

关于 Kropina 度量的数量曲率^{*}

程新跃, 张 雨

(重庆师范大学 数学科学学院, 重庆 401331)

摘要:为了研究和刻画 Kropina 度量的数量曲率,利用 Kropina 度量的导航术技巧及数量曲率的定义展开讨论。令 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 是一个由导航数据 (h, V) 确定的 Kropina 度量。在 F 关于 Busemann-Hausdorff 体积形式的 S-曲率是迷向的条件下,讨论了 F 的数量曲率 $r(x)$ 和 h 的数量曲率 $\bar{r}(x)$ 的关系。特别地,当 F 是一个 Einstein-Kropina 度量时,证明了 $r(x) = \bar{r}(x)$ 。

关键词:Finsler 度量;Kropina 度量;数量曲率;S-曲率;导航数据

中图分类号:O186.1

文献标志码:A

文章编号:1672-6693(2024)03-0073-06

Ricci 曲率在 Finsler 几何中扮演了一个非常重要的角色。Ricci 曲率 $\text{Ric}(x, y)$ 是在包含向量 $y \in T_x M$ 的“旗面” P 上的旗曲率的平均值。对 Ricci 曲率进一步取平均值便得到所谓的数量曲率。具体地说,设 (M, F, dV_{BH}) 是一个具有 Busemann-Hausdorff 体积形式 $dV_{\text{BH}} = \sigma_{\text{BH}} dx^1 \cdots dx^n$ 的 Finsler 流形。在每一个切空间 $T_x M$ 上,可以通过自然基 $\{\partial/\partial x^i\}$ 定义一个自然的坐标系 (y^i) 。Busemann-Hausdorff 体积形式 $dV_{\text{BH}} = \sigma_{\text{BH}} dx^1 \cdots dx^n$ 在 $T_x M$ 上自然地诱导了一个体积形式:

$$dV_x = \sigma_{\text{BH}}(x) dy^1 \cdots dy^n.$$

利用 dV_x 去平均单位球 $B_x := \{y \in T_x M | F(x, y) < 1\}$ 上的 Ricci 曲率,并将 F 的数量曲率定义为:

$$r(x) := \frac{n+2}{\omega_n} \int_{B_x} \text{Ric}(x, y) dV_x, \quad (1)$$

其中 ω_n 表示 $\mathbf{R}^n$ 中单位球的体积。这个定义首先是由沈忠民在文献[1]中给出的。当 F 是 Riemannian 度量时,容易看出由式(1)定义的 $r(x)$ 恰好就是 Riemannian 度量 F 的数量曲率。沈忠民^[1]证明了下列结果:若 n 维完备 Finsler 流形 (M, F) 满足 $r \geq n(n-1)$, 且 $\inf \text{Ric} > -\infty$, S-曲率 $S=0$, 同时度量球的体积不是呈指数增长, 则 (M, F) 的共轭半径满足:

$$\text{ConjRad}(M) \leq \pi.$$

Randers 度量是由物理学家 Randers 于 1941 年从广义相对论的角度首次提出的,它可以表示成 $F = \alpha + \beta$ 的形式,其中 $\alpha = \sqrt{a_{ij}(x)y^i y^j}$ 是 Riemannian 度量, $\beta = b_i(x)y^i$ 是流形 M 上满足 $\|\beta_x\| \leq 1$ 条件的 1 形式。在 Finsler 几何中还有另一类特殊而重要的 Finsler 度量,它可以表示成 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$, 称之为 Kropina 度量。Kropina 度量是由 Berwald 在研究射影平坦的二维 Finsler 空间时首次提出,并由 Kropina 作了深入研究^[2]。后来, Matsumoto 在维数 $n \geq 3$ 的流形上用 Cartan 挠率定义了 C 可约度量。1978 年, Matsumoto 等人^[3]证明了任何 C 可约度量只能是 Randers 度量或 Kropina 度量。然而, Randers 度量是正则的 Finsler 度量,而 Kropina 度量是具有奇异性的 Finsler 度量。因此, Kropina 度量并不是经典的 Finsler 度量,它们不能定义在整个切丛上,而只能定义在切丛的一个锥形区域上。在每个点 $x \in M$, 定义:

$$A_x = \left\{ y = y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_x M | \beta = b_i(x)y^i > 0 \right\},$$

