_i = \\ \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i - \lambda_j \delta_j &< \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i, \end{aligned}$$

即 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \tilde{s}_i < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k) - \sum_{i \neq k} \lambda_i \hat{s}_i$,这与 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^+)$ 的最优解矛盾。故 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证毕

定理5 设 $\gamma_{-k} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_p) \geq 0$,若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^-)$ 的最优解,则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解。

证明 令 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^-)$ 的最优解且 $\gamma_{-k} \geq 0$ 。假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是(MOP)的鲁棒弱有效解,则存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in F_1$ 使得对任意的 $1 \leq i \leq p$,有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_i) < \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i)$ 。则 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_i) - \hat{s}_i < \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i) - \hat{s}_i \leq \varepsilon_i, i \neq k$,即 $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^-)$ 的可行点,并且 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_k) < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k)$ 。这意味 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_k) + \sum_{i \neq k} \gamma_i \hat{s}_i < \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{\mathbf{x}}, \mu_k) + \sum_{i \neq k} \gamma_i \hat{s}_i$,与 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^-)$ 的最优解矛盾,故 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解。

证毕

例5 令 $f_1 = x_1 - 1 + \mu_1, f_2 = x_2 + 1 + \mu_2$ 且 $\mu_1 \in U_1 = [-1, 1], \mu_2 \in U_2 = [-2, -1]$,令 $g_1 = (x_1 - 1)(x_2 - 1) + v_1, g_2 = -x_1 - 1 + \nu_2, g_3 = x_1 - 3 + \nu_3, g_4 = -x_2 - 1 + \nu_4, g_5 = x_2 - 3 + \nu_5$ 且 $\nu_1 \in V_1 = [-1, 0], \nu_2 \in V_2 = [-1, 0], \nu_3 \in V_3 = [-3, 0], \nu_4 \in V_4 = [-1, 0], \nu_5 \in V_5 = [-3, 0]$ 。

取 $k=1, \gamma_2=0, \varepsilon_2=0$,则 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{s}_2) = (-1, 3, 3)$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^-)$ 的一个最优解,可以验证 $\hat{\mathbf{x}} = (-1, 3)$ 是(MOP)的鲁棒弱有效解。

定理6 设 $\gamma_{-k} = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_p) \geq 0$,若 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^-)$ 的最优解,如果 $\hat{\mathbf{x}}$ 是唯一的,则 $\hat{\mathbf{x}}$ 是(MOP)的鲁棒有效解。

证明 令 $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{s}})$ 是 $(RP_{\varepsilon_{-k}}^-)$ 的最优解且 $\gamma_{-k} \geq 0$ 。假设 $\hat{\mathbf{x}}$ 不是(MOP)的鲁棒有效解,则存在 $\tilde{\mathbf{x}} \in F_1$ 使得对任意的 $1 \leq i \leq p$,有 $\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_i) \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{\mathbf{x}}, \mu_i)$ 且存在 $j \in \{1, 2, \dots, p\}$,有 $\max_{\mu_j \in U_j} f_j(\tilde{\mathbf{x}}, \mu_j) < \max_{\mu_j \in U_j} f_j(\hat{\mathbf{x}}, \mu_j)$ 。则

$\max_{\mu_i \in U_i} f_i(\tilde{x}, \mu_i) - \hat{s}_i \leq \max_{\mu_i \in U_i} f_i(\hat{x}, \mu_i) - \hat{s}_i \leq \epsilon_i, i \neq k$, 即 $(\tilde{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^-)$ 的可行点, 并且 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) \leq \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k)$ 。这意味着 $\max_{\mu_k \in U_k} f_k(\tilde{x}, \mu_k) + \sum_{i \neq k} \gamma_i \hat{s}_i \leq \max_{\mu_k \in U_k} f_k(\hat{x}, \mu_k) + \sum_{i \neq k} \gamma_i \hat{s}_i$, 与 $(\hat{x}, \hat{s})$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^-)$ 的唯一最优解矛盾, 故假设 $\hat{x}$ 是 (MOP) 的鲁棒有效解。证毕

例 6 令 $f_1 = x_1 - 1 + \mu_1, f_2 = x_2 + 1 + \mu_2$ 且 $\mu_1 \in U_1 = [-1, 1], \mu_2 \in U_2 = [-2, -1]$, 令 $g_1 = x_1(x_2 - 1) + v_1, g_2 = -x_1 - 2 + v_2, g_3 = x_1 - 2 + v_3, g_4 = -x_2 - 1 + v_4, g_5 = x_2 - 3 + v_5$ 且 $v_1 \in V_1 = [-1, 0], v_2 \in V_2 = [-1, 0], v_3 \in V_3 = [-3, 0], v_4 \in V_4 = [-1, 0], v_5 \in V_5 = [-3, 0]$ 。

取 $k=1, \gamma_2=1, \epsilon_2=0$, 则 $(\hat{x}, \hat{s}) = (\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{s}_2) = (-2, 1, 1)$ 是 $(RP_{\epsilon-k}^-)$ 的唯一最优解, 可以验证 $\hat{x} = (-2, 1)$ 是 (MOP) 的鲁棒有效解。