易见 A_x 是 $T_x M$ 上的一个锥形区域。Kropina 度量 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}: A \rightarrow (0, \infty)$ 是一个锥 Finsler 度量,它在 A 上是正定

* 收稿日期:2023-04-03 修回日期:2024-01-20 网络出版时间:2024-06-03T16:59

资助项目:国家自然科学基金面上项目(No. 11871126, No. 12141101)

第一作者简介:程新跃,男,教授,博士,研究方向为微分几何及应用,E-mail:chengxy@cqu.edu.cn

网络出版地址:https://link.cnki.net/urlid/50.1165.n.20240603.1255.002

的 Finsler 度量, 其中 $A := \bigcup_{x \in M} A_x$ [4]。这类度量被称为锥 Kropina 度量。一个具有锥 Kropina 度量 F 的 Finsler 流形 (M, F) 称为锥 Kropina 流形。本文着重研究锥 Kropina 度量, 并且总是用术语“Kropina 度量”来代替“锥 Kropina 度量”。

众所周知, 一个 Finsler 度量 F 是 Randers 度量或 Kropina 度量当且仅当它是在一个满足 $\|V\|_h < 1$ 或 $\|V\|_h = 1$ 的外力 V 扰动下, 一个具有 Riemannian 度量 $h = \sqrt{h_{ij}(x)y^i y^j}$ 的流形上的导航术问题的解, 这里 $\|V\|_h$ 表示 V 关于 h 的长度 [4-6]。

Sevim-Shen [5] 研究了由导航数据 (h, V) 确定的具有常数数量曲率的 Randers 度量。在 Riemannian 度量 h 具有常数数量曲率且向量场 V 关于 h 是相似的条件 (其中第 2 个条件等价于 Randers 度量关于 Busemann-Hausdorff 体积形式的 S -曲率是迷向的), 他们证明了 Randers 度量具有常数数量曲率。本文着重研究和刻画由导航数据 (h, V) 确定的 Kropina 度量的数量曲率。主要定理如下。

定理 1 设 F 是 n 维流形 M 上由导航数据 (h, V) 确定的 Kropina 度量。假设 F 关于 Busemann-Hausdorff 体积形式的 S -曲率是迷向的。令 $r(x)$ 和 $\bar{r}(x)$ 分别表示 F 和 h 的数量曲率, 则它们之间有如下关系:

$$r(x) = \bar{r}(x) - n \text{Ric}(V) - n S_i^m S_m^i,$$

其中 $\text{Ric}(V)$ 表示 Riemannian 度量 h 沿向量场 V 的 Ricci 曲率。对于 S_i^j 的具体定义, 请见下一节的介绍。

一般情况下, 并不能明确地确定项 $S_i^m S_m^i$ 的值。但是, 当 F 是一个 Einstein 度量时, 可以得到 $r(x)$ 和 $\bar{r}(x)$ 之间的一个简单关系。

定理 2 设 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 是 $n (\geq 2)$ 维流形 M 上由导航数据 (h, V) 确定的一个 Einstein-Kropina 度量, $r(x)$ 和 $\bar{r}(x)$ 分别表示 F 和 h 的数量曲率。那么 $r(x) = \bar{r}(x)$ 。

1 预备知识

本节将介绍 Finsler 几何中一些必要的定义和引理。详情请参见文献 [4, 6-7]。

令 F 是 n 维光滑流形 M 上的 Finsler 度量。 G^i 是 F 的测地系数, 定义为:

$$G^i := \frac{1}{4} g^{il} \{ [F^2]_{x^k y^l} y^k - [F^2]_{x^l} \}.$$

进一步, 对任意 $x \in M$ 和 $y \in T_x M \setminus \{0\}$, Riemannian 曲率 $R_y := R_k^i(x, y) \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^k$ 由下式定义:

$$R_k^i(x, y) := 2 \frac{\partial G^i}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 G^i}{\partial x^j \partial y^k} y^j + 2 G^j \frac{\partial G^i}{\partial y^j \partial y^k} - \frac{\partial G^i}{\partial y^j} \frac{\partial G^j}{\partial y^k}.$$

Riemannian 曲率的迹称为 Ricci 曲率, 即 $\text{Ric}(y) := R_m^m(x, y), y \in T_x M$ 。

如果 F 的 Ricci 曲率满足 $\text{Ric}(y) := (n-1)\mu(x)F^2(x, y), (x, y) \in TM$, 其中 $\mu(x)$ 是 M 上的标量函数, 则称 F 是一个 Einstein 度量。

令:

$$\text{Ric}_{ij}(x, y) := \frac{1}{2} (\text{Ric})_{y^i y^j}(x, y), \mathbf{Ric} := \text{Ric}_{ij}(x, y) dx^i \otimes dx^j. \quad (2)$$

$\mathbf{Ric}$ 被称为 F 的 Ricci 张量。对于 $y \in T_x M \setminus \{0\}$, 有 $\text{Ric}(y) = \mathbf{Ric}(y, y) = \text{Ric}_{ij} y^i y^j$ 。特别地, 当 F 是一个 Riemannian 度量时, 易见, $\text{Ric}_{ij}(x, y) = \text{Ric}_{ij}(x) = R_{i, mj}^m(x)$ 只与点 $x \in M$ 有关, 其中 $R_{i, kl}^m(x)$ 表示 Riemannian 度量 F 的 Riemannian 曲率张量。

设 (M, F) 为具有体积形式 $dV = \sigma(x) dx^1 \cdots dx^n$ 的 Finsler 流形。对每一个 $y \in T_x M \setminus \{0\}$, 定义:

$$\tau(x, y) := \ln \frac{\sqrt{\det(g_{ij}(x, y))}}{\sigma(x)},$$

称 τ 是 F 的畸变。 S -曲率是 τ 沿测地线的变化率。具体地, 令 $c = c(t)$ 是满足 $c(0) = 0, \dot{c}(0) = y$ 的测地线, 则

S -曲率 S 被定义为 $S(x, y) := \frac{d}{dt} [\tau(c(t), \dot{c}(t))] \Big|_{t=0}$ 。

简言之, 有 $S = \tau|_m(x, y) y^m$, 这里的“ $|$ ”表示关于 F 的水平协变导数 [7]。

在 Finsler 流形 (M, F) 上, Busemann-Hausdorff 体积形式 $dV_{\text{BH}} = \sigma_{\text{BH}}(x) dx^1 \cdots dx^n$ 由下式定义^[7]:

$$\sigma_{\text{BH}}(x) := \frac{\omega_n}{\text{Vol}\{(y^i) \in \mathbf{R}^n \mid F(x, y) < 1\}},$$

其中: $\text{Vol}\{\cdot\}$ 表示标准欧氏体积, $\omega_n = \text{Vol}(B^n(1))$ 是单位球 $B^n(1) \subset \mathbf{R}^n$ 的体积。

可以证明, Kropina 度量是 Riemannian 流形上 Zermelo 导航术问题的奇异解^[4]。令 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 是 n 维流形 M 上的一个 Kropina 度量。不难发现在 M 上存在一个 Riemannian 度量 $h = \sqrt{h_{ij}(x)y^i y^j}$ 和一个满足 $\|V\|_h = \sqrt{h_{ij}(x)V^i V^j} = 1$ 的外力场 $V = V^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i}$, 使得度量 F 可以通过求解下列 Zermelo 导航术问题:

$$h\left(x, \frac{y}{F(x, y)} - V_x\right) = 1. \quad (3)$$

而得到。换言之, F 是由

$$F = \frac{h^2}{2V_0} \quad (4)$$

确定的 Kropina 度量, 其中: $V_0 := V_i y^i = \langle y, V_x \rangle_h$, $V_i := h_{ij} V^j$, 而 $\langle \cdot, \cdot \rangle_h$ 表示由 h 诱导的内积。在这种情形下, 称 (h, V) 为 Kropina 度量 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 的导航数据, 并且:

$$\alpha = \frac{b}{2} h, \beta = \frac{b^2}{2} V_0. \quad (5)$$

这里的 $b := \|\beta\|_\alpha$ 是 β 关于 α 的范数。通过式(5)有:

$$a_{ij} = e^{-2\rho} h_{ij}, b_i = 2e^{-2\rho} V_i, b^2 = 4e^{-2\rho},$$

其中: $\rho := \ln \frac{2}{b}$ 。上式意味着 Riemannian 度量 α 与 β 是共形相关的。因此, α 的测地系数 G_α^i 与 h 的测地系数 G_h^i 有如下关系式^[8]:

$$G_\alpha^i = G_h^i + \frac{1}{2} \rho^i h^2 - \rho_0 y^i,$$

其中: $\rho_i := \frac{\partial \rho}{\partial x^i}$, $\rho_0 := \rho_i y^i$, $\rho^i := h^{ij} \rho_j$ 。

与式(2)相似, 令:

$$\overline{\text{Ric}}_{ij}(x) := \frac{1}{2} (\overline{\text{Ric}})_{y^i y^j}(x, y) = \overline{R}_{i m j}^m(x), \mathbf{Ric} := \overline{\text{Ric}}_{ij}(x) dx^i \otimes dx^j.$$

即 $\mathbf{Ric}$ 是 h 的 Ricci 曲率张量, $\overline{\text{Ric}}(x, y) = \mathbf{Ric}(y, y)$ 是 h 的 Ricci 曲率。

考虑由 $\xi^i := y^i - F(x, y) V^i(x)$ 定义的变换 $\phi: y \in T_x M \setminus \{0\} \rightarrow \xi \in T_x M \setminus \{0\}$ 。令:

$$\widetilde{h} := \sqrt{h_{ij}(x) \xi^i \xi^j}, \widetilde{\text{Ric}} := \overline{\text{Ric}}_{ij}(x) \xi^i \xi^j = \mathbf{Ric}(\xi, \xi).$$

从式(3)很容易得到 $\widetilde{h} = h(x, \xi) = F(x, y)$ 。进一步, 令:

$$R_{ij} := \frac{1}{2} (V_{i|j} + V_{j|i}), S_{ij} := \frac{1}{2} (V_{i|j} - V_{j|i}), \\ S_j^i := h^{ik} S_{kj}, S_j := V^i S_{ij}, R_j := V^i R_{ij}, R := R_j V^j.$$

这里“ $|$ ”表示关于 h 的协变导数。

为了证明定理 1 和定理 2, 需要下述引理。

引理 1^[9] 令 F 是由导航数据 (h, V) 确定的一个 Kropina 度量。设 F 关于 Busemann-Hausdorff 体积形式的 S -曲率是迷向的。那么 F 的 Ricci 曲率可以用 h 的 Ricci 曲率和 V 关于 h 的协变导数表示:

$$\text{Ric}(x, y) = \overline{\text{Ric}}(x, y) - 2F \mathbf{Ric}(y, V) - F^2 S_i^m S_m^i, \quad (6)$$

其中: $S_i^j := h^{jm} S_{mi}$ 。

引理 2^[10] 令 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 是 $n(\geq 2)$ 维流形 M 上由导航数据 (h, V) 确定的一个 Kropina 度量。那么 F 是具有

Ricci 标量 $\kappa(x)$ 的 Einstein 度量的充分必要条件是 h 是具有 Ricci 标量 $\delta(x)$ 的 Einstein 度量, 并且 V 是单位 Killing 向量场。此时, $k = \delta \geq 0$ 。