3 结语

本文研究了约束多目标优化问题鲁棒有效解和鲁棒弱有效解的一些性质, 讨论了鲁棒标量化问题的最优解与约束多目标优化问题鲁棒有效解与鲁棒弱有效解之间的关系, 建立了鲁棒弱有效解和鲁棒有效解的一些充分条件, 并利用具体例子对主要结果进行解释。如何进一步研究这类多目标优化问题的鲁棒真有效解与鲁棒标量化问题的关系也是非常有意义的课题。

参考文献:

- [1] EHRGOTT M. Multicriteria optimization[M]. Berlin, Heidelberg: Springer, 2005.
- [2] 赵克全. 向量优化问题解的性质研究[D]. 呼和浩特: 内蒙古大学, 2013.
ZHAO K Q. Study on characterizations of solutions in vector optimization problems[D]. Hohhot: Inner Mongolia University, 2013.
- [3] YANG X M, YANG X Q, CHEN G Y. Theorems of the alternative and optimization with set-valued maps[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2000, 107(3): 627-640.
- [4] YANG X M, LI D, WANG S Y. Near-subconvexlikeness in vector optimization with set-valued functions[J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 2001, 110(2): 413-427.
- [5] ZHAO K Q, CHEN G Y, YANG X M. Approximate proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2014, 64(8): 1777-1793.
- [6] ZHAO K Q, YANG X M. E-Benson proper efficiency in vector optimization[J]. Optimization, 2013, 64(4): 739-752.
- [7] ZHAO K Q, CHEN G Y, PENG J W. Weak E-optimal solution in vector optimization[J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 2013, 17(4): 1287-1302.
- [8] RASTEGAR N, KHORRAM E. A combined scalarizing method for multiobjective programming problems[J]. European Journal of Operational Research, 2014, 236(1): 229-237.
- [9] ELCHFELDER G. An adaptive scalarization method in multiobjective optimization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2009, 19(4): 1694-1718.
- [10] 赵克全, 杨新民, 夏远梅. 多目标优化问题的完全标量化[J]. 中国科学: 数学, 2021, 51(2): 411-424.
ZHAO K Q, YANG X M, XIA Y M. Complete scalarization of multi-objective optimization problems[J]. Scientia Sinica Mathematica, 2021, 51(2): 411-424.
- [11] 夏远梅, 赵克全. 向量优化中 ϵ -真有效解的非线性标量化性质[J]. 运筹学学报, 2014, 18(4): 58-64.
XIA Y M, ZHAO K Q. Nonlinear scalarization characterizations for ϵ -properly efficient solutions in vector optimization[J]. Operations Research Transactions, 2014, 18(4): 58-64.
- [12] BURACHIK R S, KAYA C Y, RIZVI M M. A new scalarization technique to approximate pareto fronts of problems with disconnected feasible sets[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2014, 162(2): 428-446.
- [13] KÖBIS E. On robust optimization relations between scalar robust optimization and unconstrained multicriteria optimization[J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 2015, 167(3): 969-984.
- [14] ZAMANI M, SOLEIMANI-DAMANEH M, KABGANI A. Robustness in nonsmooth nonlinear multi-objective programming[J]. European Journal of Operational Research, 2015, 247(2): 370-378.
- [15] CHUONG D T. Optimality and duality for robust multiobjective optimization problems[J]. Nonlinear Analysis, 2016, 134: 127-

143.

- [16] CHUONG D T. Robust optimality and duality in multiobjective optimization problems under data uncertainty[J]. SIAM Journal on Optimization, 2020, 30(2): 1501-1526.
- [17] HONG Z, BAE D K, KIM S D. Minimax programming as a tool for studying robust multi-objective optimization problems[J]. Annals of Operations Research, 2022, 319(2): 1589-1606.
- [18] KERDKAEW J, WANGKEEREE R, WANGKEEREE R. Optimality conditions for robust weak sharp efficient solutions of nonsmooth uncertain multiobjective optimization problems[J]. Arabian Journal of Mathematics, 2022, 11(2): 313-326.
- [19] HOSEINPOOR N, GHAZNAVI M. Slack-based generalized tchebycheff norm scalarization approaches for solving multiobjective optimization Problems[J]. Journal of Applied Mathematics and Computing, 2023, 69(4): 3151-3169.
- [20] THU T T N, VAN T S, HONG D L. Robust optimality conditions for multiobjective programming problems under data uncertainty and its applications[J]. Optimization, 2024, 73(3): 641-672.
- [21] EHRGOTT M, RUZIKA S. Improved ϵ -constraint method for multiobjective programming[J]. Journal of Optimization Theory & Applications, 2008, 138(3): 375-396.

Operations Research and Cybernetics

A Constraint Scaling Method for Robust Multi-Objective Optimization Problems

DENG Rui, ZHAO Kequan

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: In order to study the relationship between the optimal solution of constrained robust scalarization problems and the robust effective solution and robust weak effective solution of multi-objective optimization problems, and to obtain the properties of robust solutions. Using robust scalarization methods, the constrained deterministic multi-objective optimization problem is extended to robust multi-objective optimization problems, and robust effective solutions and robust weak effective solutions are studied under different parameter conditions. Some sufficient conditions for robust efficient solutions and robust weak efficient solutions are established, and specific examples are given to explain the main results. The results are an improvement and replication of some recent research work.

Keywords: robust multi-objective optimization problems; robust scalarization problems; robust weak effective solutions; robust effective solutions

(责任编辑 陈 乔)