2 定理 1 的证明

令 $F = \frac{\alpha^2}{\beta}$ 是由式(4)给定的具有导航数据 (h, V) 的 Kropina 度量。假设 F 关于 Busemann-Hausdorff 体积形式的 S -曲率是迷向的。在点 x 取定一个局部坐标系 (x^i) 。在 $T_x M$ 上有 2 个坐标系 (y^i) 和 (ξ^i) , 它们之间的关系由坐标变换 $\psi: (y^i) \rightarrow (\xi^i)$ 定义为 $\xi^i := y^i - F(x, y)V^i(x)$ 。

由引理 1 中的式(6), 可以得到:

$$\begin{aligned} \text{Ric}(x, y) &= \overline{\text{Ric}}_{pq} y^p y^q - 2F \overline{\text{Ric}}_{pq} y^p V^q - F^2 S_i^m S_m^i = \\ &= \overline{\text{Ric}}_{pq} (\xi^p + FV^p)(\xi^q - FV^q) - F^2 S_i^m S_m^i = \\ &= \widetilde{\text{Ric}} + F \overline{\text{Ric}}_{pq} V^p \xi^q - F \overline{\text{Ric}}_{pq} V^q \xi^p - F^2 \overline{\text{Ric}}(V) - F^2 S_i^m S_m^i = \widetilde{\text{Ric}} - F^2 \overline{\text{Ric}}(V) - F^2 S_i^m S_m^i. \end{aligned} \quad (7)$$

这里的 $\widetilde{\text{Ric}} = \overline{\text{Ric}}_{pq} \xi^p \xi^q$ 。

进一步, 式(7)可改写为:

$$\text{Ric}(x, y) - \widetilde{\text{Ric}} = -F^2 \overline{\text{Ric}}(V) - F^2 S_i^m S_m^i. \quad (8)$$

令:

$$B_x := \{(y^i) \in \mathbf{R}^n \mid F(x, y) < 1\}, \tilde{B}_x := \{(\xi^i) \in \mathbf{R}^n \mid h(x, \xi) < 1\}.$$

因为 $F(x, y) = h(x, \xi) = \tilde{h}$, 容易发现 B_x 在映射 ψ 下的像是 $\tilde{B}_x$ 。在 $T_x M$ 上, 易见 $\tilde{h} = \sqrt{h_{ij}(x)\xi^i \xi^j}$ 在 (ξ^i) 处的 Riemannian 体积形式为 $dV_{\tilde{h}} = \sqrt{\det(h_{ij})} d\xi^1 \cdots d\xi^n$ 。

由于单位球 B_x 与 $\tilde{B}_x$ 在 $\mathbf{R}^n$ 中满足 $\tilde{B}_x = B_x - (V^i)$, 那么 $dV_{\text{BH}} = dV_h^{[7]}$, 也就是说:

$$\sigma_{\text{BH}}(x) = \sqrt{\det(h_{ij}(x))}.$$

此外, 坐标变换 ψ 具有雅可比行列式 $\frac{1}{1 + \tilde{h}_{\xi^k} V^k}$ 。那么 Busemann-Hausdorff 体积形式 $d\tilde{V}_x := (\psi^{-1})^* dV_x$ 可以表示为如下形式:

$$d\tilde{V}_x = (\psi^{-1})^* (\sigma_{\text{BH}}(x) dy^1 \cdots dy^n) = (1 + \tilde{h}_{\xi^k} V^k) dV_{\tilde{h}} = \sqrt{\det(h_{ij}(x))} (1 + \tilde{h}_{\xi^k} V^k) d\xi^1 \cdots d\xi^n.$$

在单位球 B_x 上对式(8)积分, 并可以利用 $\int_{B_x} \widetilde{\text{Ric}} dV_x = \int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} d\tilde{V}_x$ 得到:

$$\int_{B_x} \text{Ric} dV_x - \int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} d\tilde{V}_x = - \int_{B_x} F^2 \overline{\text{Ric}}(V) dV_x - \int_{B_x} F^2 S_i^m S_m^i dV_x. \quad (9)$$

根据 $d\tilde{V}_x = (1 + \tilde{h}_{\xi^k} V^k) dV_{\tilde{h}}$ 可以得到:

$$\int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} d\tilde{V}_x = \int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} dV_{\tilde{h}} + \int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} \tilde{h}_{\xi^k} V^k dV_{\tilde{h}}.$$

易知, 在 $\tilde{B}_x$ 上 $\widetilde{\text{Ric}} \tilde{h}_{\xi^k} V^k$ 关于 ξ 是奇函数, 所以 $\int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} \tilde{h}_{\xi^k} V^k dV_{\tilde{h}} = 0$ 。

由数量曲率的定义, 有:

$$\int_{B_x} \text{Ric} dV_x = \frac{\omega_n}{n+2} r(x), \int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} d\tilde{V}_x = \int_{\tilde{B}_x} \widetilde{\text{Ric}} dV_{\tilde{h}} = \frac{\omega_n}{n+2} \bar{r}(x). \quad (10)$$

利用坐标变换 ψ 的定义, 可以得到 $\tilde{h} = F(x, y)$, 进而可知:

$$\int_{B_x} F^2 dV_x = \int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 d\tilde{V}_x = \int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 (1 + \tilde{h}_{\xi^k} V^k) dV_{\tilde{h}}.$$

又由于 $\tilde{h}^2 \tilde{h}_{\xi^k} V^k = \tilde{h} h_{jk}(x) \xi^j V^k$ 在 $\tilde{B}_x$ 上关于 ξ 是奇函数, 那么:

$$\int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 \tilde{h}_{\xi^k} V^k dV_{\tilde{h}} = 0.$$

从而, 有:

$$\int_{B_x} F^2 dV_x = \int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 d\tilde{V}_x = \int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 (1 + \tilde{h}_{\xi^k} V^k) d\tilde{V}_{\tilde{h}} = \int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 dV_{\tilde{h}} = \frac{n}{n+2} \omega_n. \quad (11)$$

因此,可以得到:

$$\int_{B_x} F^2 \overline{\text{Ric}}(V) dV_x = \overline{\text{Ric}}(V) \int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 dV_{\tilde{h}} = \overline{\text{Ric}}(V) \frac{n}{n+2} \omega_n \quad (12)$$

以及

$$\int_{B_x} F^2 S_i^m S_m^i dV_x = S_i^m S_m^i \int_{\tilde{B}_x} \tilde{h}^2 dV_{\tilde{h}} = S_i^m S_m^i \frac{n}{n+2} \omega_n. \quad (13)$$

将式(10)~(13)代入式(9)得到:

$$r(x) - \bar{r}(x) = -n \overline{\text{Ric}} - n S_i^m S_m^i,$$

即

$$r(x) = \bar{r}(x) - n \overline{\text{Ric}} - n S_i^m S_m^i.$$

这就证明了定理 1.

证毕

3 定理 2 的证明

本节给出定理 2 的证明. 假设 F 是 $n (\geq 2)$ 维流形上由导航数据 (h, V) 确定的 Kropina 度量. 由引理 2 可知, F 是具有 Ricci 标量 $\kappa(x)$ 的 Einstein 度量的充分必要条件是 h 是具有 Ricci 标量 $\delta(x)$ 的 Einstein 度量, 并且 V 是单位 Killing 向量场. 在这种情况下, $\kappa(x) = \delta(x) \geq 0$. 因此, 根据 Einstein 度量的定义可以得到:

$$\text{Ric}(x, y) = (n-1)\kappa(x)F^2, \overline{\text{Ric}}(x, y) = (n-1)\kappa(x)h^2.$$

通过式(1)、(11), 有:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{n+2}{\omega_n} \int_{B_x} \text{Ric} dV_x = \frac{n+2}{\omega_n} \int_{B_x} (n-1)\kappa(x)F^2 dV_x = \\ &= \frac{(n-1)(n+2)\kappa(x)}{\omega_n} \int_{B_x} F^2 dV_x = n(n-1)\kappa(x). \end{aligned} \quad (14)$$

现在, 令:

$$\bar{B}_x := \{(y^i) \in \mathbf{R}^n \mid h(x, y) < 1\}, d\bar{V}_x := \sqrt{\det(h_{ij}(x))} dx^1 \cdots dx^n.$$

那么根据式(1)并类似于式(14), 有:

$$\begin{aligned} \bar{r}(x) &= \frac{n+2}{\omega_n} \int_{\bar{B}_x} \overline{\text{Ric}} d\bar{V}_x = \frac{n+2}{\omega_n} \int_{\bar{B}_x} (n-1)\kappa(x)h^2 d\bar{V}_x = \\ &= \frac{(n-1)(n+2)\kappa(x)}{\omega_n} \int_{\bar{B}_x} h^2 d\bar{V}_x = n(n-1)\kappa(x). \end{aligned}$$

由此可见, $r(x) = \bar{r}(x)$. 这就完成了定理 2 的证明.

证毕

关于 Finsler 流形上数量曲率性质的研究是 Finsler 几何中的一个极为重要的课题. 由于计算的相对复杂性, 这一方向的研究目前还有许多障碍需要克服和突破. 本文的工作很好地丰富了这一方向的研究, 并对发展关于这一方向的研究提供了重要的支撑.

参考文献:

- [1] SHEN Z M. Conjugate radius and positive scalar curvature[J]. Mathematische Zeitschrift, 2001, 238(3): 431-439.
- [2] ANTONELLI P L, INGARDEN R S and MATSUMOTO M. The theory of sprays and Finsler spaces with applications in physics and biology [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1993.
- [3] MATSUMOTO M, HOJO S I. A conclusive theorem on C-reducible Finsler spaces[J]. Tensor, N. S., 1978, 32: 225-230.
- [4] YOSHIKAWA R, SABAUS V. Kropina metrics and zermelo navigation on Riemannian manifolds[J]. Geometriae Dedicata, 2014, 171: 119-148.
- [5] SEVIM E S, SHEN Z M. Randers metrics of constant scalar curvature[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2013, 56(3): 615-620.
- [6] CHENG X Y, LI T T, YIN L. The conformal vector fields on conic Kropina manifolds via navigation data[J]. Journal of Geometry and Physics, 2018, 131: 138-146.

- [7] CHERN S S, SHEN Z M. Riemann-Finsler geometry[M]//LONG Y M, ZHANG W P. Nankai Tracts in Mathematics, Vol. 6. Singapore: World Scientific, 2005.
- [8] SANDOR B, CHENG X Y. Finsler conformal transformations and the curvature invariances[J]. Publicationes Mathematicae, 2007, 70(1): 221-231.
- [9] CHENG X Y, CHENG H, WU P S. The characterizations on a class of weakly weighted Einstein-Finsler metrics[EB/OL]. (2022-05-27)[2023-04-03]. <https://arxiv.org/pdf/2205.13854>.
- [10] ZHANG X L, SHEN Y B. On Einstein-Kropina metrics[J]. Differential Geometry and its Applications, 2013, 31(1): 80-92.

On the Scalar Curvature of Kropina Metrics

CHENG Xinyue, ZHANG Yu

(School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China)

Abstract: The main purpose is to study and characterize the scalar curvature of Kropina metrics. The discussions are carried out by using navigation technique of Kropina metrics and the definition of scalar curvature. Let $F = \alpha^2/\beta$ be a Kropina metric expressed by navigation data (h, V) . If F is of isotropic S-curvature with respect to the Busemann-Hausdorff volume form, the relationship between the scalar curvature $r(x)$ of F and the scalar curvature $\bar{r}(x)$ of h is discussed. The relationship between the scalar curvature $r(x)$ of F and the scalar curvature $\bar{r}(x)$ of h is obtained. In particular, when F is an Einstein-Kropina metric, it is proved that $r(x) = \bar{r}(x)$.

Keywords: Finsler metric; Kropina metric; scalar curvature; S-curvature; navigation data

(责任编辑 黄 颖)